Teoria dos Portfólio e Diversicação

João Antônio Pimentel

1 Introdução

A Teoria das Carteiras, também chamada de Teoria do Portfólio, é um conjunto de princípios e técnicas que visa otimizar a alocação de ativos financeiros. Ao diversificar investimentos, buscando um equilíbrio entre riscos e retornos, os investidores podem reduzir a volatilidade e maximizar seu potencial de ganhos. Nessa abordagem, a seleção cuidadosa de diferentes tipos de ativos se torna a chave para construir uma base sólida para o sucesso financeiro. Nesse material, iremos desvendar algumas das principais vantagens sobre a diversificação de carteiras.

1.1 O que é uma carteira de investimento?

Uma carteira de investimentos é como uma caixinha onde você guarda diferentes coisas que podem te ajudar a ganhar mais dinheiro com o tempo. Imagine que você tenha algumas figurinhas, algumas pedrinhas coloridas e também um brinquedo que outras crianças gostariam de brincar. Se você guardar essas coisas juntas e cuidar bem delas, quando crescer um pouquinho, elas podem valer mais e você poderá trocar por coisas legais que você queira. É como juntar coisas especiais para ter mais no futuro.

1.2 Seleção de Carteiras

Além disso, outro tópico muito importante na Teoria do Portfólio é a **Seleção de Carteiras**. Imagine que você tem um cofre com um monte de dinheiro, e você quer fazer com que esse dinheiro cresça ao longo do tempo. Só que você não quer colocar todo o dinheiro em um só lugar, porque isso pode ser arriscado. Então, você começa a olhar para diferentes tipos de investimentos, como ações (que são pedaços de empresas), títulos (que são empréstimos para governos ou empresas), e outras coisas assim.

Agora, a ideia é escolher um grupo desses investimentos que vai te dar o melhor resultado possível. Mas você não escolhe só qualquer grupo, você pensa bem nas suas preferências. Por exemplo, você pode gostar de arriscar um pouco mais para ter a chance de ganhar mais dinheiro, ou pode preferir algo mais seguro, mesmo que os ganhos sejam menores.

Então, a seleção de carteiras é como você decide misturar esses investimentos de forma inteligente, levando em conta o quanto você quer ganhar e o quanto está disposto a arriscar. É como montar um quebra-cabeça financeiro para ter o melhor resultado no futuro.

Agora que entendemos como a importância da seleção de carteiras para um investidor, estamos prontos para entender conceitos mais complexos sobre a Teoria do Portfólio.

2 Risco de uma carteira

Na teoria do portfólio, quando colocamos um ativo em uma carteira de investimentos, ele pode ter um risco diferente do que teria se estivesse sozinho. Diversificar, ou seja, misturar diferentes ativos na carteira, ajuda a diminuir o risco, mas esse efeito fica mais fraco conforme colocamos mais ativos.

Mesmo com muitos ativos diferentes na carteira, sempre vai existir um nível mínimo de risco que não podemos eliminar. Chamamos isso de "risco sistemático". Até carteiras bem diversificadas têm um certo nível desse risco que não some.

O risco de uma carteira não depende só do risco de cada ativo individual e quanto dinheiro colocamos em cada um, mas também de como esses ativos se movem juntos. Se escolhermos ativos que não se movem na mesma direção, dá para diminuir o risco total da carteira. Se tiverem uma relação fraca entre eles, dá para reduzir ainda mais o risco total. Isso é importante para entendermos como calcular o risco de uma carteira com dois ativos diferentes (X e Y), usando a seguinte equação:

Ativo	Participação (W)	Retorno (R)	Risco (σ)
X	W_X	R_X	σ_X
Y	W_Y	R_Y	σ_Y
Carteira	100%	$E(R_P) = R_P$	σ_P (Markowitz)

$$\sigma_p = [(W_x^2 \cdot \sigma_x^2) + (W_y^2 \cdot \sigma_y^2) + 2 \cdot W_y \cdot W_x \cdot COV_{x,y}]^{\frac{1}{2}} \tag{1}$$

$$\sigma_P = \sqrt{Var(R_p)} = \left[\frac{1}{T-1} \cdot \sum_{i=0}^{N} (R_i - \bar{R}_p) \right]^{\frac{1}{2}} \tag{2}$$

