# Simulado OBM - Ampulheta do Saber
## Nível 3 - (Ensino Médio)

**4.** Suponha que $a_1, a_2, \ldots, a_n$ e $b_1, b_2, \ldots, b_n$ são números reais tal que

$$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 - 1)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2 - 1) > (a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n - 1)^2.$$

Prove que $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 > 1$ e $b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2 > 1$.

**Solução:** Vamos chamar de $A = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$, $B = b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2$ e de $C = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$. Por Cauchy-Schwarz, temos que $\sqrt{AB} \geq C$ e pelo enunciado, temos que $(A-1)(B-1) > (C-1)^2 \to AB - C^2 > A + B - 2C$, a ideia é tentar trabalhar com quadrados pois sabemos que eles são sempre maiores ou iguais a 0 e tentar trabalhar com as raizes de $A$ e de $B$. Temos então $AB - C^2 > A + B - 2C \to (\sqrt{AB} - C)(\sqrt{AB} + C) > (\sqrt{A} - \sqrt{B})^2 + 2\sqrt{AB} - 2C \to (\sqrt{AB} - C)(\sqrt{AB} + C - 2) > (\sqrt{A} - \sqrt{B})^2$, como vimos que $\sqrt{AB} > C$, então $(\sqrt{AB} - C)(\sqrt{AB} + C - 2) > (\sqrt{A} - \sqrt{B})^2 > 0 \to \sqrt{AB} + C - 2 > 0$. Por fim, sabemos que $A \leq 1 \iff B \leq 1$, e se caso isso ocorra, temos $C - 1 \geq \sqrt{AB} + C - 2 > 0 \to C > 1$, absurdo, pois teriamos $C > 1 \geq \sqrt{AB} > C$.

---

**5.** Determine o maior inteiro positivo n para o qual existe uma sequência de inteiros positivos distintos $s_1$, $s_2$, ..., $s_n$ tal que

$$s_1^{s_2} = s_2^{s_3} = \ldots = s_{n-1}^{s_n}$$

**Solução:** Inicialmente, perceba que $s_1 = 256$, $s_2 = 2$, $s_3 = 16$, $s_4 = 4$ e $s_5 = 8$ funciona, vamos tentar provar que $n \leq 5$. Suponha que $n$ é pelo menos 6, então perceba que $s_1$, $s_2$, $s_3$, $s_4$ e $s_5$ tem que ser todos potências de um mesmo $a > 1$, pois basta tomar $a$ para ser o maior divisor comum entre os expoentes da fatoração em primos do $s_1$, do $s_2$, ..., pois como os fatores primos são os mesmos, então ao tirar o mdc, o que "sobra" é exatamente o mesmo, que são os expoenttes do a, logo tome $s_2 = a^m$ e $s_3 = a^n$, com $m$ e $n$ inteiros positivos. Logo temos $s_2^{s_3} = s_3^{s_4} \Rightarrow a^{m \cdot a^n} = a^{n \cdot s_4} \Rightarrow s_4 = \frac{m \cdot a^n}{n}$ e isto deve ser potência de a, digamos $a^t$, logo $\frac{m \cdot a^n}{n} = a^t \Rightarrow n = m \cdot a^{n-t} = m \cdot a^k$, como $n$ e $m$ são distintos, então $k$ é um inteiro não nulo e $s_4 = a^{n-k}$. Com isso, como $s_2^{s_3} = s_3^{s_4} = s_4^{s_5} \Rightarrow a^{m \cdot a^n} = a^{(n-k) \cdot s_5} \Rightarrow s_5 = \frac{a^n \cdot m}{n-k}$, note que $n - k \neq 0$ pois caso contrário $k = n = m \cdot a^k \geq 2^k$, e isso so não é verdade para nenhum $k$ inteiro, logo $s_5 = \frac{a^n \cdot m}{n-k} = \frac{a^n \cdot m}{m \cdot a^k - k} = \frac{a^n}{a^k - \frac{k}{m}}$ que é o $a$ elevado a algum inteiro não nulo, logo $a^k - \frac{k}{m}$ deve ser $a$ elevado a algum inteiro. Agora vamos fazer dois casos:

- $k > 0$: Então temos $a^k - k \leq a^k - \frac{k}{m} \leq a^{k-1}$, logo $k \geq a^k - a^{k-1} \geq 2^k - 2^{k-1} = 2^{k-1}$ que é verdade para $k = 1, 2$ e ocorre igualdade, logo $a = 2$, e esses dois números nos dão as sequências 4, 2, 4, 2, ..., absurdo pois repete o dois e o quatro, e 256, 2, 16, 4 e 8, que termina depois de 5 termos.

