Contagem Dupla

João Victor Santos

1 Introdução

1.1 Contando de duas maneiras

Contagem dupla é uma das habilidades mais importantes da combinatória, onde vamos contar algo de duas maneiras diferentes. Essa técnica é usada em muitos problemas, tanto para achar o máximo, em questões com tabuleiros e até em questões com grafos. Geralmente é seguida de uma desigualdade, muitas delas usando a desigualdade de que Média Quadrática $\geq$ Média Aritmética como vamos ver nos exemplos.

2 Contando com tabelas

2.1 Entendendo o princípio da contagem dupla

2.1.1 Exemplos

Vamos pegar alguns exemplos bem simples para a gente entender melhor sobre a contagem dupla.

. . . . . .

Exemplo 1. Em uma sala existem varias panelhinhas, cada aluno pertence a exatamente 4 panelinhas e cada panelinha tem exatamente 4 alunos. Prove que a quantidade de alunos é igual a quantidade de panelinhas.

Solução. Para nossa solução, olhe a seguinte tabela:

	p_1	p_2	p_3	...	p_x
a_1	x				
a_2		x			x
a_3		x			
...					
a_y			x		x

Onde temos que p_1, p_2, p_3, ..., p_x são as x panelinhas e a_1, a_2, ..., a_y são os y alunos. Marcamos com um X a linha a_i e a colunha p_j se o aluno a_i tiver na panelinha p_j. Assim vamos contar os "X" de duas maneiras:

Contando por Colunas: Temos x colunas e cada coluna tem 4 marcações (pois cada panelnha tem 4 alunos), logo temos $4x$ marcações.

Contando por Linhas: Temos y linhas e cada linha tem 4 marcações (pois cada aluno participa de 4 panelinhas), logo temos $4y$ marcações.

Deste modo, como tem a mesma quantidade de marcações, $4x = 4y \to x = y$. Assim a quantidade de alunos é a mesma que de panelinhas.

.....

Exemplo 2. Durante um acampamento com 15 pessoas, a cada noite 4 pessoas ficavam acordadas para cuidar do acampamento. Sabendo que cada duas pessoas ficaram de vigia juntas duas vezes, quantas noites durou o acampamento?

Solução. Nesse problema aqui vamos pensar na seguinte tabela:

	n_1	n_2	n_3	...	n_x
p_1			x		x
p_2		x			x
...					
p_{15}		x	x		x

Onde p_1, p_2, ..., p_{15} são as pessoas e n_1, n_2, ..., n_x são as noites, e uma linha p_i esta marcada na coluna n_j se a pessoa p_i cuidou do acampamento na noite n_j. Neste problema vamos fazer uma contagem um pouco diferente: No lugar de contar as casas marcadas vamos contar os pares de casas marcadas entre as linhas. Por exemplo, se pegar a linha p_2 e p_{15} sabemos que existe exatamente duas interseções (pois o enunciado diz que para cada duas pessoas, elas ficaram de vigia duas vezes), e podemos ver que foi na segunda e na última noite, pela nossa tabela. Porém se somar todos esses pares, podemos contar por colunas também, pois cada coluna tem 4 marcações, logo temos $\binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ pares. Assim temos que:

Contando por Colunas: Temos x colunas e cada coluna possui $\binom{4}{2} = 6$ pares, logo temos $6x$ pares.

Contando por Linhas: Como temos 15 linhas, temos $\binom{15}{2} = \frac{15 \cdot 14}{2} = 105$ maneiras de escolher duas linhas, e para cada duas linhas, temos 2 pares, assim temos $105 \cdot 2 = 210$ pares.

Deste modo $6x = 210 \to x = 35$, mas x é a quantidade de noites, então foram 35 noites.

2.2 Uma pequena proposição

Conseguimos generalizar esse resultado da última questão com a seguinte proposição, que é mais uma ideia para os problemas:

Proposição: Considere uma tabela $l \times c$ com zeros e uns, sendo c_j a soma dos números na coluna j, $j = 1, 2, ..., c$. Suponha que exista t tal que, para cada par de linhas, existam exatamente t colunas que tenham um em ambos as linhas. Então:

$$t \cdot \binom{l}{2} = \sum_{j=1}^{c} \binom{c_j}{2}$$

Vamos ver um exemplo em um 6×3:

1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1

Podemos pensar como as casas com 1 sendo as marcadas e com 0 as vazias. Note que vamos praticamente contar esses "retângulo" e não as casas marcadas (perceba que na figura há 6 retângulos). Pois entre duas linhas temos 3 interseções, assim $t = 3$, logo há $3 \cdot \binom{3}{2} = t \cdot \binom{l}{2} = 6$ pares de linhas que coincidem (ou seja, os retângulos). Por outro lado, $c_1 = 1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 1$, $c_4 = 2$, $c_5 = 2$ e $c_6 = 3$, pois da esquerda para a direita há 1, 2, 1, 2, 2 e 3 marcações nas colunas, respectivamente. Assim a quantidade de "retângulo" é $\sum_{j=1}^{6} \binom{c_j}{2} = \binom{1}{2} + \binom{2}{2} + \binom{1}{2} + \binom{2}{2} + \binom{2}{2} + \binom{3}{2} = 0 + 1 + 0 + 1 + 1 + 3 = 6$, e assim contamos os "retângulos" de duas maneiras diferentes.

Perceba que, aplicando a proposição diretamente no exemplo 2, temos que $t = 2$, cada $c_j = 4$, $c = x$ e $l = 15$, então $2\binom{15}{2} = \sum_{j=1}^{x} \binom{4}{2} = x\binom{4}{2} \to 15 \cdot 14 = 2 \cdot 3 \cdot x \to 5 \cdot 7 = x \to x = 35$. Essa ideia é também útil quando não há um t fixo mas sabemos, por exemplo, que $t \leq 2$, logo saberiamos que seria no máximo 35 noites de acampamento, pois se t=2 contaria a maior quantidade possível de "retângulos", que seria $t \cdot \binom{l}{2}$, e se tomar um retângulo a mais então $t \geq 3$, então nesse caso, a gente vai ter o máximo. Lembrando sempre que $\sum_{j=1}^{c} \binom{c_j}{2}$ é sempre a quantidade exata de retângulos, então muitas questões vão pedir para maximizar ou minimizar este valor.

2.2.1 Mais exemplos

.....

Exemplo 3. *(IMC 2002)* 200 estudantes participaram de uma competição de matemática. A prova tinha 6 problemas. Sabe-se que cada problema

foi resolvido por pelo menos 120 estudantes. Prove que existem dois estudantes tais que cada problema foi resolvido por pelo menos um deles.

Solução. A moral deste problema não é contar os pares de problemas feitos entre dois estudantes, muito pelo contrário, vamos contar os pares de problemas não feitos por ambos estudantes. Para isso imagine a seguinte tabela:

	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
e_1	x	x				x
e_2						x
e_3	x		x		x	
...						
e_{199}	x		x		x	
e_{200}			x		x	

Onde p_i é o problema i e e_j é o estudante j. Suponha por absurdo que entre dois estudantes qualquer, eles não resolveram os 6 problemas juntos, então vai existir pelo menos um par de casas vazias (aqui vamos contar os pares de casas vazias). Por outro lado, entre cada problema, temos que no máximo $200 - 120 = 80$ estudantes não fizeram o problema. Deste modo temos que:

Contando por Colunas: Temos 6 colunas e cada coluna possui no máximo $\binom{80}{2}$ pares, logo temos no máximo $6\binom{80}{2}$ pares de casas vazias entre as linhas.

