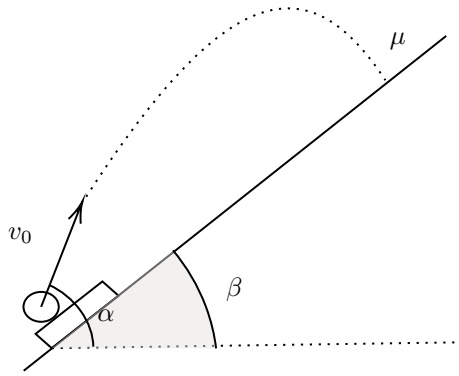
Soluções Simulado OBF - Fase 3 Nível 2

Autores: Mychel Segrini e Inácio Sampaio

1. (Exclusiva para alunos do 1o ano) Um bloco é lançado ladeira acima sobre a superfície de um plano inclinado de um ângulo β com coeficiente de atrito μ e uma bola é lançada, simultaneamente, sob um ângulo α (β e α medidos em relação à horizontal). Os objetos saem do mesmo local, como mostra a figura.



Determine α em função de β e μ para que a bola caia sobre o bloco no instante em que o mesmo atinge a máxima altura no plano.

Solução:

Inicialmente, vamos considerar que o atrito é suficientemente grande de tal forma que o tempo de subida do bloco até seu ponto de altura máxima é iguall ao tempo de descida desse mesmo ponto até o ponto inicial. Para evitar muito desenvolvimento matemático desnecessário, podemos escrever as equações cinemáticas de cada corpo na forma vetorial:

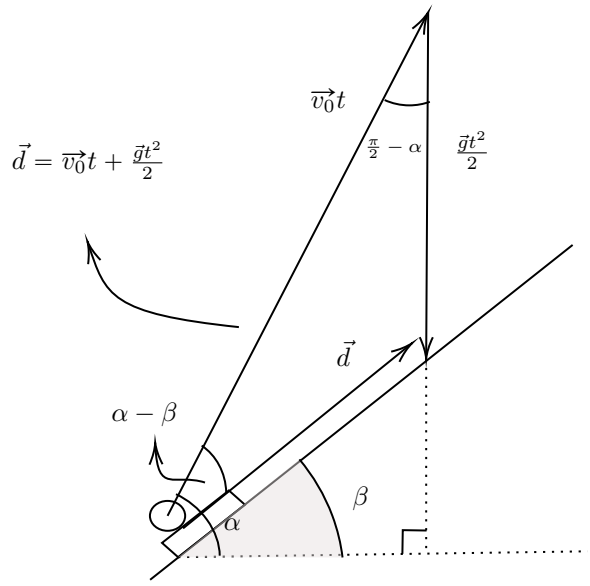
$$\vec{d} = \vec{v_0}t + \frac{\vec{g}t^2}{2}$$

$$\vec{d} = \vec{v_i}t - \frac{\vec{a_s}t^2}{2}$$

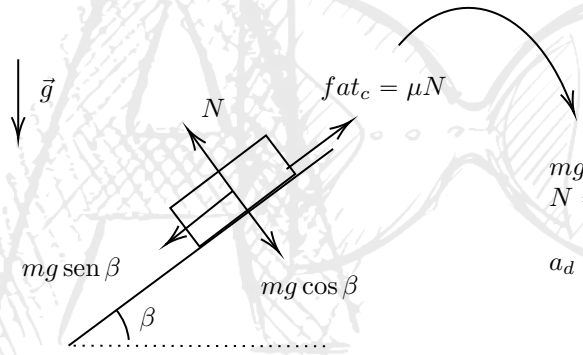
onde v_i é a velocidade inicial do bloco, a_s éa aceleração do bloco na subida, t o tempo de movimento e $\vec{d}$ o vetor deslocamento dos corpos (note que, como a questão enunciou, o deslocamento das duas é o mesmo). Note que, fazendo a equação do movimento do bloco para caso ele descesse o plano, não haveria o termo velocidade inicial (parte do repouso), ficando assim:

$$\vec{d} = \frac{\vec{a_d}t^2}{2}$$

onde a_sd é a aceleração do bloco na descida e o tempo é o mesmo da subida, como explicado anteriormente. Visto o caráter vetorial das equações, podemos fazer uma construção geométrica da situação:



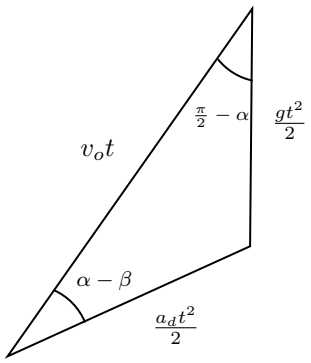
Para calcular o deslocamento d, precisamos calcular a aceleração do bloco na sua descida; fazendo equação do movimento:



$$mg \operatorname{sen} \beta - \mu N = ma_d$$
$$N = mg \cos \beta$$

$$a_d = g(\operatorname{sen} \beta - \mu \cos \beta)$$

Assim, a partir da construção geométrica feita anteriormente, podemos aplicar uma lei dos senos:



$$\frac{\frac{gt^2}{2}}{\operatorname{sen}(\alpha-\beta)} = \frac{\frac{a_d t^2}{2}}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)} \Longrightarrow \frac{g}{\operatorname{sen}(\alpha-\beta)} = \frac{a_d}{\cos \alpha}$$