O desvio-padrão de um portfólio de dois ativos não pode ser calculado simplesmente somando os desvios-padrão individuais de cada ativo ou utilizando uma média ponderada. Isso ocorre porque, ao combinar ativos em um portfólio, a interação entre eles (ou seja, a covariância) também desempenha um papel importante na determinação do risco global do portfólio.

A covariância mede como os retornos de dois ativos se movem em relação um ao outro. Se os retornos dos ativos tendem a se mover na mesma direção (ou seja, aumentam ou diminuem juntos), a covariância é positiva. Se eles tendem a se mover em direções opostas, a covariância é negativa. A diversificação eficaz ocorre quando os ativos têm baixa covariância ou são independentes, o que reduz o risco global do portfólio.

Também podemos expressa a covariância como:

$$\rho_{x,y} \cdot \sigma_x \cdot \sigma_y = COV_{x,y} \tag{3}$$

Sendo $\rho_{x,y}$ a covariância entre os ativos X e Y. Substituindo na equação 1:

$$\sigma_p = [(W_x^2 + \sigma_x^2) + (W_y^2 + \sigma_y^2) + 2 \cdot W_y \cdot W_x \cdot \rho_{x,y} \cdot \sigma_x \cdot \sigma_y]^{\frac{1}{2}}$$

Para generalizarmos a expressão geral de cálculo do risco (desvio-padrão) de uma carteira que contém N ativos, baseando-se no modelo de portfólio desenvolvido por Markowitz, a seguinte equação foi formulada:

$$\sigma_p = \left[\sum_{i=1}^{N} W_i^2 \cdot \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} W_i W_j \rho_i \sigma_i \sigma_j \right]^{\frac{1}{2}} \tag{4}$$

Assim, podemos expressar a covariância entre dois ativos X e Y em termos dos retornos e das probabilidades dos estados de natureza:

$$COV_{x,y} = \sum_{j=1}^{n} P_j \cdot (R_x - \bar{R}_x) \cdot (R_y - \bar{R}_y) \tag{5}$$

Além disso, a correlação entre dois ativos, isto é, como eles variam juntos pode ser expressa como:

$$CORR_{x,y} = \frac{COV_{x,y}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} \tag{6}$$

Uma correlação igual a -1 demonstra uma correlação negativa perfeita entre dois ativos. Isso significa que um movimento positivo em um está associado a um movimento negativo no outro. Por outro lado, uma correlação igual a 1 demonstra uma correlação positiva perfeita. Ambos os ativos se movem na mesma direção em resposta aos movimentos do mercado.

Como prever se as ações estarão altamente correlacionadas? Os retornos das ações tenderão a se mover juntos se forem afetados de forma semelhante por eventos econômicos. Assim, as ações do mesmo setor tendem a ter retornos mais altamente correlacionados do que ações de setores diferentes.

3 Risco vs Retorno

3.1 Portfólio Eficiente com dois ativos

Vamos considerar um portfólio com dois ativos, um da Microsoft e outro da Pepsi. Vamos supor que um investidor acredite que os ativos se comportem assim:

Tabela 1: Retorno Esperado e Volatilidade das Ações

Ação	**Retorno Esperado (%)**	**Volatilidade (%)**
Microsoft	26	50
Pepsi	6	25

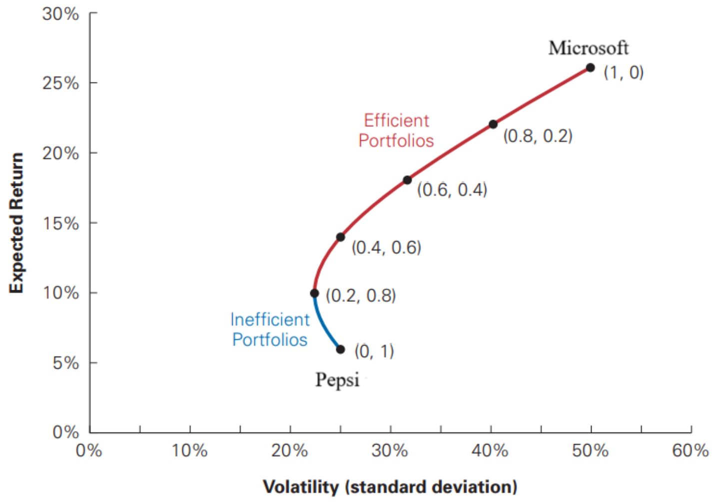
A gente pode calcular o retorno e o risco esperado de acordo com as partipações de cada ativo. Considere que nós investimos 40% em Microsoft e 60% em ações da Pepsi, assim, podemos calcular o retorno esperado e o risco utilizando as equações que aprendemos que na seção 2.

$$E[R_{40-60}] = 0,26 \cdot 0,4 + 0,06 \cdot 0,60 = 0,14 = 14\%$$
$$Var(R_{40-60}) = 0,4^2 \cdot 0,5^2 + 0,25^2 \cdot 0,6^2 + 2 \cdot 0,6 \cdot 0,4 \cdot 0 \cdot 0,4 \cdot 0,6 = 0,0625$$

Mas:

$$\sigma_P = \sqrt{Var(R_{40-60})} = 0,25 = 25\%$$

Lembre-se que essa é apenas uma das possibilidades de partipação entre os dois ativos. Por exemplo, Investir 20% em ações da Microsoft e 80% em ações da Pepsi, resulta em uma volatilidade de apenas 22,3%. No entanto, sabendo que os investidores se preocupam com a volatilidade e o retorno esperado, devemos considerar ambos simultaneamente. Para fazer isso, plotamos a volatilidade e o retorno esperado de cada carteira em um gráfico. A curva (uma hipérbole) representa o conjunto de carteiras que podemos criar usando pesos arbitrários.



Identificando Portfólios Ineficientes: De forma mais geral, dizemos que um portfólio é ineficiente sempre que for possível encontrar outro portfólio que seja melhor em termos tanto de retorno esperado quanto de volatilidade. Observando um gráfico, um portfólio é ineficiente se existirem outros portfólios acima e à esquerda - ou seja, a noroeste - dele. Investir exclusivamente em ações da Pepsi é ineficiente, e o mesmo vale para todos os portfólios com mais de 80% em ações da Pepsi (a parte azul da curva). Portfólios ineficientes não são ótimos para um investidor em busca de altos retornos com baixa volatilidade.

Identificando Portfólios Eficientes: Por outro lado, portfólios com pelo menos 20% em ações da Microsoft são eficientes (a parte vermelha da curva): Não há outro portfólio das duas ações que ofereça um retorno esperado mais alto com menor volatilidade. No entanto, enquanto podemos descartar os portfólios ineficientes como escolhas de investimento inferiores, não podemos classificar facilmente os eficientes - os investidores escolherão entre eles com base em suas próprias preferências quanto a retorno versus risco. Por exemplo, um investidor extremamente conservador, que se preocupa apenas em minimizar o risco, escolheria o portfólio de menor volatilidade (20% Microsoft, 80% Pepsi). Um investidor mais agressivo poderia optar por investir 100% em ações da Microsoft - mesmo que essa abordagem seja mais arriscada, o investidor pode estar disposto a correr esse risco para obter um retorno esperado mais elevado.

3.2 Efeito da Correlação

No último exemplo, nós assumimos que a correlação entre os ativos era nula, agora, vamos ver como o risco e o retorno são afetados pela correlação entre os ativos.