Contando por Linhas: Como temos 200 linhas, e para cada duas linhas temos no mínimo um par (pela nossa suposição). Como há $\binom{200}{2}$ pares de linhas, então temos no mínimo $\binom{200}{2}$ pares de casas vazias entre as linhas.

Deste modo $\binom{200}{2} \leq 6\binom{80}{2} \to 200 \cdot 199 \leq 6 \cdot 80 \cdot 79 \to 25 \cdot 199 \leq 6 \cdot 10 \cdot 79 \to 4975 \leq 4740$, mas $4975 > 4740$, absurdo! Portanto, existiram dois estudantes tais que, juntos, fizeram os 6 problemas.

.....

Exemplo 4. *(IMO 2005)* Numa competição de matemática no qual foram propostos 6 problemas, quaisquer dois problemas foram resolvidos por mais de 2/5 dos estudantes. Além disso, nenhum estudante resolveu os 6 problemas. Mostre que existem pelo menos 2 estudantes que resolveram 5 problemas cada um.

Solução. Observe a seguinte tabela:

Onde p_i é a questão i e e_j é o estudante j, e há n estudantes. Perceba que entre dois problemas, mais de $\frac{2}{5}$ das pessoas fizeram ambos (perceba que é maior e não maior ou

	e_1	e_2	e_3	...	e_n
p_1	x		x		
p_2					x
p_3	x	x			
p_4					
p_5					
p_6		x		x	x

igual). Como há $\binom{6}{2}$ maneiras de escolher dois problemas, então existem pelo menos $\frac{2n+r}{5}\binom{6}{2} = \frac{2n\cdot 6\cdot 5+6\cdot 5\cdot r}{5\cdot 2} = 6n+3r$ pares marcados entre linhas, assim existem pelo menos 6n+3r pares marcados entre linhas, onde r é como se fosse o restante para que 2n seja múltiplo de 5, e como é mais de 2/5 então r é pelo menos 1.

Por outro lado, suponha que há no máximo um estudante que fez 5 problemas, assim nenhum estudante fez 6 problemas e então todo restante fez no máximo 4, logo há no máximo $\binom{5}{2}+(n-1)\binom{4}{2} = 6n+4$, assim $6n+3r \leq 6n+4 \to r \leq 1$, como r é pelo menos 1 então r=1. Note que vamos ter que o número de pares entre linhas vai ser exatamente $\frac{2n+1}{5}\binom{6}{2} = 6n+3$, pois se r for maior dá ruim, deste modo $\binom{e_1}{2}+\binom{e_2}{2}+\cdots+\binom{e_n}{2} = 6n+3$, porém o maior valor deste somatório de binomiais é $\binom{5}{2}+(n-1)\binom{4}{2} = 6n+4$, como vimos anteriormente, por outro lado a segundo maior soma é $\binom{5}{2}+\binom{3}{2}+(n-2)\binom{4}{2} = 6n+1$, deste modo, é impossível haver uma soma de binomiais que dé 6n+3, assim levando ao absurdo!! Deste modo, deve haver dois estudantes em que cada um fez 5 problemas.

. . . . . .

Exemplo 5. *(2º TST Cone Sul 2022)* Considere um tabuleiro 11×11 em que cada casa é colorida de vermelho, azul ou amarelo. Mostre que existem quatro casas da mesma cor cujos centros são vértices de um retângulo com lados paralelos aos lados do tabuleiro.

Solução. Inicialmente vamos analisar a questão primeiro. Note que agora no lugar de só uma marcação, são três, então temos que escolher uma delas, e qual vamos escolher? A que estiver mais casas marcadas! Perceba que pelo Principio das Casas dos Pombos temos $11\cdot 11 = 121$ cadas e 3 cores, como $121 = 3\cdot 40+1$ então vai existir uma cor que vai aparecer em pelo menos 41 casinhas, então vamos olhar para essas 41 casinhas marcadas:

	C_1	C_2	C_3	...	C_{11}
L_1		x			
L_2	x		x		
L_3					x
...					
L_{11}		x			x

A tabela 11 por 11 com as 41 casas marcadas, suponha por absurdo que não há quatro

casinhas formando um retângulo, isto significa que entre duas linhas, existe no máximo um par de interseção, ou seja:

Contando por Linhas: Temos $\binom{11}{2} = \frac{11 \cdot 10}{2} = 55$ pares de linhas e para cada par temos no máximo um par de interseção, logo há no máximo 55 pares de interseção entre linhas. Por outro lado:

Contando por Colunas: Temos que em cada coluna i, temos c_i casinhas marcadas, logo o número de pares entre linhas é $\binom{c_1}{2} + \binom{c_2}{2} + \cdots + \binom{c_{11}}{2}$, onde sabemos que $c_1 + c_2 + ... + c_{11} \geq 41$ pelo nosso PCP.

Porém temos que $\sum_{i=1}^{11} \binom{c_i}{2} = \frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{11} c_i^2 - \sum_{i=1}^{11} c_i)$, deste modo, pela desigualdade que diz que a Média Quadrática é maior ou igual a Média Aritmética, temos que $\sqrt{\frac{c_1^2+c_2^2+\cdots+c_{11}^2}{11}} \geq \frac{c_1+c_2+\cdots+c_{11}}{11} \rightarrow \sum_{i=1}^{11} c_i^2 \geq \frac{(\sum_{i=1}^{11} c_i)^2}{11}$, mas sabemos que $\sum_{i+1}^{11} c_1 \geq 41$, logo $\sum_{i=1}^{11} \binom{c_i}{2} = \frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{11} c_i^2 - \sum_{i=1}^{11} c_i) \geq \frac{1}{2}(\frac{41^2}{11} - 41) = \frac{615}{11}$. Porém, pela nossa contagem dupla chegamos que $55 \geq \sum_{i=1}^{11} \binom{c_i}{2} \geq \frac{615}{11} \rightarrow 605 \geq 615$, mas $615 > 605$, absurdo!! Assim, deve haver um retângulo de apenas uma cor.

. . . . . .

Exemplo 6. *(OBM)* Sejam A_1, A_2, ..., $A_k \subset \{1, 2, ..., n\}$ conjuntos com $|A_i| \geq \frac{n}{2}$ e $|A_i \cap A_j| \leq \frac{n}{4}$ para todo i, j com $i \neq j$. Prove que $|\bigcup_{j=1}^{k} A_j| \geq \frac{kn}{k+1}$.

Solução. Bem, basicamente temos k conjuntos satisfazendo as duas propiedades e queremos que a quantidade de elementos que englobam esses conjuntos seja no mínimo $\frac{kn}{k+1}$, para isto, suponha que os elementos sejam de 1 até x, sem perda de generalidade, e queremos provar que $x \geq \frac{kn}{k+1}$. Seja ainda b_1, b_2, ..., b_x, onde b_i é a quantidade de vezes que vai aparecer o i.

