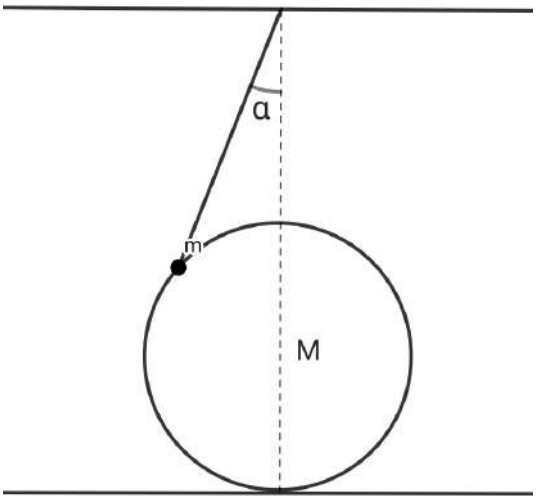
Soluções Simulado OBF - Fase 3 Nível 1

Autores: Felipe Brandão, Arthur Gomes

Questão 1. Uma esfera de massa M é mantida em repouso sobre um piso horizontal. Uma extremidade de um fio leve é fixada em um ponto verticalmente acima do centro da esfera. A outra extremidade do fio está conectada a uma pequena partícula de massa m que repousa sobre a esfera. A corda faz um ângulo $\alpha = 30°$ com a vertical.

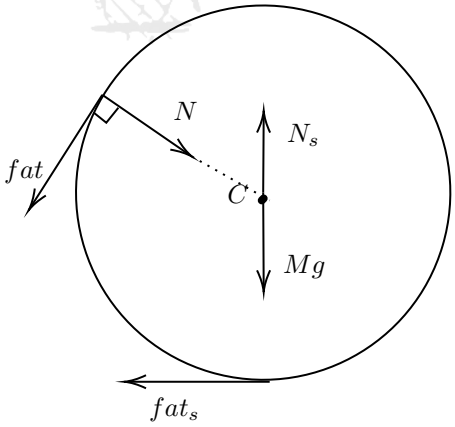


a) Qual deve ser a razão entre as forças de atrito da partícula com a esfera e da esfera com o solo para garantir o equilíbrio estático do sistema?

b) Agora, considerando que não há mais atrito em nenhum lugar, encontre a aceleração da esfera imediatamente após ela ser solta. A gravidade local vale g.

Solução:

a) Vejamos o diagrama das forças atuando na esfera:



Para a condição de equilíbrio estático do sistema, podemos fazer o torque no ponto C:

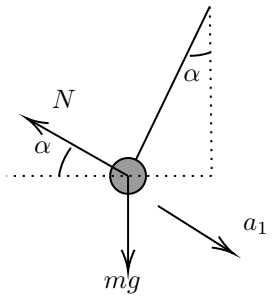
$$\vec{\tau}_{sist} = \vec{\tau}_{Mg} + \vec{\tau}_N + \vec{\tau}_{N_s} + \vec{\tau}_{fat} + \vec{\tau}_{fat_s}$$

Dessa equação, o torque das normais e do peso são nulos, pois as forças em questão formam ângulo zero com o braço. Assim, resta o torque das forças de atrito, que em módulo devem ser

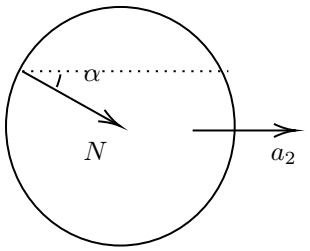
iguais. Como o braço de ambos os torques são iguais ao raio da esfera, resta que as forças de atrito devem ser iguais em módulo. Assim:

$$\boxed{\eta = \frac{fat}{fat_s} = 1}$$

b) Diagrama de forças em cada corpo:



$(Particula)$



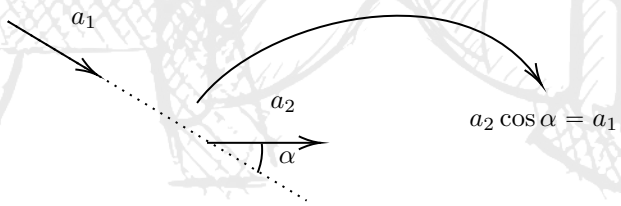
$(Esfera)$

Escrevendo a equação do movimento dos objetos:

$$mg \operatorname{sen} \alpha - N = ma_1$$

$$N \cos \alpha = Ma_2$$

Na direção da normal, imediatamente após o início do movimento, a componente da aceleração a_2 naquela direção é igual a a_1:



Resolvendo o sistema de equações para a_2:

$$a_2 = \frac{mg \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{M + m \cos^2 \alpha}$$

Finalmente, para $\alpha = 30°$:

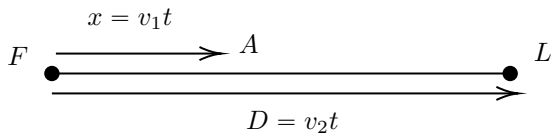
$$\boxed{a_2 = \frac{\sqrt{3}mg}{4M + 3m}}$$

Questão 02. Maciel Tadeu, um astuto estudante de física, decidiu analisar 2 situações possíveis para sua viagem à Lavras da Mangabeira. Inicialmente, sabe-se que uma rodovia reta separa Fortaleza, sua cidade natal, e Lavras, e que a distância entre as duas localidades vale D. A uma distância X de Fortaleza, existe uma cidade chamada Alto Santo, localizada entre as duas cidades. Um automóvel (velocidade média v_1) e um trem (velocidade média v_2) partem simultaneamente de Fortaleza com destino a Lavras. No mesmo instante em que o automóvel passa por Alto Santo, o trem atinge Lavras. Em outro momento, ambos os veículos partem simultaneamente de Lavras com destino a Fortaleza. O trem atinge Fortaleza com antecedência σ em relação ao instante em que o carro passa por Alto Santo. Determine, em função dos outros parâmetros fornecidos:

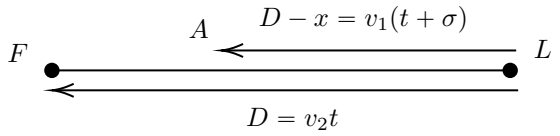
a) O valor da velocidade média do trem v_2.
b) O valor da distância X entre Fortaleza e Alto Santo.

Solução:

Analisando primeiro o percurço Fortaleza-Lavras:



Agora, o percurço Lavras-Fortaleza:



Temos então as seguintes equações:

$$x = v_1 t \ , \ D = v_2 t \text{ e } D - x = v_1(t + \sigma)$$

Resolvendo para t em função de v_1, D e de σ:

$$t = \frac{D - v_1\sigma}{2v_1}$$

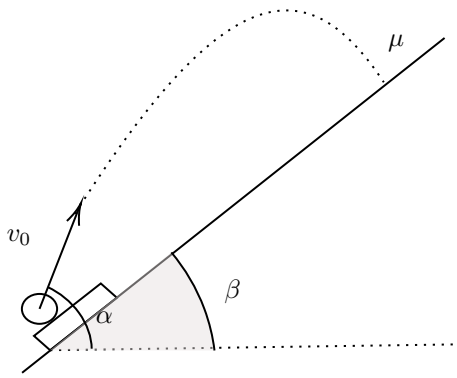
Assim, visto que $v_2 = \frac{D}{t}$ e $x = v_1 t$:

$$\boxed{v_2 = \frac{2v_1 D}{D - v_1\sigma}}$$

e

$$\boxed{x = \frac{D - v_1\sigma}{2}}$$

Questão 03. Um bloco é lançado ladeira acima sobre a superfície de um plano inclinado de um ângulo β com coeficiente de atrito μ e uma bola é lançada, simultaneamente, sob um ângulo α (β e α medidos em relação à horizontal). Os objetos saem do mesmo local, como mostra a figura.