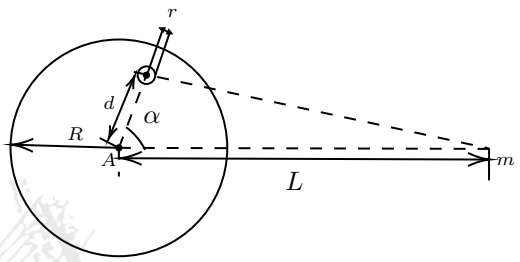
substituindo o a_d, temos:

$$\frac{1}{\operatorname{sen}(\alpha - \beta)} = \frac{\operatorname{sen} \beta - \mu \cos \beta}{\cos \alpha}$$

utilizando a identidade trigonométrica $\text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen}\,\alpha\cos\beta - \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta$ e resolvendo para α, temos, finalmente:

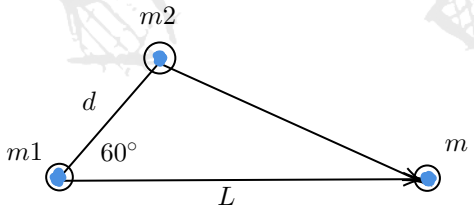
$$\boxed{\tan\alpha = \tan\beta + \frac{1}{\cos\beta(\text{sen}\,\beta - \mu\cos\beta)}}$$

2. (Exclusiva para alunos do 1o ano) Uma bola do chumbo de raio $R = 50cm$ tem, dentro de si, uma cavidade esférica de raio $r = 5cm$, cujo centro encontra-se à distância $d = 40cm$ do centro da bola. Com que força a bola atrairá um ponto material de massa $m = 10g$, que se encontra a uma distância $L = 80cm$ do centro da bola, se a linha que une o centro da bola e da cavidade forma um ângulo $\alpha = 60°$ com a linha que une o centro da bola com o ponto material?



Solução:

Podemos representar a cavidade esférica na bola de chumbo como a superposição (junção) de uma massa M, positiva, e uma massa -M, negativa. Como podemos ver, a "soma lìquida"de massas na cavidade continua sendo nula, garantindo a validez da superposição. Portanto, podemos substituir a bola de chumbo por 2 esferas completas de massa $m1 = M_{tot}$ e $m2 = -M$. Sabemos também que uma esfera provoca o mesmo campo (gravidade) de uma massa pontual para distâncias maiores ou iguais ao seu raio. Logo, podemos representar o sistema de tal modo:



Podemos relacionar M com M_{tot} através da sua densidade $= \rho =$ constante.

$$\rho = \frac{M_{tot}}{\frac{4\pi R^3}{3}} = \frac{M}{\frac{4\pi r^3}{3}}$$

$$\frac{M_{tot}}{1000} = M$$

A força gravitacional de interação provocada por duas massas pontuais é $\vec{F} = -\frac{GM_{12}}{r^2}$, onde G é a constante gravitacional e r é a distância entre as duas massas. A distância entre M_{tot} e m é L e a distância entre $-M$ e m é descoberta através da lei dos cossenos:

$$r_{Mm} = \sqrt{L^2 + d^2 - 2Ld\cos 60} = 40\sqrt{3}cm$$

A força de atração sentida por m é a soma das componentes radiais (que ligam a massa m ao centro da bola) das forças gravitacionais. Ou seja, é a soma da força entre M_{tot} e m e da força entre -M e m vezes o cosseno do ângulo entre $\vec{r}_{Mm}$ e $\vec{L}$. O cosseno do ângulo entre r e L é dado por:

$$\cos\theta = \frac{L - d\cos 60}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Podemos, então calcular a força de atração:

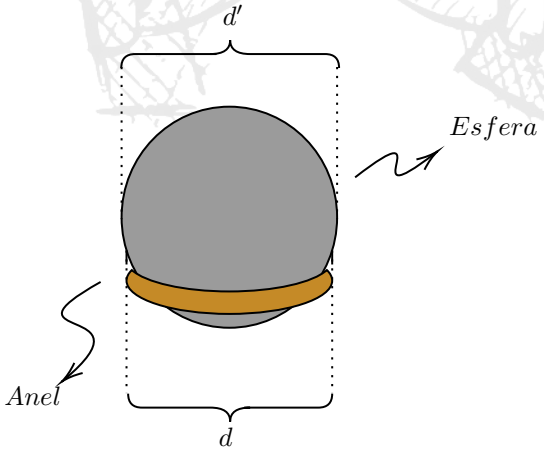
$$\vec{F}_{atr} = \frac{GM_{tot}m}{L^2} + \frac{G(-M)m}{r_{Mm}^2}\cos\theta$$

$$F_{atr} = \frac{(6.67430 \times 10^{-11}) \times (10 \times 10^{-3}) \times (10 \times 10^{-3})}{(80 \times 10^{-2})^2} + \frac{(6.67430 \times 10^{-11}) \times (10 \times 10^{-3}) \times (\frac{10}{1000} \times 10^{-3})}{(40 \times \sqrt{3})^2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$F_{atr} = 1 \times 10^{-14} N$$

Como podemos ver, a força é extremamente baixa, e isso nos mostra, que mesmo não percebemos, estamos atraindo e sendo atraídos por tudo ao nosso redor.