	1	2	3	...	x
A_1	x				
A_2		x			x
A_3		x	x		x
...					
A_k		x			x

Do primeiro fato, temos que o número de posições marcadas é no mínimo $k \cdot \frac{n}{2} = \frac{kn}{2}$, assim já temos que $b_1 + b_2 + \cdots + b_x \geq \frac{kn}{2}$ e já vou adiantando que pela desigualdade das médias quadráticas e aritméticas, temos que $\sqrt{\frac{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_x^2}{x}} \geq \frac{b_1+b_2+\cdots+b_x}{x} \geq \frac{kn}{2x} \rightarrow b_1^2+b_2^2+\cdots+b_x^2 \geq \frac{k^2n^2}{4x}$. Do segundo fato temos que o número de interseções entre duas linhas é no máximo $\frac{n}{4}$, como temos $\binom{k}{2}$ pares de linhas, então há no máximo $\binom{k}{2} \cdot \frac{n}{4}$ pares de interseções entre linhas. Juntando as duas informações, temos que $\binom{b_1}{2} + \binom{b_2}{2} + \cdots + \binom{b_x}{2} \leq \binom{k}{2} \cdot \frac{n}{4} \rightarrow \frac{1}{2}(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_x^2 - (b_1 + b_2 + \cdots + b_x)) = \binom{b_1}{2} + \binom{b_2}{2} + \cdots + \binom{b_x}{2} \leq \binom{k}{2} \cdot \frac{n}{4}$, mas como

vimos que $b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_x^2 \geq \frac{k^2n^2}{4x}$ e que $b_1 + b_2 + \cdots + b_x \geq \frac{kn}{2}$, então $\frac{1}{2}(\frac{k^2n^2}{4x} - \frac{kn}{2}) \leq \binom{k}{2}\frac{n}{4} = \frac{kn(k-1)}{8} \to \frac{kn}{8x} - \frac{1}{4} \leq \frac{k-1}{8} \to kn - 2x \leq x(k-1) \to kn \leq x(k+1) \to\to \frac{kn}{k+1} \leq x$, que é o que queriamos provar.

. . . . . .

Exemplo 7. Uma ilha tem 12k habitantes, k inteiro positivo. Cada habitante conhece 3k + 6 outros habitantes na ilha (conhecer é uma relação simétrica). Sabe-se que existe um inteiro n tal que quaisquer dois habitantes da ilha têm exatamente n conhecidos em comum na ilha. Determine o valor de n e de k.

Solução. Observe a tabela a seguir:

	H_1	H_2	H_3	H_4	...	H_{12k}
H_1		x		x		x
H_2	x		x			
H_3		x				x
H_4	x					x
...						
H_{12k}	x		x	x		

Temos que todo mundo conhece 3k+6 outros habitantes, assim a quantidade de pares entre linhas é $12k \cdot \binom{3k+6}{2}$ (contando por colunas), por outro lado, dado um par de linhas temos exatamente n pares marcados em comum, logo temos $\binom{12k}{2} \cdot n$ pares em comum (contando por linhas). Deste modo $12k \cdot \binom{3k+6}{2} = \binom{12k}{2} \cdot n \to 12k(3k+6)(3k+5) = n \cdot 12k(12k-1) \to 9k^2 + 33k + 30 = n(12k-1)$, como k e n são inteiros então $12k - 1 \mid 9k^2 + 33k + 30$ (ou seja, 12k-1 divide o $9k^2 + 33k + 30$), deste modo $12k - 1 \mid 9k^2 + 33k + 30 \to 12k - 1 \mid 4(9k^2 + 33k + 30) = 36k^2 + 132k + 120 \to 12k - 1 \mid 36k^2 + 132k + 120 - (12k-1)3k = 135k + 120 \to 12k - 1 \mid 4(135k + 120) = 540k + 480 \to 12k - 1 \mid 540k + 480 - (12k-1)45 = 525 = 3 \cdot 5^2 \cdot 7$, logo 12k-1 pertence ao conjunto {1, 3, 5, 7, 15, 21, 25, 35, 75, 105, 175, 525}, logo 12k percente ao conjunto {2, 4, 6, 8, 16, 22, 26, 36, 76, 106, 176, 526}, e o único número ai que é múltiplo de 12 é o 36, logo $12k = 36 \to k = 3$, e como $9k^2 + 33k + 30 = n(12k-1) \to 210 = 35n \to n = 6$. Assim a resposta final é $(n, k) = (6, 3)$.

---

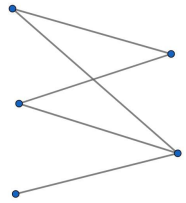
3 Contando chifres

3.1 Afinal... o que é um chifre?

3.1.1 Chifres

Um chifre em grafos é basicamente três vértices formando um "V", mais formalmente, dado três vértices u, v e w, então se u e v estão ligados e v e w estão ligados, então (u, v,

w) é um chifre.



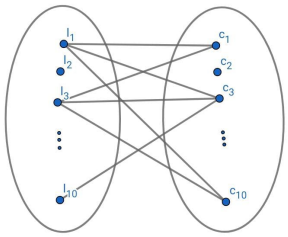
Por exemplo, na imagem acima temos um total de 6 chifres (temos 1+3 = 4 chifres onde o vértice do meio são os da esquerda e temos 2 chifres onde o vértice do meio é da direita). Perceba que o vértice de grau 3 não possui apenas dois mais sim 3 chifres, pois os chifres são todas as combinações possíveis de duas arestas que saem deste vértice. De modo geral, todo vértice v possui um total de $\binom{deg\ v}{2}$ chifres, assim na figura há $\binom{1}{2} + \binom{2}{2} + \binom{2}{2} + \binom{2}{2} + \binom{3}{2} = 6$ (isto te lembrou alguma coisa?).

Em alguns problemas é mais convencional contar chifres do que contar pares por linhas, vamos mostrar um exemplo que é o problema 6 da OBM nível 3 de 2022.

3.2 O problema 6 da OBM nível 3 de 2022

Problema: Algumas casinhas de um tabuleiro 10×10 são pintadas de roxo. Um conjunto de seis casinhas é especial quando as casinhas são a interseção de três linhas e duas colunas, ou duas linhas e três colunas, e estão pintadas de roxo. Encontre o maior valor de n para o qual é possível pintar n casinhas do tabuleiro de roxo sem que apareça um conjunto especial.

Solução: Perceba que você possui duas condições que não podem ocorrer, deste modo você percebe que trabalhar as duas condições com tabela é um pouco complicado, mas vamos pensar em um grafo bipartido onde de um lado está os vértices l_1, l_2, ..., l_{10} que vai representar as linhas de 1 a 10 e do outro lado vai estar os vértices c_1, c_2, ..., c_{10} que vai representar as colunas do nosso 10×10. Temos que um vértice l_i vai estar ligado a um vértice c_j se e somente se a casa na linha l_i e na coluna c_j está pintada.



Assim, o enunciado pede o máximo de arestas. Note que podemos traduzir o problema da seguinte forma: dado duas linhas ou duas colunas então o número máximo de chifres

que possuem elas como extremos é no máximo 2. Por exemplo, não pode ocorrer o que ta acontecendo com o l_1 e o l_3 pois eles tem formam 3 chifres (com c_1, c_3 e c_{10}), isto significa que nesas duas linhas, possuem 3 colunas cujas as interseções estão pintadas, o mesmo vale para as colunas, pois não pode haver duas colunas tal que há 3 linhas de modo que as interseções estão pintadas, sabendo disto vamos contar o total de chifres!

Bem, vamos contar chifres dos dois lados, primeiro note que temos $\binom{10}{2}$ maneiras de escolher as linhas, e para cada duas linhas temos no máximo 2 chifres, de modo analogo temos $\binom{10}{2}$ maneiras de escolher as colunas e para cada duas colunas elas tem no máximo 2 chifres, assim o total de chifres é no máximo $\binom{10}{2} \cdot 2 + \binom{10}{2} \cdot 2 = \binom{10}{2} \cdot 4 = 180$ chifres. Porém o número de chifres é $\sum_{i=1}^{10} \binom{deg\ l_i}{2} + \sum_{i=1}^{10} \binom{deg\ c_i}{2} \leq 180 \rightarrow \sum_{i=1}^{10} (deg\ l_i)^2 + (deg\ c_i)^2 - \sum_{i=1}^{10} deg\ l_i + deg\ c_i \leq 360$. Suponha que há n casas pintadas, logo $\sum_{i=1}^{10} deg\ l_i = \sum_{i=1}^{10} deg\ c_i = n$ e por $MA \leq MQ$ temos que $\frac{n^2}{10} \leq \sum_{i=1}^{10} (deg\ l_i)^2$, deste modo $\frac{n^2}{10} - n + \frac{n^2}{10} - n \leq \sum_{i=1}^{10} (deg\ l_i)^2 + (deg\ c_i)^2 - \sum_{i=1}^{10} deg\ l_i + deg\ c_i \leq 360$, portanto $\frac{n^2}{5} - 2n \leq 360 \rightarrow n^2 - 10n - 1800 \leq 0$.