A correlação entre ativos não tem efeito no retorno esperado do portfólio, nós ainda vamos ter 14% de retorno. Entretanto, o risco de um portfólio é afetado pela correlação. Pela teoria de diversificação de carteiras, quanto menor a correlação entre ativos, menor o risco da carteira.

Se os ativos forem perfeitamente correlacionados positivamente, isto é, correlação = +1, podemos identificar o conjunto de carteiras traçando uma linha reta entre elas. Nesse caso extremo a volatilidade da carteira é igual à média ponderada da volatilidade das duas ações - não há diversificação. No entanto, quando a correlação é menor que 1, a volatilidade das carteiras é reduzida devido à diversificação, e a curva se inclina para a esquerda. A redução do risco (e a inclinação da curva) se torna maior à medida que a correlação diminui. No outro extremo, com correlação perfeitamente negativa (linha azul), a linha se torna novamente reta. Desta vez, a linha reflete no eixo vertical. Em particular, quando as duas ações estão perfeitamente correlacionadas negativamente, torna-se possível manter uma carteira que não apresenta absolutamente nenhum risco.

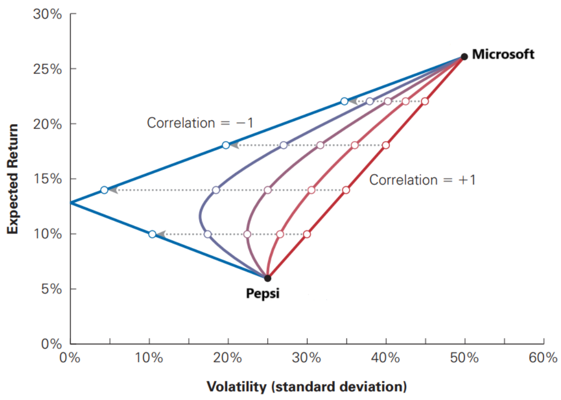


Figura 1: Gráfico Retorno vs Volatilidade

3.3 Short Sales - Tópico Extra

Até agora, nós consideramos apenas portfólios em que investimos uma quantia positiva em cada ativo. Nós nos referimos a um investimento positivo como uma **"long position"**, mas também é possível investir uma quantidade negativa em uma ação, chamamos isso de **"short position"**, nós realizamos uma **short sale** vendendo uma ação que você não possui ainda com a obrigação de comprar ela de volta no futuro. Veja o esquema abaixo:

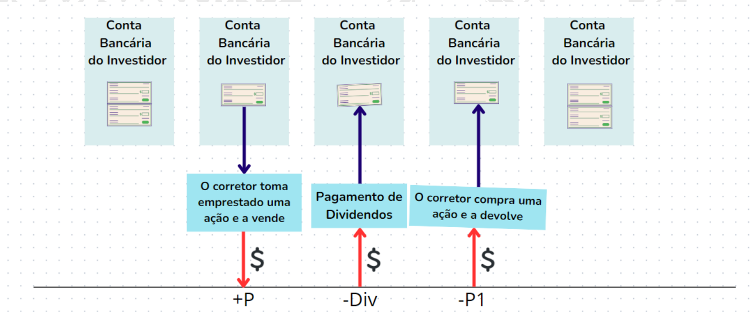


Figura 2: Funcionamento de uma short sale

Para entendermos melhor, vamos imaginar que temos R$ 20.000,00 para investir, Decidimos fazer uma short sale de R$10.000 em ações da Pepsi e investir os recursos provenientes dessa short sale, juntamente com os R$20.000 que iremos investir na Microsoft. Qual será o retorno esperado e a volatilidade dessa carteira?