3. (Exclusiva para alunos do 1o ano) Um anel de cobre de $m = 20g$ tem um diâmetro $d = 1cm$ à temperatura $T_0 = 0°C$, como mostra a figura. Uma esfera de alumínio tem diâmetro $d' = 1,002cm$ a $T_f = 100°C$. A esfera passa pelo anel, exatamente quando o equilíbrio térmico é atingido.



Calcule a massa da esfera, sabendo-se que o coeficiente de dilatação linear do cobre é $\alpha_c = 17.10^{-6}°C^{-1}$, o calor específico do cobre é $c_c = 0,0923cal/g.°C$, o coeficiente de dilatação linear do alumínio é $\alpha_a = 23.10^{-6}°C^{-1}$ e o calor espcífico do alumínio é $c_a = 0,22cal/g.°C^{-1}$.

Solução:

Vamos inicialmente determinar a temperatura de equilíbrio térmico igualando os diâmetros

finais da esfera e do anel:

$$d_{fesfera} = d_{fanel} \implies d'(1 + \alpha_a \Delta T_a) = d(1 + \alpha_c \Delta T_c)$$

$$1,002 + 1,002 \times 23 \times 10^{-6} \times (\theta - 100) = 1 + 1 \times 17 \times 10^{-6} \times \theta$$

$$6,046 \times 10^{-6} \times \theta = 23,046 \times 10^{-4} - 20,0 \times 10^{-4}$$

$$\theta = \frac{3,046 \times 10^{-4}}{6,046 \times 10^{-6}} = 50,4$$

agora, a partir da equação do equilíbrio térmico do sistema, temos:

$$Q_{anel} + Q_{esfera} = 0 \implies mc_c \Delta T_c + Mc_a \Delta T_a = 0$$

$$20 \times 0,0923 \times (\theta - 0) + M \times 0,22 \times (\theta - 100) = 0$$

$$20 \times 0,0923 \times 50,4 + M \times 0,22 \times (50,4 - 100) = 0$$

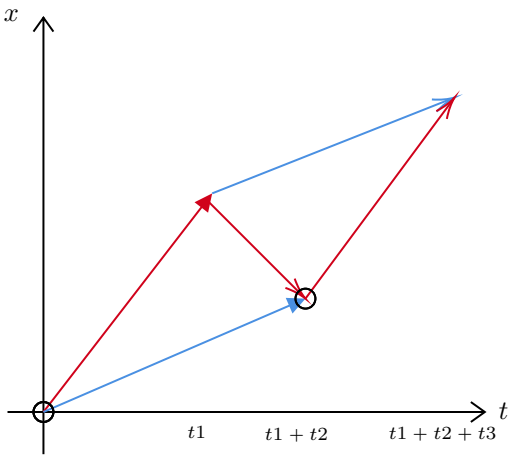
fazendo as contas, encontramos:

$$\boxed{M = 8,5g}$$

4. (Exclusiva para alunos do 1o ano) Três turistas, que possuem uma bicicleta, devem chegar ao centro turístico no menor espaço de tempo (o tempo conta-se até que o último turista chegue ao centro). A bicicleta pode transportar apenas duas pessoas e, por isso, o terceiro turista deve ir a pé. Um ciclista leva o segundo turista até um determinado ponto do caminha, de onde este continua a andar a pé e o ciclista regressa para transportar o terceiro. Encontrar a velocidade média dos turistas, sabendo que a velocidade do que vai a pé é $v_1 = 4km/h$ e a do ciclista é $v_2 = 20km/h$

Solução:

Inicialmente, o primeiro turista anda de bicicleta junto do segundo turista enquanto o terceiro caminha até o destino. Após um tempo t_1, o primeiro turista deixa o segundo turista, que passa a caminhar até o destino, e volta para buscar o terceiro turista. Passados t_2 segundos após esse evento, o primeiro turista e o segundo turista se encontram e passam a pedalar juntos até o destino. Finalmente, passados t_3 segundos desse encontro, todos os três turistas se encontram no destino.