Dai as raizes do polinômio $x^2 - 10x - 1800$ são $5 - 5\sqrt{73}$ e $5 + 5\sqrt{73}$ que é mais ou menos 47.72, assim $n \leq 47$ por contagem dupla (chegar nesta cota ja valia 3 pontos). Porém você percebe que 47.72 é meio froucho (não deu a igualdade bonitinha) e que 47 é um número bem ruim de se construir exemplo, então você começa a suspeitar que a resposta é 46, e de fato a resposta é 46, e para isto vamos fazer um negócio chamado de forçar a conta, ou seja, ver que n=47 dá errado e logo em seguida dar um exemplo para 46.

Para n=47 vamos analisar algumas coisas: A primeira é que nenhuma linha ou coluna pode ter masi que 5 casas pintadas, ou seja, provar que $c_i,\ l_j \leq 5$. Para isto suponha que $l_1 \geq l_2 \geq \cdots \geq l_{10}$, e $l_1 \geq 6$ e chame de $S = 47 - l_1$ a quantidade de casas que sobra para os 9 linhas restante. Note que a quantidade de pares em l_1 é $\binom{l_1}{2} \geq 15$, vamos contar pares nas linhas, normalmente, e vamos tirar aquelas que não são contadas, pois em $2 \cdot \binom{10}{2}$ nos contamos pares demais, até alguns que não existem. Para isto fixe a primeira linha, para cada linha da 2ª até a 10ª, temos no máximo 2 pares das $\binom{l_1}{2}$ pares para as linhas, assim temos no máximo 9 pares, logo pelo menos $\binom{l_1}{2} - 9$ pares foram contados a mais (pois no extremo séria se cada linha da 2ª até a 10ª tivesse um par em comum com a primeira, então no somatório $\binom{l_1}{2} + \binom{l_2}{2} + \cdots + \binom{l_{10}}{2} \leq 2 \cdot \binom{10}{2}$ contamos pares no l_1 demais, onde na real foram contados $\binom{l_1}{2} - 9$ a mais), e assim temos que o somatória fica no máximo $2 \cdot \binom{10}{2} - \binom{l_1}{2} + 9 = 99 - \binom{l_1}{2}$.

Por outro lado, fazendo $MQ \geq MA$ usual temos que $\binom{l_2}{2} + \binom{l_3}{2} + \cdots + \binom{l_{10}}{2} = \frac{1}{2}(\sum_{i=2}^{10} l_i^2 - \sum_{i=2}^{10} l_i) \geq \frac{1}{2}(\frac{S^2}{9} - S) = \frac{S^2 - 9S}{18}$, Deste modo $\frac{S^2-9S}{18} + \binom{l_1}{2} \leq \binom{l_1}{2} + \binom{l_2}{2} + \binom{l_3}{2} + \cdots + \binom{l_{10}}{2} \leq 99 - \binom{l_1}{2} \rightarrow \frac{(47-l_1)^2 - 9(47-l_1)}{18} + l_1(l_1 - 1) \leq 99 \rightarrow (47 - l_1)(38 - l_1) + 18 l_1(l_1 - 1) \leq 99 \cdot 18 \rightarrow$

$l_1(19l_1 - 103) + 47 \cdot 38 - 99 \cdot 18 \leq 0$, porém, se $l_1 \geq 6$ então $l_1(19l_1 - 103) > 0$ e $47 \cdot 38 - 99 \cdot 18 = 4 > 0$, gerando assim um absurdo!!

Deste modo $l_1 \leq 5$ e os números nas colunas vai ser exatamente 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 4, 4, 4, assim o números de pares vai ser $7 \cdot \binom{5}{2} + 3 \cdot \binom{4}{2} = 88$, porém pegue uma linha qualquer de 5 casas marcadas, note que como $\binom{5}{2} = 10$, então vai existir no mínimo um par de casas que nenhuma das outras 9 linhas vai ter, como há 7 linhas com 5 casas marcadas, então em $2 \cdot \binom{10}{2}$ contamos 7 pares a mais, assim o número máximo de pares vai ser $90 - 7 = 83$, absurdo pois o número de pares é 88. Deste modo N=46 e segue abaixo um exemplo para N=46:

x	x		x			x			
x	x	x		x			x		
	x	x	x		x			x	
		x	x	x		x			x
			x	x	x		x		
x				x	x	x		x	
	x				x	x	x		x
		x				x	x	x	
x			x				x	x	x
	x			x				x	x

3.3 Mais alguns exemplos

3.3.1 Exemplos

. . . . . .

Exemplo 1. Na terra de Oz há n castelos e várias estradas, sendo que cada uma delas liga dois castelos e não há mais do que uma estrada ligando diretamente dois castelos. Diz a lenda que se houver quatro castelos ligados em ciclo (ou seja, se existirem quatro castelos A, B, C e D tais que A e B, B e C, C e D e D e A estão ligados), um dragão aparecerá do centro dos castelos e destruirá a Terra de Oz. Mostre que para esta desgraça não acontecer o número de estradas deve ser menor ou igual a $\frac{(1+\sqrt{4n-3})n}{4}$.

Solução. Bem, traduzindo o problema para linguagem de grafos, em qual situação ocorre a desgraça? Quando dado dois vértices qualquer, eles compartilham de 2 chifres entre eles, pois assim vai haver um ciclo de 4 vértices. Assim, para a desgraça não correr, só deve haver no máximo um chifre entre os castelos. Agora o problema virou

basicamente um simples problema de contagem dupla. Chame de S o número de estradas, ou seja, de arestas, e queremos provar que $S \leq \frac{(1+\sqrt{4n-3})n}{4}$. Por contagem dupla, sabemos que o número máximo de chifres é $\binom{n}{2}$, porém, por outro lado, se chamar de v_1, v_2, ..., v_n os vértices da terra de Oz, então a quantidade de chifres é o $\sum_{i=1}^{n} \binom{deg\ v_i}{2}$, assim $\sum_{i=1}^{n} \binom{deg\ v_i}{2} \leq \binom{n}{2} \rightarrow \sum_{i=1}^{n} deg\ v_i^2 - \sum_{i=1}^{n} deg\ v_i \leq n(n-1)$. Porém sabemos que em um grafo, a soma dos graus de todos os vértices é o dobro da quantidade de arestas, logo $\sum_{i=1}^{n} deg\ v_i = 2S$ e por $MQ \geq MA$ temos que $\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} deg\ v_i^2}{n}} \geq \frac{\sum_{i=1}^{n}}{n} \geq \frac{2S}{n} \rightarrow \sum_{i=1}^{n} deg\ v_i^2 \geq \frac{4S^2}{n}$. Juntando as duas informações temos que $\frac{4S^2}{n} - 2S \leq n(n-1) \rightarrow 4S^2 - 2Sn \leq n^2(n-1) \rightarrow 4S^2 - 2Sn + \frac{n^2}{4} = (2S - \frac{n}{2})^2 \leq n^2(\frac{4n-3}{4}) = n^2(n-1) + \frac{n^2}{4} \rightarrow 2S - \frac{n}{2} \leq \frac{n\sqrt{4n-3}}{2} \rightarrow 4S \leq n(1+\sqrt{4n-3}) \rightarrow S \leq \frac{n(1+\sqrt{4n-3})}{4}$ que era o que queriamos provar.