Determine α em função de β e μ para que a bola caia sobre o bloco no instante em que o mesmo atinge a máxima altura no plano.

Solução:

Inicialmente, vamos considerar que o atrito é suficientemente grande de tal forma que o tempo de subida do bloco até seu ponto de altura máxima é igual ao tempo de descida desse mesmo ponto até o ponto inicial. Para evitar muito desenvolvimento matemático desnecessário, podemos escrever as equações cinemáticas de cada corpo na forma vetorial:

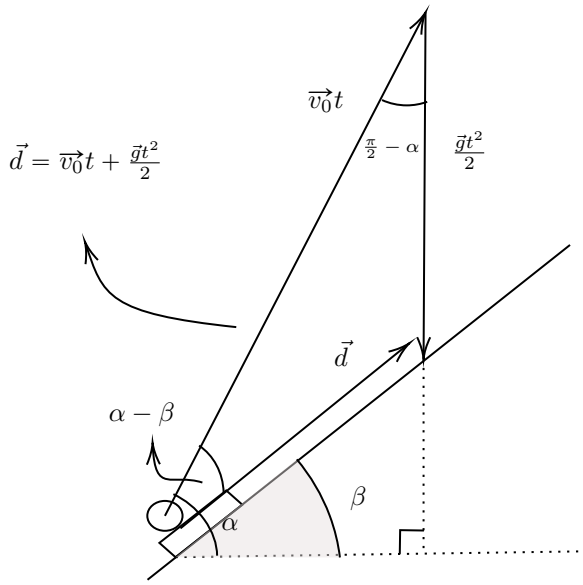
$$\vec{d} = \vec{v_0}t + \frac{\vec{g}t^2}{2}$$

$$\vec{d} = \vec{v_i}t - \frac{\vec{a_s}t^2}{2}$$

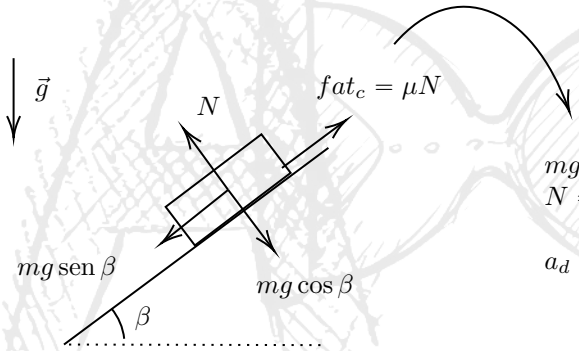
onde v_i é a velocidade inicial do bloco, a_s éa aceleração do bloco na subida, t o tempo de movimento e $\vec{d}$ o vetor deslocamento dos corpos (note que, como a questão enunciou, o deslocamento das duas é o mesmo). Note que, fazendo a equação do movimento do bloco para caso ele descesse o plano, não haveria o termo velocidade inicial (parte do repouso), ficando assim:

$$\vec{d} = \frac{\vec{a_d}t^2}{2}$$

onde a_d é a aceleração do bloco na descida e o tempo é o mesmo da subida, como explicado anteriormente. Visto o caráter vetorial das equações, podemos fazer uma construção geométrica da situação:



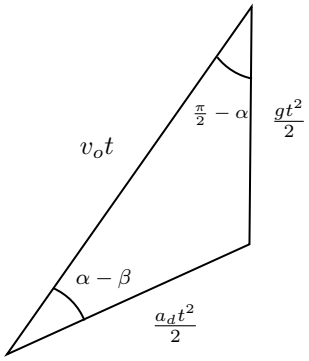
Para calcular o deslocamento d, precisamos calcular a aceleração do bloco na sua descida; fazendo equação do movimento:



$$mg \operatorname{sen} \beta - \mu N = ma_d$$
$$N = mg \cos \beta$$

$$a_d = g(\operatorname{sen} \beta - \mu \cos \beta)$$

Assim, a partir da construção geométrica feita anteriormente, podemos aplicar uma lei dos senos:



$$\frac{\frac{gt^2}{2}}{\operatorname{sen}(\alpha-\beta)} = \frac{\frac{a_d t^2}{2}}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)} \Longrightarrow \frac{g}{\operatorname{sen}(\alpha-\beta)} = \frac{a_d}{\cos \alpha}$$