• $k < 0$: Neste caso, como $k$ é negativo, é legal de no lugar de trabalhar com $m$, trabalhar com $n$, pois no luagr de $m$ a gente coloca $n \cdot a^{-k}$, onde $-k > 0$ então fica melhor de trabalhar. Usando que $s_1^{s_2} = s_2^{s_3} \Rightarrow s_1^{a^m} = a^{m \cdot a^n} \Rightarrow s_1 = a^{m \cdot a^{n-m}} = a^{n \cdot a^{n-k-n \cdot a^{-k}}}$, e isto tem que ser um inteiro positivo, logo temos que $n \cdot a^{n-k-n \cdot a^{-k}} \geq 1 \Rightarrow n \geq a^{k+n \cdot a^{-k}-n}$ e sabemos que $a \geq 2$ e $k + n \cdot 2^{-k} \geq 2n - 1$ para todo $k < 0$ e $n \geq 1$, pois $2^{-k} + k \geq 1$, então $k + n \cdot 2^{-k} \geq k + 2^{-k} + (n-1) \cdot 2^{-k} \geq (n-1) \cdot 2^{-k} + 1 \geq 2(n-1) + 1 = 2n - 1$, assim temos que ter $n \geq a^{k+n \cdot a^{-k}-n} \geq 2^{n-1}$, mas isso só é verdade para $n = 1$ ou $n = 2$, e vai ocorrer igualdade, logo devemos ter $2^{-k} + k = 1 \Rightarrow k = -1$ e $a \geq 2 \Rightarrow a = 2$, então isso nos dá as sequências 2, 2, 2, 2, ..., e 2, 4, 2, 4, ..., ambas inválidas. Portanto $n$ não pode ser maior que 5, então o maior valor é $n = 5$.

---

**6.** Em um grupo de 2021 pessoas, 1400 delas são *sabotadores*. Sherlock quer encontrar um sabotador. Existem algumas missões em que cada uma precisa de exatamente 3 de pessoas para serem realizadas. Uma missão falha se pelo menos um dos três participantes dessa missão for um sabotador! Em cada rodada, Sherlock escolhe 3 pessoas, envia-as para uma missão e vê se ela falha ou não. Qual é o número mínimo de rodadas que ele precisa para atingir seu objetivo?

**Solução:** A resposta é 2346. Para mostrar que 2346 funciona, vamos fazer o seguinte algoritmo: Separe uma pessoa $u$ e faça uma partição das 2020 pessoas restantes em 456 grupos de tamanho 3 e 163 grupos de tamanho 4 ($456 \cdot 3 + 163 \cdot 3 = 2020$) e seja $A_1$ $A_2$, ..., $A_{619}$ esses conjuntos. As missões vão ser para cada conjunto $A_i$, dois elementos dele, mais o $u$ que a gente separou, isso vai ser $\binom{3}{2} \cdot 456 + \binom{4}{2} \cdot 163 = 2346$ missões. Perceba que se todas falharem e $u$ não for um sabotador, então vamos ter pelo menos $456 \cdot 2 + 163 \cdot 3 = 1401$ sabotadores, absurdo, então $u$ vai ser um sabotador.

Assim, suponha que nem todas as missões são falhas e seja $\{u, v, w\}$ a primeira que não falha após $j$ missões. Perceba que se $j = 1$, é so pegar $u$ e $v$ e sair testando uma a uma, então vamos achar um sabotador com no máximo $2020 - 1400 + 1 = 621$ missões, e se $j > 1$, se $v$ ou $w$ estiver aparecido anteriormente em alguma missão, acabou com no máximo $j$ jogadas, caso contrário, teriamos $j < 2346 - 1$ e poderiamos fazer mais uma missão, colocando $u$, $v$ e alguém da primeira missão, digamos um $x$, se falhar, é porque foi essa pessoa, se não, como a missão falhou anteriormente, a outra pessoa na primeira missão que não é o $u$ e nem o $x$, é o sabotador, então nesse caso conseguimos com menos de 2346 missões.