.....

Exemplo 2. *(USAMO 1995)* Em um grupo de n pessoas, alguns pares de pessoas são amigas e os outros pares são inimigas. Existem k pares amigáveis no total, e é dado que não há três pessoas que sejam amigas umas com as outras. Prove que existe uma pessoa cujo conjunto de seus inimigos tem no máximo $k(1 - \frac{4k}{n^2})$ pares amigáveis nela.

Solução. Traduzindo o problema para linguagem de grafos: temos n vértices e ligamos dois deles se essas duas pessoas são amigas, ou seja, existem k arestas e além disso, não existe um triângulo neste grafo. Vamos mostrar uma solução contando várias coisas de várias maneiras diferentes. Inicialmente vamos observar o comportamento de um vértice v qualquer. Para isto seja A o conjunto de amigos de v e B o conjunto de inimigos de v, chame de x_1 a quantidade de arestas que saem de v para A, como não há triângulos então não existem dois vértices de A ligando entre si, então chame de x_2 a quantidade de arestas que sai de A para B, e por fim, chame de x_3 a quantidade de arestas que são de um vértice de B para outro vértice de B. Observe o exemplo abaixo onde os vértices de x_1 estão de roxo, os de x_2 estão de azul e os de x_3 estão de verde.

Note que $x_1 + x_2 + x_3 = k$, como queremos que para algum v o $x_3 \leq k(1 - \frac{4k}{n^2}) \iff k - x_1 - x_2 \leq k - \frac{4k^2}{n^2} \iff \frac{4k^2}{n^2} \leq x_1 + x_2$ para algum v. Porém note que $x_1 + x_2 = \sum_{v \subset A} deg\ v$ (aqui não fica tanto na cara mas contamos essa quantidade de arestas de duas maneiras diferentes), assim basta provar que existe v tal que $\sum_{v \subset A} deg\ v \geq \frac{4k^2}{n^2}$. Agora imagine na soma de todos esses conjuntos, ou seja, para cada vértice v você vai ter a soma de todos os graus de seus amigos, concorda que cada vértice vai ser somado o grau dele? Pois se um vértice v se liga ao a, b, c, d, e, então ele tem grau 5 e o 5 vai aparecer na soma do a, do b, do c, do d e do e, logo o 5 foi somado 5 vezes e vamos ter que vai contribuir com 5^2. Assim temos que se v_1, v_2, v_3, ..., v_n são os vértices e A_1, A_2, A_3, ..., A_n são os conjuntos de amigos de cada um, respectivamente, então

$\sum_{v\subset A_1} deg\ v + \sum_{v\subset A_2} deg\ v + \cdots + \sum_{v\subset A_n} deg\ v = \sum_{i=1}^{n} deg\ v_i^2$, pois cada vértice v_i vai somar o seu grau a própia quantidade de grrau de vezes, então ele vai contribuir com $deg\ v_i^2$. Porém, vimos que por $MQ \geq MA$ que $\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} deg\ v_i^2}{n}} \geq \frac{\sum_{i=1}^{n} deg\ v_i}{n} \rightarrow \sum_{i=1}^{n} deg\ v_i^2 \geq \frac{(\sum_{i=1}^{n} deg\ v_i)^2}{n}$, mas sabemos que $\sum_{i=1}^{n} deg\ v_i = 2k$ que é o dobro de arestas. Assim temos que $\sum_{i=1}^{n} deg\ v_i^2 \geq \frac{4k^2}{n}$, assim $\sum_{v\subset A_1} deg\ v + \sum_{v\subset A_2} deg\ v + \cdots + \sum_{v\subset A_n} deg\ v \geq \frac{4k^2}{n}$ e pelo princípio das casas dos pombos, existe algum vértice v tal que $\sum_{v\subset A} deg\ v \geq \frac{4k^2}{n^2}$, que era o que queriamos provar.

---

4 Contagem Dupla e exemplos

4.1 Problemas de contagem dupla com exemplos

Existem muitos problemas de contagem dupla que vai pedir para achar o mínimo ou o máximo de algo e quando você chegar na cota usando contagem dupla você não pode esquecer de mostrar o exemplo que aquilo vale. E para isso eu separei algumas questões onde você vai ter um pouco mais de imaginação para poder dar a construção que funciona.

4.1.1 Exemplos (Literalmente)

.....

Exemplo 1. *(OBM 2011)* Um álbum, composto por 2011 figurinhas, está sendo colecionado por 33 amigos. Uma distribuição de figurinhas entre os 33 amigos é incompleta quando existe pelo menos uma figurinha que nenhum dos 33 amigos tem. Determinar o menor valor de m com a seguinte propriedade: toda distribuição de figurinhas entre os 33 amigos tal que, para quaisquer dois dos amigos, faltam, para ambos, pelo menos m figurinhas em comum, é incompleta.

Solução. Inicialmente vamos tentar achar uma conjectura para m. Para isto, considere a seguinte tabela:

	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	...	f_{2009}	f_{2010}	f_{2011}
a_1			x				x		
a_2	x			x	x				x
a_3					x				
...									
a_{32}							x		
a_{33}		x	x						

Onde a_i é o amigo i e f_j é a figurinha j. Aqui vamos supor que m não funciona, ou seja,

que em toda coluna tem um x e vamos contar os pares de casas vazias entre as linhas. Então temos que:

Contando por Colunas: Temos 2011 colunas e cada coluna tem no máximo 32 marcações (pois estamos supondo que m é ruim e não satisfaz a nossacondição), logo temos no máximo $2011\binom{32}{2}$ pares de casas vazias.

Contando por Linhas: Temos 33 linhas e a cada par de linhas, há no mínimo m marcações vazias entre elas, logo temos no mínimo $m\binom{33}{2}$ pares.

Então $m\binom{33}{2} \leq 2011\binom{32}{2} \rightarrow m \cdot \frac{33 \cdot 32}{2} \leq \frac{2011 \cdot 32 \cdot 31}{2} \rightarrow m \leq \frac{2011 \cdot 31}{33} = 1889,1212...$, assim sabemos que m=1890 satisfaz o problema pois caso contrário teríamos $1890 \leq 1889$ que é falso (e de fato 1890 é a nossa solução), agora basta mostrar um exemplo do porque $m \leq 1889$ não funciona e para isso tome o seguinte exemplo:

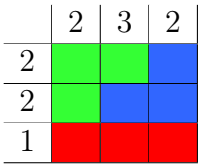
	f_1	...	f_{61}	f_{62}	...	$f_{2 \cdot 61}$	...	$f_{31 \cdot 61+1}$	...	$f_{32 \cdot 61}$	f_{1953}	...	f_{2011}
a_1	x	x	x										
a_2				x	x	x							
...													
a_{32}								x	x	x			
a_{33}											x	x	x

Note que como 2011-1889 = 2×61 então tentamos distribuir com que cada par fique com 61, daí cada amigo a_i ficou com as figurinhas de $f_{61(i-1)+1}$ até a f_{61i} para $1 \leq i \leq 32$, já o amigo 33 vai ficar com as 59 figurinhas de f_{1953} até a f_{2011} e perceba que é uma configuração não incompleta que usa pelo menos m casas vazias entre dois amigos, já que $m \leq 1889$. Assim nossa resposta é m=1890.