Azul → 4 km/h Vermelho → 20 km/h

A distância percorrida em t_1 segundos pelo ciclista é $20t_1$ km e pelo terceiro turista é $4t_1$ km. Porém, o ciclista volta e pedala até se encontrar com o terceiro turista. Como eles se encontram em $(t_1 + t_2)$ segundos, a posição deles é a mesma nesse instante. Logo $4(t_1 + t_2) = 20t_1 - 20t_2$, onde o menos vem do fato do ciclista voltar no seu caminho. Ou seja $2t_1 = 3t_2$. Os três turistas se encontram e chegam ao destino em $t_1 + t_2 + t_3$, portanto suas posições são as mesmas. A posição do segundo turista é $20t_1$ (pois andou de bicicleta nesse período) $+ 4(t_2 + t_3)$. Enquanto a posição do terceiro turista, cuja equação é a mesma da posição do ciclista) é $4(t_1 + t_2) + 20t_3$. Logo:

$$20t_1 + 4t_2 + 4t_3 = 4t_1 + 4t_3 + 20t_3$$
$$t_1 = t_3$$

Finalmente, já que sabemos a posição final e o tempo decorrido, podemos descobrir a velocidade média:

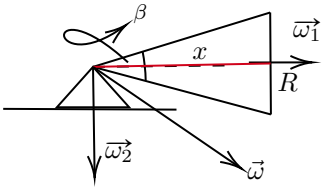
$$V_m = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{20t_1 + 4(\frac{2}{3}t_1) + 4t1}{t_1 + \frac{2}{3}t_1 + t_1} = \frac{\frac{80}{3}}{\frac{8}{3}} = 10\frac{km}{h}$$

5. Um estudante de Física, colocou o seu brinquedo em formato de cone, para girar uniformemente e sem escorregar sobre uma superfície horizontal, como mostra a figura abaixo. A extremidade do cone está dobrada no ponto O, o qual está no mesmo nível do ponto C, centro da base do cone. A velocidade do ponto C é $v = 10$ cm/s. Encontre os módulos do:
Dados: Abertura angular do cone $\beta = 30°$
Raio da base do cone $R = 60$ cm
O vetor velocidade angular obedece à regra da mão direita

   (a) Vetor velocidade angular do cone e o ângulo que ele forma com a vertical;
   (b) Vetor aceleração angular do cone.

Solução:

a) Primeiramente, pela figura abaixo, podemos observar os sentidos e as direções dos vetores velocidade angular, ω_1 e ω_2, e escrever equações para os seus módulos, assim:



$$v = \omega_1 R \Rightarrow \ \omega_1 = \frac{v}{R};$$
$$v = \omega_2 x \Rightarrow \ \omega_2 = \frac{v}{x}$$

Em que, pela geometria do problema:

$$tan\ \beta = \frac{R}{x} \Rightarrow \ x = \frac{R}{tan\ \beta}$$
$$\therefore \ \omega_2 = \frac{v\ tan\ \beta}{R}$$

Enfim, podemos escrever o módulo do vetor velocidade angular resultante:

$$\omega = \sqrt{{\omega_1}^2 + {\omega_2}^2} \Rightarrow$$
$$\omega = \sqrt{(\frac{v}{R})^2 + (\frac{v\ tan\ \beta}{R})^2} \Rightarrow$$
$$\omega = \frac{v}{R}\sqrt{1 + (tan\ \beta)^2} \Rightarrow \ \omega = \frac{v}{R} sec\ \beta$$
$$\therefore \ \omega = 0.0019\ m/s$$

Tome o angulo θ entre $\vec{\omega}$ e $\vec{\omega_2}$, ao usar trigonometria, temos:

$$tan\ \theta = \frac{\omega_1}{\omega_2} \Rightarrow tan\ \theta = \frac{\frac{v}{R}}{\frac{v\ tan\ \beta}{R}} \Rightarrow$$
$$tan\ \theta = \frac{1}{tan\ \beta} \Rightarrow \ \theta = 60^\circ$$

b)Agora, para acharmos o módulo do vetor aceleração angular α, pode escrever as seguintes equações sobre o movimento e sua construção:

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \Rightarrow \ \alpha = \frac{\Delta\omega_1}{\Delta t};$$
$$\Delta\omega_1 = \omega_1 \Delta\theta$$

Substituindo as equações encontradas, temos:

$$\alpha = \omega_1 \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \Rightarrow \ \alpha = \omega_1\omega_2 \Rightarrow$$
$$\alpha = (\frac{v}{R})^2 tan\ \beta$$

6. Baldemor possui uma barra cilíndrica maciça de um certo metal, e ele apenas sabe que seu coeficiente de dilatação linear é $\alpha = 5 \cdot 10^{-5}$ °C^{-1}. Em uma piscina cheia de água salgada ($\rho_{água} = 1030$ Kg/m^3), ao esquentar a barra em um $\Delta T_0 = 129$°C - em relação a temperatura ambiente - e mergulhar a barra na vertical, ele percebe que 5% dela fica para fora. Quanto ele deve esfriar a barra, em relação a temperatura ambiente, para que toda a barra seja imersa?