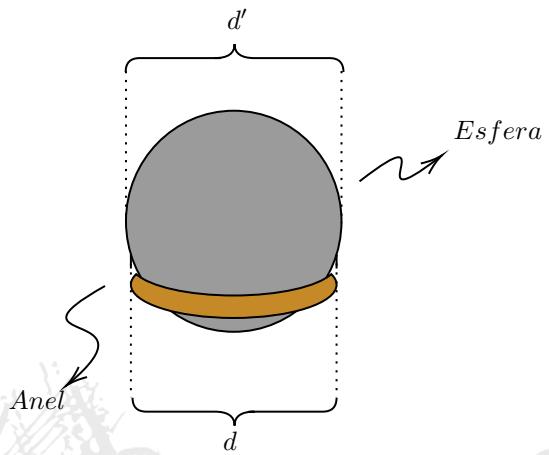
substituindo o a_d, temos:

$$\frac{1}{\operatorname{sen}(\alpha - \beta)} = \frac{\operatorname{sen} \beta - \mu \cos \beta}{\cos \alpha}$$

utilizando a identidade trigonométrica $\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta - \cos \alpha \operatorname{sen} \beta$ e resolvendo para α, temos, finalmente:

$$\boxed{\tan\alpha = \tan\beta + \frac{1}{\cos\beta(\operatorname{sen}\beta - \mu\cos\beta)}}$$

Questão 04. Um anel de cobre de $m = 20g$ tem um diâmetro $d = 1cm$ à temperatura $T_0 = 0°C$, como mostra a figura. Uma esfera de alumínio tem diâmetro $d' = 1,002cm$ a $T_f = 100°C$. A esfera passa pelo anel, exatamente quando o equilíbrio térmico é atingido.



Calcule a massa da esfera, sabendo-se que o coeficiente de dilatação linear do cobre é $\alpha_c = 17.10^{-6}°C^{-1}$, o calor específico do cobre é $c_c = 0,0923cal/g.°C$, o coeficiente de dilatação linear do alumínio é $\alpha_a = 23.10^{-6}°C^{-1}$ e o calor espcífico do alumínio é $c_a = 0,22cal/g.C^{-1}$.

Solução:

Vamos inicialmente determinar a temperatura de equilíbrio térmico igualando os diâmetros finais da esfera e do anel:

$$d_{fesfera} = d_{fanel} \implies d'(1 + \alpha_a\Delta T_a) = d(1 + \alpha_c\Delta T_c)$$

$$1,002 + 1,002 \times 23 \times 10^{-6} \times (\theta - 100) = 1 + 1 \times 17 \times 10^{-6} \times \theta$$

$$6,046 \times 10^{-6} \times \theta = 23,046 \times 10^{-4} - 20,0 \times 10^{-4}$$

$$\theta = \frac{3,046 \times 10^{-4}}{6,046 \times 10^{-6}} = 50,4$$

agora, a partir da equação do equilíbrio térmico do sistema, temos:

$$Q_{anel} + Q_{esfera} = 0 \implies mc_c\Delta T_c + Mc_a\Delta T_a = 0$$

$$20 \times 0,0923 \times (\theta - 0) + M \times 0,22 \times (\theta - 100) = 0$$