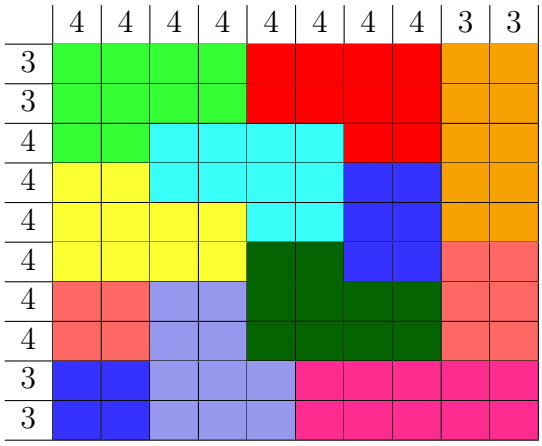
. . . . . .

Exemplo 2. *(OBM 2004)* Considere todas as maneiras de colocarmos nas casas de um tabuleiro 10×10 exatamente dez vezes cada um dos algarismos 0, 1, 2, . . . , 9. Encontre o maior inteiro n com a propriedade de que, em cada tabuleiro, alguma linha ou alguma coluna contenha pelo menos n algarismos diferentes.

Solução. Aqui vamos fazeruma contagem digamos, um pouco diferente, inicialmente vamos imaginar os 10 algarismos como se fosse 10 cores (é mais bonito de imaginar) e queremos fazer uma contagem linha e coluna (vamos imaginar linha e coluna como sendo uma coisa só). Assim, vamos ter 20 linhas/colunas pois é só numerar as linhas de 1 a 10 e as colunas de 11 a 20. Seja M o maior número de cores distintas que aparecem em alguma coluna ou em alguma linha, por exemplo, se o problema fosse um 3×3 e a quantidade de cores que aparecem nas 6 linhas/colunas é 2, 2, 1, 2, 3, 2 então M=3.



Assim, como temos 20 linhas/colunas e cada uma aparece no máximo M cores, então temos que a soma total da quantidade de cores nas linhas/colunas vai ser no máximo 20M. Agora vamos contar de outra maneira, vamos focar em uma cor só, qual é o número mínimo de linhas/colunas que ela aparece? A resposta vai ser 7. Pois vamos ver os seguintes casos: Se as 10 copias dessas cores estiver em uma linha, então vamos ter no total 11 ocupações de linhas/colunas, se as 10 copias dessa cor estiverem distribuidas ao longo de 2 linhas, como queremos minimizar a quantidade de colunas, é so colocar um bloco 2×5, logo vai ter no mínimo 7 ocupações de linhas/colunas, se estiver distribuído ao longo de 3 linhas, é só fazer a mesma coisa para minimizar, colocar três colunas de 3 cores e uma com 1 cor, totalizando 4 colunas e no mínimo 7 ocupações de linhas/colunas, com 5 linhas o mínimo é 7, com 6 linhas o mínimo é 8, com 7 linhas o mínimo é 9, com 8 linhas o mínimo é 10, com 9 linhas o mínimo é 11 e com 10 linhas o total é 11. Assim se começar com o tabuleiro vazio e ir adicionando cada cor de uma vez, a soma total de cores em cada linha/coluna vai aumentar no mínimo em 7, assim a soma total de cores de linhas/colunas é no mínimo 70, pois temos 10 cores. Mas já fizemos essa contagem antes e vimos que é no máximo 20M, assim $20M \geq 70 \rightarrow M \geq 4$, ou seja, isto significa que o maior valor entre as linhas é colunas é pelo menos 4, ou seja, em qualquer tabuleiro, existe alguma linha ou alguma coluna que contém pelo menos 4 algarismos diferentes, então n=4 satisfaz o nosso enunciado, e como que prova que ele é o maior? Como o enunciado pede que é pra qualquer tabuleiro, é só mostrar que existe um tabuleiro tal que cada linha e cada coluna possui no máximo 4 cores/dígitos distintos. A construção é bem intuitiva tentando sempre montar retângulos 2×5 e 3×4 como a seguir:



. . . . . .

Exemplo 3. Seja A um conjunto com 225 elementos. Sejam A_1, A_2, ...,

A_{11} subconjuntos de A tais que $|A_i| = 45$ e $|A_i \cap A_j| = 9$ para $1 \leq i < j \leq 11$. Prove que $|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{11}| \geq 165$ e dê um exemplo em que a igualdade ocorre.

Solução. Suponha que $|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{11}| = n$, então podemos supor que é dos números de 1 até n, sem perda de generalidade. Então imagine a seguinte tabela:

	1	2	3	4	5	...	n
A_1				x			x
A_2		x					
A_3	x						
...							
A_{11}	x		x		x		x

Fazendo a contagem dupla padrão de contar os pares de x entre as linhas, temos que:

Contando por Linhas: Temos 11 linhas e entre duas delas há 9 interseções, assim há no total $9\binom{11}{2}$ pares marcados entre as linhas.

Contando por Colunas: Temos n colunas, e se cada coluna i tem c_i marcações, então o total de pares é $\binom{c_1}{2} + \binom{c_2}{2} + \cdots + \binom{c_n}{2}$.

Então $\frac{9 \cdot 11 \cdot 10}{2} = 9\binom{11}{2} = \binom{c_1}{2} + \binom{c_2}{2} + \cdots + \binom{c_n}{2} = \frac{c_1^2 + c_2^2 + \cdots c_n^2}{2} - \frac{c_1 + c_2 + \cdots + c_n}{2}$, porém $c_1 + c_2 + \cdots + c_n = 45 \cdot 11$, assim $9 \cdot 11 \cdot 10 + 45 \cdot 11 = c_1^2 + c_2^2 + \cdots c_n^2$, e por $MQ \geq MA$ temos $\sqrt{\frac{c_1^2 + c_2^2 + \cdots c_n^2}{n}} \geq \frac{c_1 + c_2 + \cdots + c_n}{n} = \frac{45 \cdot 11}{n} \rightarrow c_1^2 + c_2^2 + \cdots c_n^2 \geq \frac{45^2 \cdot 11^2}{n}$. Deste modo, $9 \cdot 11 \cdot 10 + 45 \cdot 11 \geq \frac{45^2 \cdot 11^2}{n} \rightarrow n \geq \frac{45^2 \cdot 11^2}{9 \cdot 11 \cdot 10 + 45 \cdot 11} = \frac{45 \cdot 11}{2+1} = 15 \cdot 11 = 165$, assim $n \geq 165$, que era o que queríamos provar. Perceba que a igualdade ocorre quando $c_1 = c_2 = \cdots = c_{165}$ na $MQ \geq MA$, mas como $c_1 + c_2 + \cdots + c_{165} = 45 \cdot 11$, então temos que $c_i = 3 \; \forall 1 \leq i \leq 165$. Mas então, perceba que $\binom{11}{3} = 165$, então você começa a suspeitar que se fazer todas as combinações para as 165 colunas vai dar certo e dê fato funciona, uma vez que em cada linha vai aparecer $\binom{10}{2} = 45$ vezes, a interseção entre duas linhas vai ser $\binom{9}{1} = 9$, então de fato esse exemplo satisfaz o enunciado com igualdade.