Solução:

Sabemos que o empuxo na barra vai se igualar ao seu peso, já que ela está em equilíbrio estático:

$$\rho V_{submerso} g = mg$$
$$\rho V_{submerso} = m_{barra} = \text{constante}$$

Seja o volume a temperatura ambiente da barra V_0. Sabemos que, para um ΔT qualquer, $V = V_0(1 + 3\alpha\Delta T)$. Daí, basta igualar essa constante para as duas situações:

$$0,95\rho V_0(1 + \alpha\Delta T_0) = \rho V_0(1 + \alpha\Delta T)$$
$$\Delta T = \Delta T_0 - \frac{0,05}{\alpha}$$
$$\Delta T = 129 - \frac{0,05}{5 \cdot 10^{-5}}$$

$$\boxed{\Delta T = -871^\circ \text{ C}}$$

7. Dois amigos, Alberto e Gabriel, apreciadores da Física, decidem realizar uma brincadeira. Cada um deve jogar três vezes uma bolinha com velocidade V_o, a partir de um determinado ângulo com a horizontal, e pontua quem acertar perpendicularmente o alvo na superfície da cunha, de altura h. Gabriel jogou primeiro, lançando com um ângulo α, o projétil cai a uma distância horizontal a antes do alvo (na extremidade inferior da cunha), em sua segunda chace, ele lança a bola com um ângulo β e o projétil atinge uma distância horizontal b depois do alvo (na extremidade superior da cunha). Na sua terceira tentativa, Gabriel arremessa a bolinha com um ângulo θ e pontua. Qual é o valor de θ para que o garoto pontue? Deixe sua resposta em função de β, α, a, b e h.

Solução:

Para começar, deve-se escrever as equações de lançamento para o eixo x:

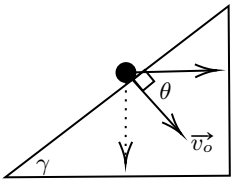
*d é a distância entre o ponto de lançamento e o alvo

$$\frac{{v_o}^2 \ sen^2 \ 2\alpha}{g} = d - a;$$
$$\frac{{v_o}^2 \ sen^2 \ 2\theta}{g} = d + b;$$
$$\frac{{v_o}^2 \ sen^2 \ 2\beta}{g} = d$$

Podemos subtrair as equações descobertas acima:

$$\frac{{v_o}^2\ sen^2\ 2\theta}{g} - \frac{{v_o}^2\ sen^2\ 2\alpha}{g} = a;$$
$$\frac{{v_o}^2\ sen^2\ 2\beta}{g} - \frac{{v_o}^2\ sen^2\ 2\theta}{g} = b$$

Com isso, é possível usar trigonometria (supondo γ o ângulo de inclinação da cunha), para usar o fato de que a bolinha faz um ângulo de 90° com a superfície do plano inclinado, e assim achar algumas relações:



$$tan\ \gamma = \frac{h}{b-a} \Rightarrow\ cotg\ \theta = \frac{h}{b-a} \Rightarrow$$
$$\frac{cos\ \theta}{sen\ \theta} = \frac{h}{b-a} \Rightarrow\ cos\ \theta = \frac{h}{b-a} sen\ \theta;$$
$$2sen\ \theta cos\ \theta = \frac{asen\ 2\beta + bsen\ 2\alpha}{a+b} \Rightarrow$$
$$\theta = arcsen\left(\sqrt{\frac{b-a}{a+b}\left(\frac{asen\ 2\beta + bsen2\alpha}{2h}\right)}\right)$$

Vale destacar, que o angulo θ é complementar ao ângulo γ e por isso podemos escrever tais relações. Esse argumento é verídico já que a componente horizontal da velocidade é conservada, e pela geometria do problema, pode-se observar tal relação entre os ângulos.

8. Na figura abaixo, há um plano inclinado diferenciado. Na sua fabricação, houve um equívoco e a parte dele inferior dele apresenta uma superfície rugosa(região vermelha) de coeficiente de atrito μ. Então, o seu fabricante, decide fazer um teste e ao soltar uma massa m do repouso, em formato de bloco (dimensões desprezíveis), de uma altura H, ele computa alguns resultados. Determine:

Dados: Altura do inicio da superficie rugosa h = 10 cm
Coeficiente de atrito $\mu = 2/3$
Massa do cubo $m = 532$ g
Altura $H = 40$ cm
Ângulo $\theta = 53°$
1 cal = 4,2 joule

(a) A variação de energia ΔE do bloco, em joule.

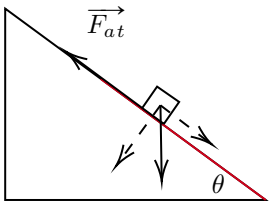
(b) A velocidade imediatamente após a chegada ao solo.

(c) Caso o material do qual o bloco seja feito possua calor sensível $c = 2{,}1$ cal/g°C, determine a variação de temperatura ΔT do bloco, quando 25% do calor é dissipado.

