Simulado OBM - Ampulheta do Saber

Nível 3 - (Ensino Médio)

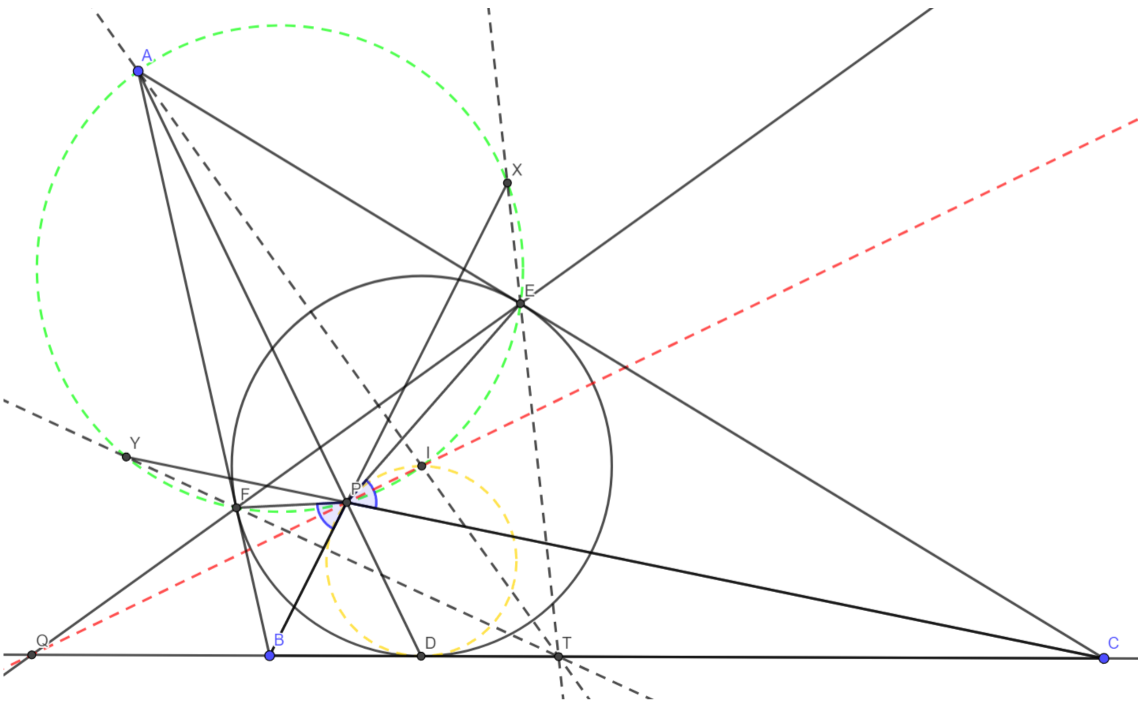
Soluções

1. Para resolver esse problema, vamos pensar como se estivessemos colocando os números de 1 a n^2 em ordem, um por vez. A cada momento, diremos que uma casa é ruim se ela ainda não foi preenchida mas tem uma casa vizinha que foi.

Suponha que o problema é falso, ou seja, que existe alguma forma de preencher o tabuleiro tal que todas as casas vizinhas diferem por no máximo $n-1$. Note então que, a todo momento, não poderá haver n ou mais casas ruins, porque senão, para preencher todas as casas ruins atuais, demoraria no mínimo n "movimentos" (teríamos que preencher no mínimo n vezes antes de terminarmos de preencher todas as casas ruins daquele momento), mas, olhando para a última dessas casas ruins preenchidas, se um de seus vizinhos iniciais for k, preencheríamos ela com no mínimo $k+n$, absurdo!

Então, sabemos que a todo momento há no máximo $n-1$ casas ruins. Porém, se olharmos para o momento anterior ao que preenchemos nossa primeira linha ou coluna, sem perda de generalidade uma linha, sabemos que nessa configuração não há nenhuma coluna preenchida. Portanto, olhando para a linha que será preenchida, ela tem exatamente $n-1$ casas preenchidas, sendo que a casa não preenchida dessa linha é ruim e, para cada uma das casas preenchidas dela, sabemos que, na sua coluna, há pelo menos uma casa ruim (pois a coluna não está totalmente preenchida e, há pelo menos uma casa preenchida nela). Mas isso significaria que nesse momento haveriam no mínimo n casas ruins (uma para cada coluna), absurdo! Logo, sempre existirão duas casas vizinhas que diferem por no mínimo n ■

2.



Soluções

Primeiramente, perceba que $I \in (AEF)$, pois $\angle IFA = \angle AEI = 90°$, logo $\angle IPA = \angle IFA = 90° \implies \angle DPI = 90°$. Portanto, ID é diâmetro da circunferência (IDP), sendo que $ID \perp BC$, então (IDP) é tangente a (DEF).

Agora, olhe para as circunferências (AEF), (DEF) e (IDP). Por centro radical, sabemos que o eixo radical das circunferências (AEF) e (DEF) que é EF, (AEF) e (IDP) que é IP e (DEF) e (IDP) que é BC (pois elas são tangentes em D) concorrem, então, sendo $Q = BC \cap EF$, sabemos que Q, P e I são colineares.

Mas, como $\angle DPI = 90° \implies \angle QPD = 90°$. Agora, perceba que, se chamarmos $K = AD \cap (DEF)$ e $L = AD \cap EF$ temos que $(K, D; E, F) = -1$ ($KDEF$ é um quadrilátero harmônico pois as tangentes a (DEF) por E e F se encontram em DK). Porém, projetando $(K, D; E, F)$ por D em EF, temos que $(L, Q; E, F) = -1$. Por fim, projetando $(L, Q; E, F)$ por A em BC, temos que $(D, Q; C, B) = -1 = (B, C; Q, D)$.