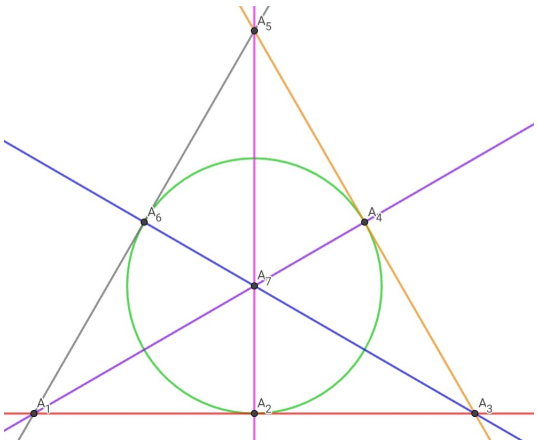
. . . . . .

4.2 Exemplos com planos projetivos

4.2.1 O plano de Fano

Muitas vezes encontrar exemplo é uma das coisas mais dificeis de se fazer, não é algo que já vem pré definido e as vezes é muito difícil de se encontrar. Porém, existem os planos projetivos, que nos ajudam a criar exemplos usando coisas que conhecemos como geometria projetiva, que assim como geometria projetiva, vamos apenas nos importar

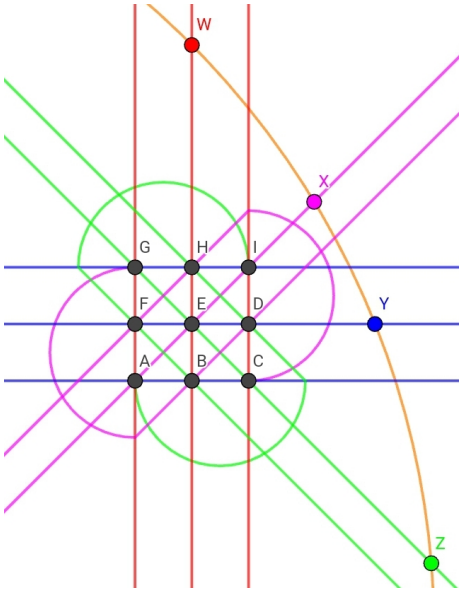
com as interseções. Para mostrar melhor como isso funciona, pense no seguinte problema: Você tem 3 figurinhas de 7 tipos cada, é possível distribuir elas entre 7 amigos de modo que cada amigo fique com 3 figurinhas e entre qualquer dois amigos, eles sempre tem exatamente uma figurinha do mesmo tipo em comum e para quaisquer dois tipos, existe um único amigo que possui ambas? A solução está na imagem a seguir:



Você consegue interpretar isso facilmente com uma tabela 7×7 mas vamos imaginar com linhas e pontos. Suponha que cada linha seja um tipo de figurinha e cada ponto é um amigo, isso é bom pois usando geometria, você sabe que para cada 2 pontos, existe uma única reta que passa por eles, que é o que a gente quer, mas também sabemos que quaisquer duas retas, existe um ponto de interseção entre elas (inclusive se forem paralelas, onde vamos chamar esse ponto do ponto do infinito dessas duas retas, mas vamos ver isso mais pra frente), ou seja, existe um único amigo que possui ambas, o que também é o que a gente quer. Então temos uma construção de modo que cada ponto (um amigo qualquer) sempre passem 3 retas (ou seja, 3 tipos distintos). E podemos interpretar com a seguinte tabela:

	A	B	C	D	E	F	G
A_1	x		x	x			
A_2	x				x		x
A_3	x	x				x	
A_4		x		x			x
A_5		x	x		x		
A_6			x			x	x
A_7				x	x	x	

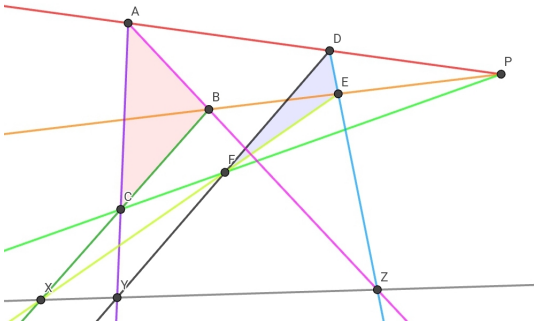
Onde A_i é o amigo i e A, B, C, D, E, F e G são os tipos das cartas. E ainda mais, dizemos que este plano de fano é um plano projetivo de ordem 2, em geral, o plano projetivo de ordem n tem n^2+n+1 pontos e esse mesmo número de retas, cada linha tem n+1 pontos e cada ponto passa por n+1 retas. Por exemplo, se n=1 você pode imaginar 3 retas e 3 pontos formando um triângulo. Mas para n=3 você pode tomar os $3^2+3+1 = 13$ pontos e 13 retas onde cada reta tem 4 pontos e cada ponto tem 4 retas:



Perceba que W é o ponto do infinito das retas (A, F, G), (B, E, H) e (C, D, I), ou seja, ele esta nas 3 retas (não parece mas é), assim como X é o ponto do infinito das retas (A, E, I), (G, B, D) e (C, H, F). E a reta laranja é a reta do infinito, a que passa os 4 pontos do infinito. Note que por cada ponto, passa 4 retas e cada reta tem 4 pontos, e isso pode ser traduzido na seguinte tabela:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	W	X	Y	Z
1	x	x	x									x	
2				x	x	x						x	
3							x	x	x			x	
4	x					x	x			x			
5		x			x			x		x			
6			x	x					x	x			
7		x		x			x				x		
8	x				x				x		x		
9			x			x		x			x		
10		x				x			x				x
11	x			x				x					x
12			x		x		x						x
13										x	x	x	x

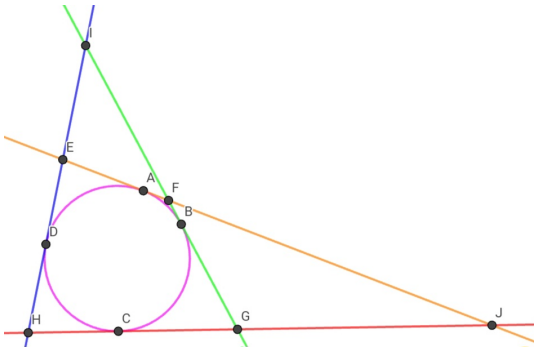
Onde cada coluna tem 4 marcações, cada linha tem 4 marcações e entre duas linhas ou duas colunas tem exatamente uma interseção. Aqui nós planos projetivos deixamos a imaginação fluir, esses dois geralmente são os mais comuns mas tem outros como a configuração de desargues que você tem 10 retas e 10 pontos, com cada reta tendo 3 pontos e cada ponto tendo 3 retas, e ainda dois triângulos em perspectivas como no teorema de desargues, mostrado na imagem abaixo:



Que também pode ser visualizado pela tabela a seguir:

	A	B	C	D	E	F	P	X	Y	Z
1	x			x			x			
2		x			x		x			
3			x			x	x			
4		x	x					x		
5					x	x		x		
6	x		x						x	
7				x		x			x	
8	x	x								x
9				x	x					x
10								x	x	x

Onde cada linha e cada coluna possuem 3 marcações, a interseção entre linhas é sempre uma (pois para cada duas retas, tem uma interseção) e temos 10 linhas e 10 colunas, porém note que nem para quaisquer dois pontos tem uma reta, ou seja, existem duas colunas que não possuem interseção. Em geral, é muito comum usar planos projetivos quando você quer algo regular, mas nem sempre você precisa que seja um tabuleiro $n \times n$, pode ser um 5×10 por exemplo:



Cujo tabuleiro vai ser do tipo:

Aqui temos 10 colunas e 5 linhas tal que cada linha tem 4 marcações, cada coluna tem 2 marcações e entre duas linhas há exatamente uma única interseção. Planos projetivos é deixar a imaginação fluir, muitas configurações vão ser parecidos com figuras vistas em geometria projetiva, como o último que foi um quadrilátero completo ou o outro que é a

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	x	x	x	x						
2	x				x	x				x
3			x				x	x		x
4		x				x	x		x	
5				x	x			x	x	

configuração do teorema de desargues, mas isto não impede de você criar o próprio plano para te ajudar a construir exemplo nas questões.