(d) Qual seria a velocidade do bloco, imediatamente apos a sua chegada no solo, se considerarmos a o aquecimento?

Solução:

a) Aqui, a variação de energia é dada pelo trabalho da forca dissipativa, no caso a F_{at}:



$$-\mu mgdcos\theta = \Delta E \Rightarrow$$
$$\Delta E = -\mu mg\frac{h}{sen\theta}cos\theta \Rightarrow$$
$$\Delta E = \mu mgh\ cotg\theta = -0.26J$$

Note que o sinal negativo indica uma dissipação, já que essa energia foi transformada em calor, por exemplo.

b) Para realizar esse cálculo, primeiramente, podemos equacionar a velocidade na altura h:

$$mgH = mgh + \frac{1}{2}mv_i^2 \Rightarrow\ v_i^2 = 2g(H-h)$$

Com essa informação, podemos escrever que a variação de energia, causada pelo trabalho da força de atrito, corresponde a energia antes e depois da força dissipativa:

$$\Delta E = \frac{1}{2}mv_f^2 - (mgh + \frac{1}{2}mv_i^2) \Rightarrow$$
$$-\mu mghcotg\ \theta = \frac{1}{2}mv_f^2 - mgH \Rightarrow$$
$$-2\mu gcotg\ \theta = v_f^2 - 2gH \Rightarrow\ v_f = \sqrt{2g(H - \mu hcotg\ \theta)} \approx 2.64m/s$$

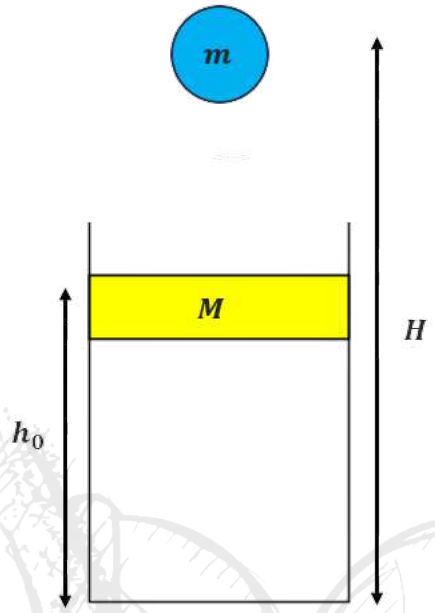
c) Como 25% do trabalho do atrito é dissipado na forma de calor, podemos escrever que:

$$Q = \frac{1}{4}\Delta E \Rightarrow\ mc\Delta T = \mu mghcotg\ \theta \Rightarrow$$
$$\Delta T = \frac{\mu ghcotg\ \theta}{c} = 1.19 \cdot 10^{-4\circ}C$$

d) Por fim, a velocidade, considerando o aquecimento, é dada de modo semelhante ao do item (b):

$$\Delta E = 4Q \Rightarrow\ \Delta E = 4mc\Delta T \Rightarrow$$
$$4mc\Delta T = \frac{1}{2}mv_f^2 - (mgh + \frac{1}{2}mv_i^2) \Rightarrow$$
$$4mc\Delta T = \frac{1}{2}mv_f^2 - mgH \Rightarrow\ 8c\Delta T = v_f^2 - 2gH \Rightarrow$$
$$8\mu ghcotg\ \theta + 2gH = v_f^2 \Rightarrow\ v_f = \sqrt{2(4\mu ghcotg\ \theta + gH)} \approx 2.44m/s$$

9. Seja um recipiente cilíndrico cheio de gás monoatômico colocado em um local sem atmosfera. Um pistão de massa $M = 3,5$ Kg está segurando o gás a uma altura $h_0 = 4,5$ m. Uma bolinha de massa $m = 1,5$ Kg é solta de uma altura $H = 9$ m e colide inelasticamente com o pistão. Após várias oscilações, o sistema chega a um estado final, em que o pistão está a uma altura h. Qual seria essa altura?



Solução:

Uma vez que o processo ocorre bem rapidamente, ele é irreversível. Ainda assim, a energia ainda se conserva:

$$mgH + Mgh_0 + \frac{3}{2}NRT_0 = (M+m)gh + \frac{3}{2}NRT$$

Sensacional. Da definição de volume, sendo S a área do pistão, $V_0 = h_0 S$ e $V = hS$. Da Lei dos Gases Ideais, $PV = NRT$. Da segunda Lei de Newton, uma vez que o pistão fica em equilíbrio no antes e no depois: $P_0 S = Mg$ e $PS = (M+m)g$. Finalmente, temos todas as equações que precisamos:

$$mgH + Mgh_0 + \frac{3}{2}P_0V_0 = (M+m)gh + \frac{3}{2}PV$$
$$mgH + Mgh_0 + \frac{3}{2}\frac{Mg}{S}h_0S = (M+m)gh + \frac{3}{2}\frac{(M+m)g}{S}hS$$
$$mgH + Mgh_0 + \frac{3}{2}Mgh_0 = (M+m)gh + \frac{3}{2}(M+m)gh$$
$$mgH + \frac{5}{2}Mgh_0 = \frac{5}{2}(M+m)gh$$
$$h = \frac{1}{M+m}\left[\frac{2mH}{5} + Mh_0\right]$$

