Simulado OBM - Ampulheta do Saber

Nível 2 - (8° ou 9° ano)

Olimpíada Brasileira de Matemática

Soluções

---

1. Seja $\boxed{(1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}}$ (1). Então, como o conjugado ($\overline{a+b\sqrt{2}} = a - b\sqrt{2}$) é multiplicativo, $\overline{(1+\sqrt{2})^n} = \overline{a_n + b_n\sqrt{2}} \implies \boxed{(1-\sqrt{2})^n = a_n - b_n\sqrt{2}}$ (2).

Logo, podemos descobrir a_n e b_n explicitamente com (1) e (2). Somando (1) e (2), obtemos que $2a_n = (1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n \implies \boxed{a_n = \frac{1}{2}((1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n)}$ (3) e subtraindo (2) de (1) temos $2b_n\sqrt{2} = (1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n \implies$ $\boxed{b_n\sqrt{2} = \frac{1}{2}((1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n)}$ (4).

Sendo que, ao fazermos casos base ($(1+\sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{2} = \sqrt{9} + \sqrt{8}$ e $(1+\sqrt{2})^3 = 7+5\sqrt{2} = \sqrt{49}+\sqrt{50}$), percebemos que um deles (m ou $m-1$) sempre é quadrado perfeito, que no nosso caso seria o a_n^2. Então, como $(1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2} = \sqrt{{a_n}^2} + \sqrt{2{b_n}^2}$, basta provar que ${a_n}^2 = 2{b_n}^2 \pm 1$. Ou seja, queremos que ${a_n}^2 - 2{b_n}^2 = \pm 1$.

Mas nós temos a_n e b_n explicitamente, então agora basta verificar a conta. Elevando (3) e (4) ao quadrado e subtraindo-as, temos: ${a_n}^2 - 2{b_n}^2 = \frac{1}{4}(((1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n)^2 - ((1+\sqrt{2}) - (1-\sqrt{2}))^2) = \frac{1}{4}(((1+\sqrt{2})^{2n} + (1-\sqrt{2})^{2n} + 2(1+\sqrt{2})^n(1-\sqrt{2})^n) - ((1+\sqrt{2})^{2n} + (1-\sqrt{2})^{2n} - 2(1+\sqrt{2})^n(1-\sqrt{2})^n)) = \frac{1}{4}(4(1+\sqrt{2})^n(1-\sqrt{2})^n)) = (1+\sqrt{2})^n(1-\sqrt{2})^n = ((1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2}))^n = (-1)^n$ $\blacksquare$. Então, se n é par, $m = {a_n}^2$ e $m-1 = 2{b_n}^2$, senão $m = 2{b_n}^2$ e $m - 1 = {a_n}^2$.