$$20 \times 0,0923 \times 50,4 + M \times 0,22 \times (50,4 - 100) = 0$$

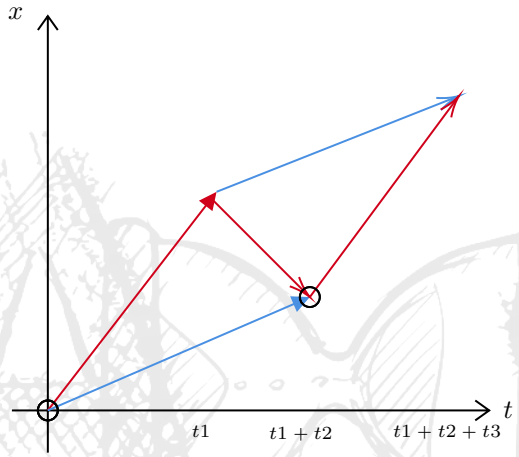
fazendo as contas, encontramos:

$$\boxed{M = 8,5g}$$

Questão 05. Três turistas, que possuem uma bicicleta, devem chegar ao centro turístico no menor espaço de tempo (o tempo conta-se até que o último turista chegue ao centro). A bicicleta pode transportar apenas duas pessoas e, por isso, o terceiro turista deve ir a pé. Um ciclista leva o segundo turista até um determinado ponto do caminha, de onde este continua a andar a pé e o ciclista regressa para transportar o terceiro. Encontrar a velocidade média dos turistas, sabendo que a velocidade do que vai a pé é $v_1 = 4km/h$ e a do ciclista é $v_2 = 20km/h$

Solução:

Inicialmente, o primeiro turista anda de bicicleta junto do segundo turista enquanto o terceiro caminha até o destino. Após um tempo t_1, o primeiro turista deixa o segundo turista, que passa a caminhar até o destino, e volta para buscar o terceiro turista. Passados t_2 segundos após esse evento, o primeiro turista e o segundo turista se encontram e passam a pedalar juntos até o destino. Finalmente, passados t_3 segundos desse encontro, todos os três turistas se encontram no destino.



Azul → 4 km/h Vermelho → 20 km/h

A distância percorrida em t_1 segundos pelo ciclista é $20t_1$ km e pelo terceiro turista é $4t_1$ km. Porém, o ciclista volta e pedala até se encontrar com o terceiro turista. Como eles se encontram em $(t_1 + t_2)$ segundos, a posição deles é a mesma nesse instante. Logo $4(t_1 + t_2) = 20t_1 - 20t_2$, onde o menos vem do fato do ciclista voltar no seu caminho. Ou seja $2t_1 = 3t_2$. Os três turistas se encontram e chegam ao destino em $t_1 + t_2 + t_3$, portanto suas posições são as mesmas. A posição do segundo turista é $20t_1$ (pois andou de bicicleta nesse período) $+ 4(t_2 + t_3)$. Enquanto a posição do terceiro turista, cuja equação é a mesma da posição do ciclista) é $4(t_1 + t_2) + 20t_3$. Logo:

$$20t_1 + 4t_2 + 4t_3 = 4t_1 + 4t_3 + 20t_3$$
$$t_1 = t_3$$

Finalmente, já que sabemos a posição final e o tempo decorrido, podemos descobrir a velocidade média:

$$V_m = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{20t_1 + 4(\frac{2}{3}t_1) + 4t1}{t_1 + \frac{2}{3}t_1 + t_1} = \frac{\frac{80}{3}}{\frac{8}{3}} = 10\frac{km}{h}$$

Questão 06. Uma barra de secção transversal constante de $1cm^2$ de área tem $15cm$ de comprimento, dos quais $5cm$ são de alumínio e $10cm$ são de cobre. A extremidade de alumínio está em contato com um reservatório térmico a $100°C$, e a de cobre com outro, a $0°C$. A condutividade térmica do alumínio é $0,48cal/s.cm.°C$ e a do cobre é $0,92cal/s.cm.°C$. O calor latente de fusão do

gelo é $80cal/g$.
a) Qual é a temperatura da barra na junção entre o alumínio e o cobre?

b) Se o reservatório térmico a $0°C$ é uma mistura de água com gelo fundente, qual é a massa de gelo que se derrete por hora?