$$\boxed{h = 4,25 \text{ m}}$$

10. Sejam duas estrelas A e B em órbitas elípticas orbitando em torno de seu centro de massa que está a uma distância $d = 1,5 \cdot 10^{14}$ Km da Terra. Ambas as órbitas têm excentricidade $e = 0.85$ e período $P = 5$ anos. A estrela A tem massa $M_A = 4M_{sol}$, enquanto a estrela B tem massa $M_B = 6M_{sol}$. Sendo assim, descubra:
Dados: $\sqrt[3]{2} \approx 1,26$ **Dicas:** Se necessário, use que, para ângulos pequenos, $\tan x \approx \operatorname{sen} x \approx x$; Para um sistema binário com duas estrelas em órbitas elípticas:

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{G(M_A + M_B)}(a_A + a_B)^3$$

Mas, se utiliza-se as massas em massas solares e as distâncias em unidades astronômicas, $\frac{4\pi^2}{GM_s} = 1$ (numericamente).
1 UA $= 1,5 \cdot 10^{11}$ m

(a) A distância angular, em radianos, entre as estrelas quando estão o mais longe uma da outra;

(b) Os semieixos maiores a_A e a_B;

(c) A razão entre as velocidades de A e B nesse mesmo instante;

Solução:

(a) Perceba que, quando uma das estrelas está no ponto mais longe de sua órbita (o apoastro), a outra também estará, já que $M_Ar_A = M_Br_B$ - em que r é a distância ao centro de massa. Sabemos que, no apoastro, $r_i = a_i(1+e)$, sendo i um corpo qualquer. Perceba então:

$$\theta = \frac{r_A + r_B}{d}$$
$$\theta = \frac{(a_A + a_B)(1+e)}{d}$$

Da Terceira Lei de Kepler, usando massas solares e anos:

$$a_A + a_B = \sqrt[3]{P^2(M_A + M_B)}$$
$$a_A + a_B = 6,3 \text{ UA}$$

Podemos, então, achar o θ:

$$\boxed{\theta = 1,17 \cdot 10^{-5} \text{ rad}}$$

Quando as estrelas estão no afélio:

$$M_A r_A = M_B r_B$$
$$M_A a_A (1+e) = M_B a_B (1+e)$$
$$a_B = \frac{M_A}{M_B} a_A$$
$$a_B = \frac{2}{3} a_A$$

E sabemos a soma $a_A + a_B = 6,3$ UA

$$a_A \left(1 + \frac{2}{3}\right) = 6,3$$

$$\boxed{a_A = 3,78 \text{ UA}}$$

$$\boxed{a_B = 2,62 \text{ UA}}$$

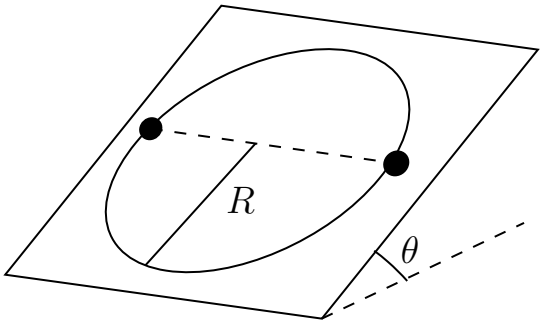
No referencial do centro de massa, o momento linear é igual pra ambas as estrelas:

$$M_A v_A = M_B v_B$$
$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{M_B}{M_A}$$

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{3}{2}$$

(1) Ao ir estacionar o seu carro, João se depara com um estacionamento inclinado, onde o ângulo do solo em relação à horizontal é θ. O motorista deseja dirigir um círculo de raio R com velocidade constante. O coeficiente de atrito entre os pneus e o solo é conhecido e vale μ.

Dados: Ângulo de inclinação $\theta = 30°$
Raio da curva $R = 10$ m
Coeficiente de atrito $\mu = 2/3$
$\sqrt{2} \approx 1.4$

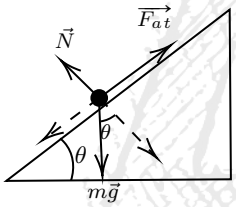


(a) Qual a velocidade máxima v_{max} que João deve ter para evitar um deslizamento?

(b) Qual a velocidade v que o motorista deve desempenhar para que o carro não escorregue em um dos pontos da figura acima (meio caminho entre a parte mais baixa e a mais alta da trajetória)?