Podemos pensar que o nosso investimento negativo foi de -R$ 10.000,00 nas ações da Pepsi, além disso, investimos R$ 30.000,00 em ações da microsoft (20.000 + 10.000), ou seja, nosso investimento líquido é de R$ 20.000,00, assim, o peso de cada ativo é:

$$W_M = \frac{30.000}{20.000} = 150\% \quad W_P = \frac{-10.000}{20.000} = -50\%$$

Veja que os pesos dos ativos ainda somam 100%. Usando esses pesos, nós podemos calcular o retorno esperado e a volatilidade do portfólio.

$$E[R_p] = W_M \cdot E[R_M] + W_P \cdot E[R_P] = 1,5 \cdot 0,26 + (-0,5) \cdot 0,06 = 36\%$$
$$\sigma(R_P) = \sqrt{Var(R_P)} = \sqrt{W_M^2 \cdot Var(R_M) + W_P^2 \cdot Var(R_P) + 2 \cdot W_M \cdot W_P \cdot Cov(R_M, R_P)}$$
$$\sigma(R_P) = \sqrt{1,5^2 \cdot 0,5^2 + (-0,5)^2 \cdot 0,25^2 + 2 \cdot 1,5 \cdot (-0,5) \cdot 0} = 76\%$$

A short sale é lucrativa se você espera que o preço de uma ação diminua no futuro. Lembre-se de que, ao tomar emprestado uma ação para vendê-la, você é obrigado a comprá-la e devolvê-la no futuro. Portanto, quando o preço da ação cai, você recebe mais antecipadamente pelas ações do que o custo de substituí-las no futuro. No entanto, como o exemplo anterior mostra, a short sale pode ser vantajosa mesmo se você espera que o preço da ação suba, desde que você invista os recursos em outra ação com um retorno esperado ainda mais alto. Dito isso, e como o exemplo também mostra, a short sale pode aumentar significativamente o risco da carteira.

4 Setores livres de risco - Empréstimo vs Poupança

Uma outra maneira de reduzir o risco de uma carteira de investimentos, sem ser através da diversificação, é guardar uma parte do nosso dinheiro de forma segura, investindo na poupança, por exemplo. Claro que, ao fazer isso, iremos reduzir o nosso retorno esperado, mas não deixa de ser uma boa alternativa. Em contrapartida, se nós fossemos um investidor agressivo, que busca por altos retornos esperados, nós poderiamos pedir um empréstimo do banco para investir ainda mais em ações no mercado. Assim, veremos que a capacidade de escolher a quantidade a ser investida em ações de risco em comparação com ações livres de risco nos permite determinar a carteira ótima de títulos de risco para um investidor.

4.1 Investindo em setores livre de risco

Vamos considerar um portfólio arbitrário de retorno R_P, o que acontece se colocarmos uma fração x do nosso dinheiro no portfólio e deixar o resto do dinheiro, ou seja, 1 - x, rendendendo em CDB (renda fixa) com uma taxa de juros igual a r_f. Podemos calcular o retorno esperado desse portfólio e a variância dele.

$$E[R_P] = (1-x) \cdot r_f + x \cdot E[R_P] = r_f + x \cdot (E[R_P] - r_f)$$

Essa equação simplesmente nos diz que o retorno esperado é a média ponderada dos retornos esperados da CDB e do portfólio. Uma outra interpretação da equação nos diz que o retorno esperado é igual à taxa livre de risco (r_f) mais uma fração do prêmio de risco da carteira, $E[R_P] - r_f$, com base na fração x que investimos nela.

Agora, vamos calcular a volatilidade, Como a taxa livre de risco r_f é fixa e não se move com (ou contra) nosso portfólio, sua variância e covariância com o portfólio são ambas zero. Assim:

$$\sigma(R_{x,P}) = \sqrt{(1-x)^2 Var(r_f) + x^2 Var(R_p) + 2(1-x)(x) Cov(r_f, R_p)}$$