Solução:

a) O fluxo de calor deve ser o mesmo ao longo da barra, portanto igual tanto na porção de alumínio quanto na porção de cobre. Logo:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \phi = \frac{k_{Al}A(100-T)}{l_{Al}} = \frac{k_{Cu}A(T-0)}{l_{Cu}}$$

Veja que o termo A é cancelado. Substituindo pelos valores numéricos dados no exercício podemos encontrar a temperatura T na junção:

$$\frac{0.48(100-T)}{5} = \frac{0.92T}{10}$$

$$96 - 0.96T = 0.92T$$

$$T = 51°C$$

b)Utilizando os dados do alumínio, podemos calcular o fluxo:

$$\phi = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{0.48 \times 1 \times (100-51)}{5} = 4.704cal$$

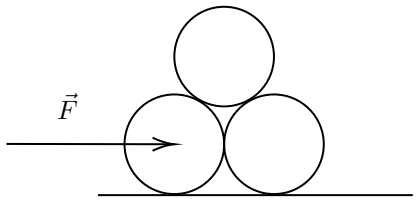
Portanto, o calor fornecido em uma hora é:

$$\Delta Q = \phi \Delta t = 4.704\frac{cal}{s} \times 3600s = 16934.4cal$$

A massa de gelo que é derretida por hora é:

$$m_g = \frac{\Delta Q}{L} = 211.5g$$

Questão 07. Num certo experimento, três cilindros idênticos encontram-se em contato pleno entre si, apoiados sobre uma mesa e sob a ação de uma força horizontal F, constante, aplicada na altura do centro de massa do cilindro da esquerda, perpendicularmente ao seu eixo, conforme a figura.



Desconsiderando qualquer tipo de atrito, para que os três cilindros permaneçam em contato entre si, a aceleração a provocada pela força deve estar em qual intervalo de valores?

Solução:

Esperamos, intuitivamente, que ao aplicarmos uma força muito alta o cilindro de cima ira rolar para trás e se aplicarmos uma força insuficiente a estrutura irá se desfazer com o cilindro de cima descendo entre os dois debaixo. Portanto, a aceleração mínima se dará quando o cilindro de cima

estiver na iminência de descer por entre os cilindros debaixo fazendo com que estes se desprendam; ou seja, normal entre cilindros debaixo será nula. Analogamente, a aceleração máxima se dará quando o cilindro estiver na iminência de rolar para trás e perder contato com o cilindro da direita; ou seja, normal entre o cilindro de cima e o da direita será nula. Agora basta fazer as contas.

Seja N_1 a normal entre os dois cilindros de baixo, N_2 a normal entre o cilindro esquerdo e o de cima, e N_3 a normal entre o cilindro direito e o de cima. O nosso caso máximo, é quando $N_3 = 0$, porque nessa situação, o cilindro de baixo da direita estará na iminência de perder contato com o cilindro de cima. Então podemos escrever as equações de forças para x e y para o cilindro de cima:

$$ma_x = N_2 \cos 60 = ma$$
$$ma_y = N_2 \operatorname{sen} 60 - mg = 0$$

Resolvendo essas duas equações para a, podemos encontrar:

$$a = \frac{g}{\sqrt{3}}$$

Esse é o valor máximo da aceleração que podemos aplicar para que os três cilindros permaneçam em contato entre si.

No caso mínimo, teremos que o cilindro de cima estará na imininência de cair no chão entre os dois cilindros, logo, teremos que $N_1 = 0$.

Podemos escrever então, para o cilindro da direita:

$$N_3 \cos 60 = ma$$

E as acelerações em x e y do cilindro do topo:

$$ma_x = N_2 \cos 60 - N_3 \cos 60 = ma$$
$$ma_y = N_2 \operatorname{sen} 60 + N_3 \operatorname{sen} 60 - mg = 0$$

Resolvendo essas três equações para a, encontramos que:

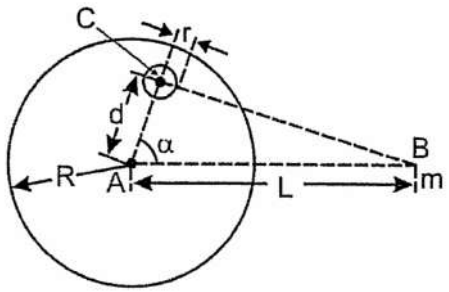
$$a = \frac{g}{3\sqrt{3}}$$

Que é o valor mínimo da aceleração que pode ser aplicada para a condição ser satisfeita. Ou seja, o intervalo de valores está entre o valor máximo e mínimo das acelerações calculadas acima.