Uma observação importante é que as vezes nem sempre existe um plano projetivo de ordem n de duas dimensões, mas se n=p for primo então você sempre consegue construir as $p^2 + p + 1$ retas/pontos, cada um contendo p+1 pontos ou p+1 retas e a interseção entre dois deles é sempre uma tudo bonitinho, isso tem um pouco haver porque o grupo $\mathbb{Z}_p/\mathbb{Z}$ dos restos no módulo p é um corpo e coisas com teoria de geometria finita, mas esse não é nosso foco neste material mas é legal saber que você sempre consegue garantir essa construção com dualidade, unicidade das intersecções e tudo mais.

---

5 Problemas

. . . . . .

- **Problema 1.** Prove, usando contagem dupla, que:
  i) $d(1) + d(2) + \cdots + d(n) = \lfloor \frac{n}{1} \rfloor + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \cdots + \lfloor \frac{n}{n} \rfloor$;
  ii) $\sigma(1) + \sigma(2) + \cdots + \sigma(n) = 1\lfloor \frac{n}{1} \rfloor + 2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \cdots + n\lfloor \frac{n}{n} \rfloor$.
  Onde $d(n)$ é a quantidade de divisores de n e $\sigma(n)$ é a soma dos divisores de n.

  . . . . . .

- **Problema 2.** *(IMO Shortlist 2004)* Há 10001 estudantes em uma universidade. Alguns alunos se juntam para formar vários clubes (um aluno pode pertencer a diferentes clubes). Alguns clubes se unem para formar várias sociedades (um clube pode pertencer a diferentes sociedades). Há um total de k sociedades. Suponha que as seguintes condições sejam válidas:
  i.) Cada par de alunos está em exatamente um clube.

ii.) Para cada aluno e cada sociedade, o aluno está em exatamente um clube da sociedade.

iii.) Cada clube tem um número ímpar de alunos. Além disso, um clube com $2m + 1$ alunos (m é um inteiro positivo) está em exatamente m sociedades.

Encontre todos os valores possíveis de k.

. . . . . .

- **Problema 3.** *(IMO Shortlist 2012)* Num tabuleiro 999×999, algumas casas são brancas e as restantes são vermelhas. Seja T o número de triplas (C_1, C_2, C_3) de casas, onde C_1, C_2 estão na mesma linha, C_2, C_3 estão na mesma coluna, C_1, C_3 são brancas e C_2 é vermelha. Determine o maior valor possível que T pode atingir.

. . . . . .

- **Problema 4.** Um triângulo é um conjunto de três vértices ligados dois a dois. Prove que um grafo com m arestas e n vértices tem pelo menos $\frac{4m(m-\frac{n^2}{4})}{3n}$ triângulos.

. . . . . .

- **Problema 5.** *(IMO 1989)* São dados n e k inteiros positivos e um conjunto S de n pontos no plano tais que não há três pontos em S colineares, e que para qualquer ponto P de S existem pelo menos k pontos de S equidistantes de P. Prove que $k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$.

. . . . . .

- **Problema 6.** *(BMO 1985)* Em um encontro internacional, 1985 pessoas estiveram presentes. Em cada subconjunto de três participantes, existem no mínimo 2 pessoas que falam a mesma língua. Se cada pessoa fala no máximo 5 línguas, prove que no mínimo 200 pessoas falam uma mesma língua.

. . . . . .

- **Problema 7.** *(Iran 2010)* Uma escola tem n alunos e algumas superaulas são oferecidas para eles. Cada aluno pode participar de quantas aulas quiser. Cada classe tem pelo menos dois alunos participando dela. Sabemos que se duas turmas diferentes tiverem pelo menos dois alunos em comum, então o número de alunos na primeira dessas duas turmas é diferente do número de alunos na segunda. Prove que o número de classes não é maior que $(n-1)^2$.

. . . . . .

- **Problema 8.** *(USA TST 2005)* Seja n um inteiro maior que 1. Para um inteiro positivo m, seja $S_m = \{1, 2, \ldots, mn\}$. Suponha que exista um conjunto T com $2n$ elementos tal que
(a) Cada elemento de T é um subconjunto de m elementos de S_m;
(b) Cada par de elementos de T compartilha no máximo um elemento comum;
(c) Cada elemento de S_m está contido em exatamente dois elementos de T.
Determine o valor máximo possível de m em termos de n.

. . . . . .

- **Problema 9.** *(OBM 2002)* Arnaldo e Beatriz se comunicam durante um acampamento usando sinais de fumaça, às vezes usando uma nuvem grande, às vezes uma pequena. No tempo disponível antes do café da manhã, Arnaldo consegue enviar uma sequência de 24 nuvens. Como Beatriz nem sempre consegue distinguir uma nuvem pequena de uma grande, ela e Arnaldo fizeram um dicionário antes de ir para o acampamento. No dicionário aparecem N sequências de 24 tamanhos de nuvem (como por exemplo a sequência PGPGPGPGPGPGGPGPGPGPGPGP, onde G significa nuvem grande e P significa nuvem pequena). Para cada uma das N sequências, o dicionário indica seu significado. Para evitar interpretações erradas, Arnaldo e Beatriz evitaram incluir no dicionário sequências parecidas. Mais precisamente, duas sequências no dicionário

sempre diferem em pelo menos 8 das 24 posições. Demonstre que N $<$ 4096.

. . . . . .

- **Problema 10.** *(China 1993)* 10 estudantes compraram alguns livros em uma livraria. Sabe-se que cada aluno comprou exatamente três tipos de livros, e quaisquer dois deles compartilharam pelo menos um tipo de livro em comum. Determine, com provas, qual o número mínimo de alunos que compraram o livro mais popular? (Nota: o livro mais popular significa que a maioria dos alunos comprou esse tipo de livro)

. . . . . .

- **Problema 11.** *(IMO 1998)* Numa competição, existem a concorrentes e b juízes, em que $b \geq 3$ é um inteiro ímpar. Cada juiz avalia cada um dos concorrentes, classificando-o como "aprovado" ou "reprovado". Suponha que k é um número tal que as classificações dadas por dois juízes quaisquer coincidem no máximo para k concorrentes. Prove que: $\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}$.

. . . . . .

- **Problema 12.** *(CIIM 2020)* Sejam (m, r, s, t) inteiros positivos tais que $m \geq s+1$ e $r \geq t$. Considere os m conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_m$ com elementos r cada um. Suponha que, para cada $1 \leq i \leq m$, existam pelo menos t elementos de A_i, tal que cada um (elemento) pertença a (pelo menos) s conjuntos A_j onde $j \neq i$. Determine a maior quantidade de elementos no seguinte conjunto $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cdots \cup A_m$.

. . . . . .

- **Problema 13.** *(Ibero 1996)* Temos uma grade de linhas $k^2 - k + 1$ e colunas $k^2 - k + 1$, onde $k = p + 1$ e p é primo. Para cada primo p, forneça um método para colocar os números 0 e 1, um número para cada quadrado na grade, de modo que em cada linha haja exatamente k números 0's, em cada coluna haja exatamente k números 0's e não

haja retângulo com lados paralelos aos lados da grade com 0's em cada quatro vértices.

. . . . . .