Agora vamos tentar provar que com 2345 missões, podemos não achar um sabotador. Para isso, assuma que é possível fazer isso com 2345 missões. Suponha o caso em que todas as missões falharam e tome uma pessoa $u$ para ser um sabotador. Considere $A_1$, $A_2$, ..., $A_r$ os pares de pessoas que foram enviadas a uma missão com $u$, e seja $B_1$, $B_2$, ..., $B_s$ os conjuntos de tamanho 3 que foram enviados em uma missão juntos que $u$ não participou, logo $r + s = 2345$.

Agora pegue o grafo $G = (V, A)$ tal que $V$ é o conjunto das pessoas diferentes de $u$ e $A$ o conjunto dos $A_i$ e um único par de cada $B_i$, assim $|V| = 2020$ e $|A| = 2345$. Vamos provar que conseguimos escolher no máximo 1400 vértices tal que para cada aresta, uma das pontas é um vértice escolhido. Isso acaba o problema pois podemos tomar essas 1400 pessoas para serem sabotadores e tirar o $u$, então vamos ter duas configurações distintas (pois uma tem o $u$ como sabotador e a outra não, imagine que saimos de uma configuração e achamos uma outra configuração possível também). Para isso faça o seguinte algoritmo: A cada passo, pegue o vértice de maior grau e selecione ele, depois remova ele e suas arestas do grafo, faça isso até não haver mais arestas.

Seja $f(m, n)$ o tamanho do conjunto de vértices que possuem todas as arestas em um grafo de $n$ vértices e $m$ arestas usando o algoritmo. Então $f(m, n) \leq f(m - \Delta, n - 1) + 1 \leq f(m - \left\lceil \frac{2m}{n} \right\rceil, n - 1) + 1$, pois a soma dos graus dos vértices é $2m$, então existe um com pelo menos $\left\lceil \frac{2m}{n} \right\rceil$ de grau. Agora perceba que a razão $\frac{2m}{n}$ diminui, uma vez que $\frac{2m}{n} > \frac{2m - 2\cdot\left\lceil \frac{2m}{n} \right\rceil}{n-1} \iff 2mn - 2m > 2mn - 2n\left\lceil \frac{2m}{n} \right\rceil \iff n\left\lceil \frac{2m}{n} \right\rceil > m$, o que é verdade. Logo queremos $f(2345, 2020)$, sabemos que $\left\lceil \frac{2\cdot 2345}{2020} \right\rceil = 3$, então vamos tirar 3 em 3 até que $\left\lceil \frac{2(2345-3x)}{2020-x} \right\rceil = 2 \iff 1 < \frac{2(2345-3x)}{2020-x} \leq 2 \iff 2020 - x < 4690 - 6x \leq 4040 - 2x \iff 163 \leq x < 534$, e de fato $f(2345, 2020) \leq f(2345 - 3 \cdot 162, 2020 - 162) + 162 = f(1859, 1858) + 162 \leq f(1856, 1857) + 163$ e $\left\lceil \frac{2\cdot(2345-3\cdot 162)}{2020-162} \right\rceil = 3$ mas $\left\lceil \frac{2\cdot(2345-3\cdot 163)}{2020-163} \right\rceil = 2$. Fazendo esse mesmo processo, temos $\left\lceil \frac{2(1856-2x)}{1857-x} \right\rceil = 1 \iff 0 < \frac{2(1856-2x)}{1857-x} \leq 1 \iff 0 < 3712 - 4x \leq 1857 - x \iff 619 \leq x < 928$, e de fato $f(1856, 1857) \leq f(1856 - 2 \cdot 618, 1857 - 618) + 618 = f(620, 1239) + 618 \leq f(618, 1238) + 619$ e $\left\lceil \frac{2\cdot(1856-2\cdot 618)}{1857-618} \right\rceil = 2$ mas $\left\lceil \frac{2\cdot(1856-2\cdot 619)}{1857-619} \right\rceil = 1$. Por fim $f(618, 1238) \leq f(0, 1238 - 618) + 618 = 618$, assim $f(2345, 2020) \leq f(1856, 1857) + 163 \leq f(618, 1238) + 619 + 163 \leq 618 + 619 + 163 = 1400 \Rightarrow f(2345, 2020) \leq 1400$, assim, é possível escolher tais 1400 vértices.