Simulado OBM - Ampulheta do Saber
Nível 1 - (6° ou 7° ano)

Soluções

1.

(a) Sim, um exemplo é o número 1121332231.

(b) Não, pois um número de 11 dígitos teria 10 números de 2 dígitos consecultivos, sendo que existem apenas 9 números distintos de 2 dígitos 1, 2 e 3. 3 possibilidades para a casa das unidades e 3 para as dezenas ($3 \cdot 3 = 9$), portanto haveriam números iguais.

---

2. Chame-os de $a \leq b \leq c \leq d \leq e$. Então $\boxed{abcde = a+b+c+d+e}$ $(*)$.

Seja $S = \frac{1}{abcd} + \frac{1}{bcde} + \frac{1}{cdea} + \frac{1}{deab} + \frac{1}{eabc}$, dividindo $(*)$ por $abcde$, temos que $S = 1$, sendo que se $a \geq 2 \implies \frac{1}{abcd}, \frac{1}{bcde}, \frac{1}{cdea}, \frac{1}{deab}, \frac{1}{eabc} \leq \frac{1}{16} \implies S \leq \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$ (absurdo, pois $S = 1 > \frac{5}{16}$).

Logo $a = 1 \implies 1 = \frac{1}{bcd} + \frac{1}{bcde} + \frac{1}{cde} + \frac{1}{deb} + \frac{1}{ebc}$. Analogamente, se $b \geq 2 \implies S \leq \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{9}{16}$ (absurdo, pois $S = 1 > \frac{9}{16}$).

Então $b = 1$ e se $c \geq 2$ temos que $S \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$, sendo que de fato $S = 1$, ou seja, a igualdade tem que acontecer e, para isso $c = d = e = 2$.

Senão, vejamos em $(*)$ caso $a = b = c = 1$. Então $de = 3 + d + e \implies de - d - e = 3 \implies de - d - e + 1 = 4 \implies (d-1)(e-1) = 4$, como $4 = 2 \cdot 2$ e $d-1, e-1 \geq 1$, temos que $d - 1 = 1$ e $e - 1 = 4 \implies d = 2, e = 5$ ou $d - 1 = 2$ e $e - 1 = 2 \implies d = e = 3$.

Então, as únicas soluções são $(1,1,2,2,2)$, $(1,1,1,2,5)$ e $(1,1,1,3,3)$ e suas permutações.

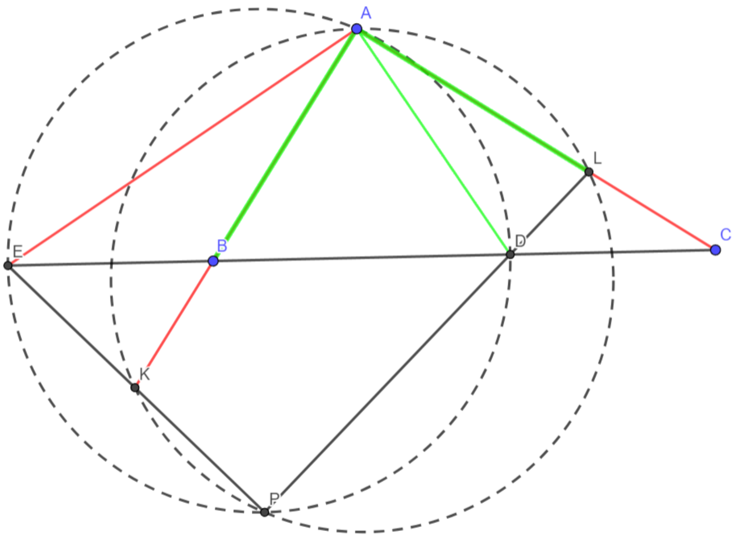
3.

(a) Suponha o contrário. Ou seja, que existe uma posição na qual Esmeralda não poderá mover. Então quaisquer duas bolas vizinhas possuem cores opostas (senão Esmeralda poderia mover). Mas para isso as bolas teriam que alternar as cores, porém 9 é ímpar, absurdo! (por paridade)

Soluções

(b) Suponha o contrário. Ou seja, tem como realizar uma série de movimentos para chegar na configuração (ii). Veremos qual a posição que viria antes de (ii) para isso. Note que se fizermos um movimento, voltarmos para o movimento anterior seria o mesmo que realizar esse movimento novamente. Porém, se vermos quais posições conseguimos chegar a partir de (ii), notaremos que ela não muda, ou seja, não tem como ter chego nela de qualquer outra posição diferente!

4.



Temos que $\angle ADB = \angle DBA = \alpha$ (pois $\triangle ADB$ é isósceles) e $\angle ACE = \angle CEA = \beta$ (pois $\triangle ACE$ é isósceles).

Então $\angle CDA = \angle ABE = 180° - \alpha \implies \angle DAC = \angle EAB = \alpha - \beta = \gamma$ (pois a soma dos ângulos internos dos triângulos são 180°).

Agora, basta ver que $\angle ALD = \angle LDA = 180° - 2\gamma = \angle AKE = \angle KEA$ (pois são isósceles). Então $\angle ALP = \angle PKA$, logo $ALKP$ é cíclico e, análogamente $\angle KEA = \angle LDA$, portanto $ADEP$ também é isósceles ■

---

5. Assumindo que tal coloração é possível, suponha que as cores sejam $1, 2, 3$ e que $f(x)$ seja a cor de x.

Então assuma que $f(1) = 1$ e seja a o menor inteiro tal que $f(a) \neq f(1)$, ou seja, o primeiro número com cor diferente do 1. Supondo $f(a) = 2$, como todas as cores aparecem no mínimo uma vez, existe um b tal que $b > a$ e $f(b) = 3$, no caso, existe algum número com a 3ª cor (que é a última cor que aparece pela 1ª vez).

Simulado OBM - Ampulheta do Saber
Nível 1 - (6° ou 7° ano)

Soluções

Olhando para os números 1 e b temos que $f(b+1) = 2$ (pois 1 e b tem cores diferentes, logo $b+1$ tem a 2ª cor). E $2b+1$ tem a 1ª cor, pois $f(b) = 3$ e $f(b+1) = 2$. Sendo que $a+1$ tem a 3ª, $a+1+1 = a+2$ tem a 2ª, $a+3$ a 3ª $\ldots$ $2b+1$ tem a 2ª ou a 3ª cor (pois todo número depois de a tem a cor 2 ou 3 dependendo da paridade), mas $f(2b+1) = 1$, absurdo! Logo não é possível fazer tal coloração.