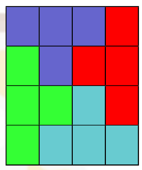
Simulado OBM - Ampulheta do Saber
Nível 2 - (8° ou 9° ano)

Olimpíada Brasileira de Matemática

---

4. Um tabuleiro 4x4 é dividido em 16 casas brancas unitárias. Duas casas são ditas vizinhas se elas possuem um lado em comum (cada casa é vizinha dela mesma). Um movimento consiste em escolher uma casa e colorir os vizinhos de branco para preto e de preto para branco. Depois de exatamente n movimentos, todas as 16 casas ficaram pretas. Determine todos os valores de n.

Solução: Note que se com a movimentos é possível, com $a + 2$ também é possível, pois é so clicar duas vezes na mesma casa. Note que temos que n é pelo menos 4, pois cada movimento colore no máximo 5 casas, logo se n fosse no máximo 3, ia pintar no máximo 15 casas e não seria possível colorir o tabuleiro inteiro. Perceba que com 4 é possível, basta fazer a seguinte configuração:



Ou seja, é possível fazer com 4, 6, 8, ..., agora vamos mostrar que com n impar é impossível, para isto, tome a seguinte tabela:

a_1	a_2	a_3	a_4
a_5	a_6	a_7	a_8
a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}
a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}

Onde a_i vai ser a quantidade de vezes que aquela casa foi clicada, então queremos que $a_1+\cdots+a_{16}$ seja par, para isto note que as casas ao redor de a_1 mais o mesmo, deve ser impar, ou seja, $a_1+a_2+a_5$ é impar, de modo analogo temos as outras condições e somando todas elas temos a soma de 16 impares que é par sendo a soma $3(a_1+a_4+a_{13}+a_{16})+4(a_2+a_3+a_8+a_{12}+a_{15}+a_{14}+a-9+a_5)+5(a_6+a_7+a_{10}+a_{11} \equiv a_1+a_4+a_6+a_7+a_{10}+a_{11}+a_{13}+a_{16} \equiv 0 \pmod 2$, logo basta mostrar que a soma das "bordas" é par. Assuma que toda congruência é módulo 2, se $a_2 \equiv a_3$, $a_8 \equiv a_{12}$, $a_{15} \equiv a_{14}$ e $a_9 \equiv a_5$, então acabou, portanto suponha sem perda de generalidade que $a_2 \equiv 1$ e $a_3 \equiv 0$. Como $a_1 + a_2 + a_6 + a_3 \equiv 1 \rightarrow a_1 + a_6 \equiv 0$ e $a_1 + a_5 + a_6 + a_9 \equiv 1 \rightarrow a_5 + a_9 \equiv 1$, então um deles é 0 e o outro é 1. Usando esse argumento repetidas vezes, temos $a_2 + a_3 \equiv a_8 + a_{12} \equiv a_{15} + a_{14} \equiv a_9 + a_5 \equiv 1$, logo a soma deles é par, como queriamos demonstrar. Então todo n que funciona é n par maior ou igual a 4.

5. Um número de $6n$ digitos é divisivel por 7. Prove que se mover o último digito da esquerda para a direita (digito das unidade) para o começo do número, então o número ainda é divisivel por 7.

Solução: Inicialmente temos o número $10x + y$, com $0 \leq y \leq 9$ e $10^{6n-1} \leq x < 10^{6n}$ e sabemos que 7 divide tal número, então movendo o último dígito, o número se torna $y \cdot 10^{6n-1} + x$. Pelo pequeno teorema de fermat, sabemos que $10^6 \equiv 1 \pmod 7 \to 10^{6n} \equiv 1^n = 1 \pmod 7$, e sabemos que 7 divide $y \cdot 10^{6n-1} + x$ se e somente se 7 divide $10(y \cdot 10^{6n-1} + x) = y \cdot 10^{6n} + 10x$, pois 10 é coprimo com 7, portanto basta que 7 divida $y + 10x$, porém esse é o nosso número inicial, então 7 divide o novo número, como queriamos provar.

---

6. Seja $n \geq 4$ um inteiro. Encontre todas as soluções reais positivas do seguinte sistema de $2n$ equações:

$$\begin{array}{ll}
a_1 = \dfrac{1}{a_{2n}} + \dfrac{1}{a_2}, & a_2 = a_1 + a_3, \\
a_3 = \dfrac{1}{a_2} + \dfrac{1}{a_4}, & a_4 = a_3 + a_5, \\
a_5 = \dfrac{1}{a_4} + \dfrac{1}{a_6}, & a_6 = a_5 + a_7 \\
\vdots & \vdots \\
a_{2n-1} = \dfrac{1}{a_{2n-2}} + \dfrac{1}{a_{2n}}, & a_{2n} = a_{2n-1} + a_1
\end{array}$$

Solução: Perceba que se $a_2 = a_4 + \cdots = a_{2n} = 2$ e $a_1 = a_3 + \cdots = a_{2n-1} = 1$, então satisfaz o enunciado, vamos mostrar que está é a única solução real positiva. Inicialmente, vamos ver o que acontesse se existir alguém com índice par e seu valor maior ou igual a 2, assuma sem perda de generalidade que $a_2 \geq 2$, logo como $a_2 = a_1 + a_3$, temos que um deles é pelo menos 1 e o outro, no máximo 1, como as equações são cíclicas, podemos assumir $a_3 \geq 1$ e $a_1 \leq 1$, como $1 \leq a_3 = \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_4} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{a_4} \to a_4 \leq 2$, e como $a_4 = a_3 + a_5$, temos $a_5 \leq 1$, portanto $1 \geq a_5 = \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_6} \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{a_6} \to a_6 \geq 2$, seguindo esse argumento indutivamente, temos que a_4, a_8, a_{12}, ..., são todas no máximo 2 e a_2, a_6, a_{10}, ..., são todas no mínimo 2. Se n é impar, então $a_{2n} \geq 2$, logo, pela ciclicidade, temos $a_2 \leq 2$, porém $a_2 \geq 2$, então todas as desigualdades tem que ser igualdades e temos a nossa solução inicial.

Assim, suponha n par, porém note que $a_2 + a_6 + \cdots + a_{2n-2} \leq n$ e $a_4 + a_8 + \cdots + a_{2n} \geq n$, porém $a_2 + a_6 + \cdots + a_{2n-2} = a_4 + a_8 + \cdots + a_{2n} = a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1}$, então tem que ocorrer tudo igualdade também. Portanto, suponha que $a_{2k} < 2$, então temos $a_{2k+1} > 1$, pois se $a_{2k+1} \leq 1$, então $\frac{1}{a_{2k}} + \frac{1}{2_{2k+2}} \leq 1$, mas $\frac{1}{2} < \frac{1}{a_{2k}}, \frac{1}{a_{2k+2}}$, logo $a_{2k+1} > 1$, então $2 > a_{2k} = a_{2k-1} + a_{2k+1} > 2$, absurdo! Portanto, a única solução real positiva é $a_{2k} = 2$ e $a_{2k+1} = 1$.