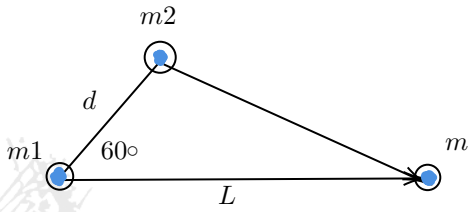
Questão 08. Uma bola do chumbo de raio $R = 50cm$ tem, dentro de si, uma cavidade esférica de raio $r = 5cm$, cujo centro encontra-se à distância $d = 40cm$ do centro da bola. Com que força a bola atrairá um ponto material de massa $m = 10g$, que se encontra a uma distância $L = 80cm$ do centro da bola, se a linha que une o centro da bola e da cavidade forma um ângulo $\alpha = 60°$ com a linha que une o centro da bola com o ponto material?

Solução:

Podemos representar a cavidade esférica na bola de chumbo como a superposição (junção) de uma massa M, positiva, e uma massa -M, negativa. Como podemos ver, a "soma lìquida"de massas na cavidade continua sendo nula, garantindo a validez da superposição. Portanto, po-



demos substituir a bola de chumbo por 2 esferas completas de massa $m1 = M_{tot}$ e $m2 = -M$. Sabemos também que uma esfera provoca o mesmo campo (gravidade) de uma massa pontual para distâncias maiores ou iguais ao seu raio. Logo, podemos representar o sistema de tal modo:



Podemos relacionar M com M_{tot} através da sua densidade $= \rho =$ constante.

$$\rho = \frac{M_{tot}}{\frac{4\pi R^3}{3}} = \frac{M}{\frac{4\pi r^3}{3}}$$

$$\frac{M_{tot}}{1000} = M$$

A força gravitacional de interação provocada por duas massas pontuais é $\vec{F} = -\frac{GM_{12}}{r^2}$, onde G é a constante gravitacional e r é a distância entre as duas massas. A distância entre M_{tot} e m é L e a distância entre $-M$ e m é descoberta através da lei dos cossenos:

$$r_{Mm} = \sqrt{L^2 + d^2 - 2Ld\cos 60} = 40\sqrt{3}cm$$

A força de atração sentida por m é a soma das componentes radiais (que ligam a massa m ao centro da bola) das forças gravitacionais. Ou seja, é a soma da força entre M_{tot} e m e da força entre -M e m vezes o cosseno do ângulo entre $\vec{r}_{Mm}$ e $\vec{L}$. O cosseno do ângulo entre r e L é dado por:

$$\cos\theta = \frac{L - d\cos 60}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Podemos, então calcular a força de atração:

$$\vec{F}_{atr} = \frac{GM_{tot}m}{L^2} + \frac{G(-M)m}{r_{Mm}^2}\cos\theta$$

$$F_{atr} = \frac{(6.67430 \times 10^{-11}) \times (10 \times 10^{-3}) \times (10 \times 10^{-3})}{(80 \times 10^{-2})^2} +$$
$$\frac{(6.67430 \times 10^{-11}) \times (10 \times 10^{-3}) \times (\frac{10}{1000} \times 10^{-3})}{(40 \times \sqrt{3})^2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$F_{atr} = 1 \times 10^{-14} N$$

Como podemos ver, a força é extremamente baixa e é portanto que nós mesmos não, de fato, notamos que estamos atraindo ou sendo atraídos por tudo ao nosso redor.