Solução:

(a) Primeiramente, devemos escrever o diagrama de forças para o carro, dado pela imagem abaixo:



No caso, a força de atrito aponta para o centro, o que faz com que o carro realize o movimento circular. Com isso, podemos escrever o caso limite, em que o carro esta na parte mais baixa da trajetória, e assim determinar a velocidade v_{max} que evita o derrapamento:

$$\mu mg\cos\theta - mgsin\theta \geqslant \frac{mv^2}{R} \Rightarrow$$

$$v \geqslant \sqrt{gR(\mu\cos\theta - \operatorname{sen}\theta)} \Rightarrow \; v \geqslant \sqrt{10^2\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right)}$$

$$v = 10\cdot\sqrt{0.07} \approx 2.78m/s$$

(b) Nos pontos marcados na figura, a componente ao longo do plano da força de atrito deve ser igual a $mg\operatorname{sen}\theta$, pois nãao haverá nenhuma aceleração nessa direção, e a aceleração na horizontal deverá ser igual à resultante centrípeta, logo, teremos para a resultante da força de atrito:

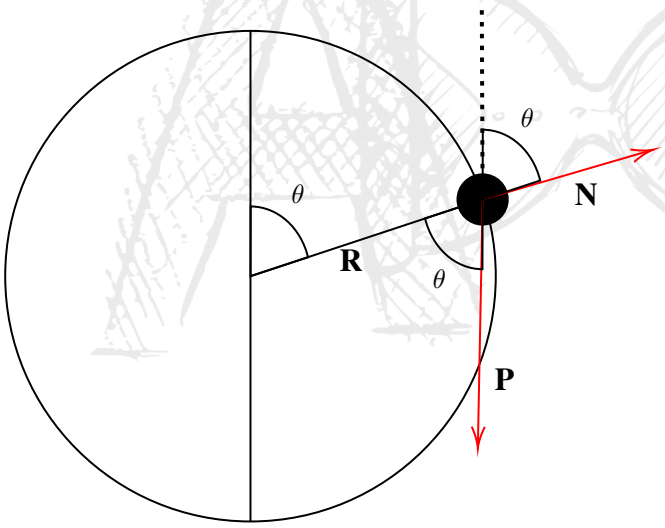
$$(mg\,\text{sen}\,\theta)^2 + (\frac{mv^2}{R})^2 \leqslant F_{at}^2 \leqslant (\mu mg\cos\theta)^2$$
$$v \leqslant \sqrt{gR}(\mu^2\cos^2\theta - \text{sen}^2\,\theta)^{\frac{1}{4}}$$
$$v \leqslant \sqrt{gR}\left(\left(\frac{4}{9}\right)\cdot\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}}$$
$$v \geqslant 5.37m/s$$

ERRATA: O valor correto para o ângulo de inclinação é de 30°. Perdão por qualquer transtorno causado.

12. Inácio deseja testar um brinquedo de seu parque de diversões radical: uma roda gigante para apenas uma cabine. Ela desce com a ação da gravidade na roda de raio R, partindo do topo após um leve empurrãozinho e dando voltas e voltas. Ache o cosseno da posição angular da cabine em relação ao topo em que ela possui aceleração apenas horizontal.

Solução:

Podemos desenhar a situação facilmente. Há apenas duas forças atuantes: o peso da partícula $P = mg$ que aponta para baixo e a normal entre a cabine e a roda N, que aponta para fora ou para dentro, depende do momento. Veja:



Podemos, então, equacionar a Segunda Lei de Newton para a vertical e horizontal se convencionarmos para cima e para direita as forças positivas:

$$F_y = N\cos\theta - mg$$
$$F_x = N\,\text{sen}\,\theta$$

Se o problema quer que só haja aceleração horizontal, é porque a força na vertical é nula

$$N\cos\theta = mg$$

Beleza. Não devemos esquecer da conservação da energia. Uma vez que apenas a força gravitacional está realizando trabalho (a normal sempre é perpendicular a trajetória da partícula), basta conservarmos a energia potencial gravitacional a partir do topo da roda (a altura, então, será negativa). Ela começa parada e no referencial da E_{pg}, então $E = 0$:

$$E = mgh + \frac{mv^2}{2} = 0$$
$$-gR(1 - \cos\theta) + \frac{v^2}{2} = 0$$
$$v^2 = 2gR(1 - \cos\theta)$$

Já que a partícula está em movimento circular, na direção do raio deve haver uma força centrípeta resultante. Usemos o que já sabemos:

$$mg\cos\theta - N = \frac{mv^2}{R}$$
$$mg\cos\theta - \frac{mg}{\cos\theta} = 2mg(1 - \cos\theta)$$
$$3mg\cos^2\theta - 2mg\cos\theta - 2mg = 0$$
$$3\cos^2\theta - 2\cos\theta - 1 = 0$$

Uma equação do segundo grau fica fácil.

$$\cos\theta = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 3}}{6}$$
$$\cos\theta = \frac{1 \pm 2}{3}$$

Temos duas soluções. $\cos\theta = 1$ corresponde a um ângulo nulo, ou seja, quando a cabine está no topo - bem, lá não há aceleração alguma. A outra solução é o que satisfaz o nosso caso, então:

$$\boxed{\cos\theta = -\frac{1}{3}}$$