Então, sabemos que $BCQD$ é uma quádrupla harmônica e que $\angle QPD = 90°$, logo P está no círculo de Apolônio de BC por D, portanto PD é bissetriz de $\angle BPC$, sendo que $\angle APF = \angle AIF = \angle FIA = \angle FPA$ (por Teorema dos Bicos) e conseguimos que $\angle BPD = \angle DPC$, então $\angle FPB = \angle CPE$.

Mas, $\angle YPB = \angle CPX \implies \angle YPF = \angle EPX \implies \overline{XE} = \overline{YF}$, então $XEYF$ é um trapézio isósceles. Portanto $XY \parallel EF$. Sendo $T = XE \cap YF$, temos que $\overline{TE} = \overline{TF}$, pois $\angle FET = \angle TFE$ (porque $\angle YXE = \angle FYX$ e $XY \parallel EF$), então T está na mediatriz de EF, sendo que AI é a mediatriz de EF (porque $\overline{AE} = \overline{AF}$ e $\overline{IE} = \overline{IF}$, então A e I estão na mediatriz de EF, logo tal reta é AI), portanto T está em AI.

Agora, basta provar que T está em BC. Para isso, basta aplicar o Teorema de Pascal no hexágono cíclico $(AFYPXE)$, pois então obtemos que $AF \cap PX = B$, $FY \cap XE = T$ e $YP \cap EA = C$ são colineares, logo T está na reta BC. Portanto EX, FY, AI e BC concorrem ■

---

3. A única garantia que temos entre 20 inteiros consecultivos é que todos os restos módulo 20 aparecem exatamente uma vez (sistema completo de resíduos módulo 20). Ou seja, a liberdade que temos para escolher d é seu resto módulo 20, que é o mesmo que escolher seu resto módulo 4 e 5.

Então, tomaremos d dentre os 20 tal que $d \equiv 3 \pmod 4$ e $d \equiv 0 \pmod 5$ ($d \equiv 15 \pmod{20}$), pois assim, teremos que d possui um divisor primo p tal que $p \equiv 3 \pmod 4$ (caso contrário, teríamos $d \equiv 1 \pmod 4$).

Simulado OBM - Ampulheta do Saber
Nível 3 - (Ensino Médio)

Soluções

Olimpíada Brasileira de Matemática

Note que d não pode ser quadrado perfeito, pois $d \equiv 3 \pmod 4$ (3 não é resíduo quadrático módulo 4). Então $n\sqrt{d}$ não é inteiro, portanto temos que se $\lfloor n\sqrt{d} \rfloor = m$, $m < n\sqrt{d} < m+1 \implies m^2 < n^2d < (m+1)^2$. Mas $\{n\sqrt{d}\} = n\sqrt{d} - \lfloor n\sqrt{d} \rfloor = n\sqrt{d} - m$, multiplicando ambos os lados por $n\sqrt{d} + m$ (para termos diferença de quadrados e sumir com $\sqrt{d}$ na direita), obtemos que $(n\sqrt{d}+m)\{n\sqrt{d}\} = n^2d - m^2$.

Sendo que $m < n\sqrt{d}$, portanto $2n\sqrt{d}\{n\sqrt{d}\} > (n\sqrt{d}+m)\{n\sqrt{d}\} = n^2d - m^2 \implies n\sqrt{d}\{n\sqrt{d}\} > \dfrac{n^2d - m^2}{2}$.

Porém, queremos provar que $n\sqrt{d}\{n\sqrt{d}\} > \dfrac{5}{2}$, ou seja, basta que $\dfrac{n^2d-m^2}{2} \geq \dfrac{5}{2} \iff n^2d - m^2 \geq 5$, mas $n^2d > m^2 \implies n^2d \geq m^2 + 1 \implies n^2d - m^2 \geq 1$, então temos que mostrar que $n^2d - m^2 \neq k$, $k \in \{1,2,3,4\}$:

- **Caso 1.** $(n^2d - m^2 = 1)$ Para isso, vimos que existe um divisor primo p de d tal que $p \equiv 3 \pmod 4$, então analisando módulo p obtemos que $m^2 \equiv -1 \pmod p \implies \left(\dfrac{-1}{p}\right) = 1$ mas, pelo critério de Euler, $\left(\dfrac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} = -1$ pois $p \equiv 3 \pmod 4$, absurdo!

- **Caso 2.** $(n^2d - m^2 = 2)$ Como $d \equiv 0 \pmod 5$, analisando módulo 5 obtemos que $m^2 \equiv 3 \pmod 5$, mas 3 não é resíduo quadrático módulo 5, absurdo!

- **Caso 3.** $(n^2d - m^2 = 3)$ Como $d \equiv 0 \pmod 5$, analisando módulo 5 obtemos que $m^2 \equiv 2 \pmod 5$, mas 2 não é resíduo quadrático módulo 5, absurdo!

- **Caso 4.** $(n^2d - m^2 = 4)$ Para isso, vimos que existe um divisor primo p de d tal que $p \equiv 3 \pmod 4$, então analisando módulo p obtemos que $m^2 \equiv -4 \pmod p \implies \left(\dfrac{-4}{p}\right) = 1 \implies \left(\dfrac{-1}{p}\right) = 1$ mas, pelo critério de Euler, $\left(\dfrac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} = -1$ pois $p \equiv 3 \pmod 4$, absurdo!

Então $n^2d - m^2 > 0$ e $n^2d - m^2 \neq k$, $k \in \{1,2,3,4\}$, portanto $n^2d - m^2 \geq 5 \implies n\sqrt{d}\{n\sqrt{d}\} > \dfrac{5}{2}$ $\blacksquare$