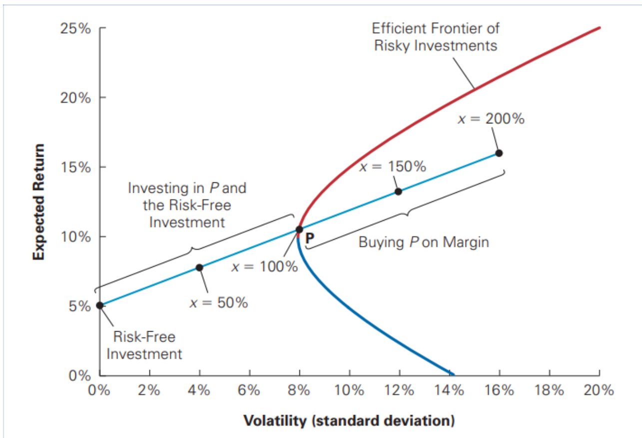
Mas $Var(r_f) = 0$ e $Cov(r_f, R_P) = 0$

$$\sigma(R_{x,P}) = \sqrt{x^2 Var(R_p)} = x \cdot \sigma_{R_P} \tag{7}$$

Ou seja, a volatilidade é apenas uma fração da volatilidade da carteira, com base no valor que investimos nela.

4.2 Empréstimo e compra de ações com margem

Imagine a situação, você quer apostar na vitória do Vasco, mas não tem dinheiro suficiente, o que você faz? Bom, uma solução trivial é pedir empréstimo ao banco para poder apostar. Isso realmente acontece, mas não iremos apostar na vitória do Vasco e sim na valorização de ativos. Pedir dinheiro emprestado ao banco para investir em ações é chamado de compra de ações com margem. Como você deve esperar, o investimento com marge é uma estratégia de investimos arriscada, a figura abaixo mostra o gráfico das duas estratégias apresentadas:



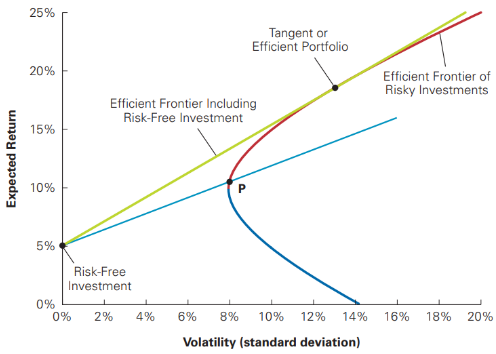
Observe que a região da linha azul na figura com $x > 100\%$ tem um risco maior do que o próprio portfólio P. Ao mesmo tempo, o investimento em margem pode proporcionar retornos esperados mais altos do que investir em P usando apenas os fundos que temos disponíveis.

4.3 Identificando o Portfólio Tangente

Para obter o maior retorno esperado possível para qualquer nível de volatilidade, precisamos encontrar a carteira que gere a linha mais íngreme possível quando combinada com o investimento livre de risco. A inclinação da linha que passa por um determinado portfólio P é geralmente chamada de índice de Sharpe do portfólio:

$$Indice\ de\ Sharpe = \frac{E[R_P] - r_f}{\sigma_P} \tag{8}$$

O índice de Sharpe mede a relação entre recompensa e volatilidade proporcionada por um portfólio. O portfólio ideal para combinar com o ativo livre de risco será aquele com o maior índice de Sharpe onde a linha com o investimento livre de risco apenas toca, e portanto é tangente, à fronteira eficiente de investimentos de risco.



O portfólio que gera essa linha tangente é chamado de portfólio tangente. Como o portfólio tangente possui o maior índice de Sharpe, ele sempre oferece a maior recompensa por unidade de volatilidade de todos os portfólios disponíveis. Ou seja, o porftfólio eficiente é o portfólio tangente!

5 Conclusão

A teoria do portfólio e a diversificação são fundamentais para maximizar retornos e mitigar riscos na gestão financeira. A construção de portfólios equilibrados, baseada na compreensão das relações entre ativos, é essencial. Embora não haja uma fórmula infalível, a aplicação desses conceitos fornece uma estrutura sólida para decisões mais fundamentadas em um ambiente de mercado dinâmico. Em resumo, a teoria do portfólio é uma bússola valiosa para investidores, orientando-os a enfrentar desafios com resiliência e buscar oportunidades sustentáveis a longo prazo.