---

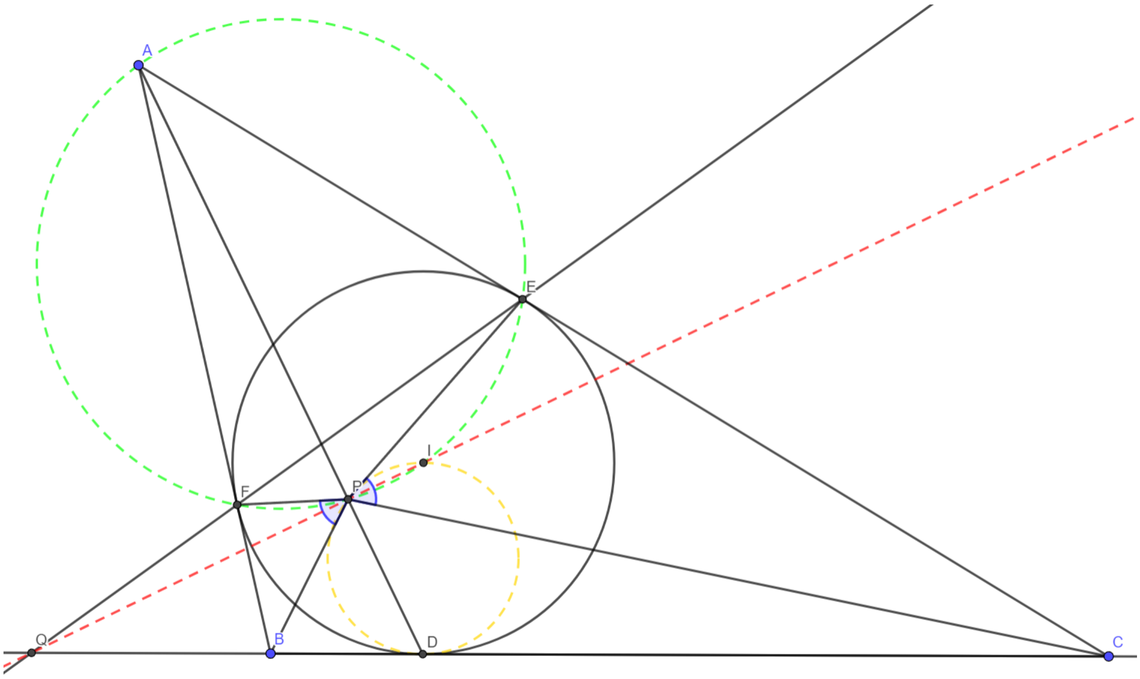
2. Se em dado momento os números no quadro são $a_1, a_2, \dots, a_k$, defina $S_k = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_k}$. Provaremos que ao operar, S_k não muda. Ou seja, que $S_k = S_{k-1}$. Suponha, sem perda de generalidade, que João operou em a_1 e a_2, então $S_{k-1} = \frac{1}{\frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2}} + \cdots + \frac{1}{a_k} = \frac{a_1 + a_2}{a_1 a_2} + \cdots + \frac{1}{a_k} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_k} = S_k$ $\square$ Portanto, dado que os números iniciais são $a_1, a_2, \dots, a_n$, $S_n = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} = S_{n-1} = \cdots = S_2 = S_1 = \frac{1}{a}$ onde a é o número final no quadro. Então $a = \frac{1}{S_n}$ que é constante. Portanto o número final independe da ordem das operações $\blacksquare$

Simulado OBM - Ampulheta do Saber

Nível 2 - (8° ou 9° ano)

<u>Soluções</u>

3.



Primeiramente, perceba que $I \in (AEF)$, pois $\angle IFA = \angle AEI = 90°$, logo $\angle IPA = \angle IFA = 90° \implies \angle DPI = 90°$. Portanto, ID é diâmetro da circunferência (IDP), sendo que $ID \perp BC$, então (IDP) é tangente a (DEF).

Agora, olhe para as circunferências (AEF), (DEF) e (IDP). Por centro radical, sabemos que o eixo radical das circunferências (AEF) e (DEF) que é EF, (AEF) e (IDP) que é IP e (DEF) e (IDP) que é BC (pois elas são tangentes em D) concorrem, então, sendo $Q = BC \cap EF$, sabemos que Q, P e I são colineares.

Mas, como $\angle DPI = 90° \implies \angle QPD = 90°$. Agora, perceba que, se chamarmos $K = AD \cap (DEF)$ e $L = AD \cap EF$ temos que $(K, D; E, F) = -1$ ($KDEF$ é um quadrilátero harmônico pois as tangentes a (DEF) por E e F se encontram em DK). Porém, projetando $(K, D; E, F)$ por D em EF, temos que $(L, Q; E, F) = -1$. Por fim, projetando $(L, Q; E, F)$ por A em BC, temos que $(D, Q; C, B) = -1 = (B, C; Q, D)$.

Então, sabemos que $BCQD$ é uma quádrupla harmônica e que $\angle QPD = 90°$, logo P está no círculo de Apolônio de BC por D, portanto PD é bissetriz de $\angle BPC$, sendo que $\angle APF = \angle AIF = \angle FIA = \angle FPA$ (por Teorema dos Bicos) e conseguimos que $\angle BPD = \angle DPC$, então $\angle FPB = \angle CPE$ ■