Ampulheta do Saber

# Simulado OBMEP 2024 - 1ª fase

## Nível 3 - (Ensino Médio)

## Soluções

---

### Questão 1 - Alternativa A

**Solução:** Note que qualquer número de dois algarismos $\overline{ab}$ escrito na base 10 pode ser expressado como $10a+b$, onde b é o dígito das unidades e a o das dezenas. E $1 \leq a, b \leq 9$ é a única restrição que temos sobre os inteiros $a$ e $b$.

Então a soma de um número $\overline{ab}$ de dois algarismos com o seu contrário é $\overline{ab} + \overline{ba} = (10a + b) + (10b + a) = 11(a + b)$ e, a única restrição sobre $a + b$ é que $2 \leq a + b \leq 18$, pois $a$ e $b$ são dígitos na base 10.

Logo os números que podem ser escritos como soma de um número de dois algarismos e seu contrário são da forma $11k$, onde $2 \leq k \leq 18$ e a única alternativa que não é dessa forma é a **A**, pois 56 não é múltiplo de 11.

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

### Questão 2 - Alternativa C

**Solução:** Substituindo, conseguimos que $f(a) = 7a^2 + 2a^2 + 2b = 2b + 9 \implies 9a^2 = 9 \implies a = \pm 1$. Como $a > 0$, então $a = 1$. Daí, $f(b) = 7b^2 + 2ab + 2b = 7b^2 + 2b + 2b = 4b + 7a = 4b + 7 \implies 7b^2 = 7$. Como $a \neq b$, então só podemos ter $b = -1$. Logo, $a + b = 1 + (-1) = 0$.

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

### Questão 3 - Alternativa D

**Solução:** Temos: $\overbrace{999\ldots999}^{16} = 1\overbrace{00\ldots00}^{16} - 1 = 10^{16} - 1 = (10^8 + 1)(10^8 - 1)$

E também: $1\underbrace{00\ldots00}_{7}1 = 1\underbrace{00\ldots00}_{8} + 1 = 10^8 + 1$

Então: $\dfrac{\overbrace{999\ldots999}^{16}}{1\underbrace{00\ldots00}_{7}1} = \dfrac{(10^8 + 1)(10^8 - 1)}{10^8 + 1} = 10^8 - 1 = \underbrace{99999999}_{8}$

Portanto a resposta é $9 \cdot 8 = 72$

# Simulado OBMEP 2024 - 1ª fase

## Nível 3 - (Ensino Médio)

## Soluções

## Questão 4 - Alternativa B

**Solução:** Casos totais: $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ (tratamos bolas de cores iguais como distinguíveis)

Casos favoráveis: $3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 6 = 36$ (temos 3 possibilidades para escolher a bola verde, 2 para a azul e 1 para a roxa, além de multiplicar pelo número de permutações de ordenação das 3 retiradas que é $3! = 6$)

Logo a probabilidade de Joãozinho sortear 3 bolas de cores distintas é $\dfrac{36}{120} = \dfrac{3}{10}$.

---

## Questão 5 - Alternativa C

**Solução:** Seja x a quantidade de maçãs e y o preço falso das laranjas, então ele comprou x+4 laranjas e achou que o preço das maçãs era y+2, então o preço previsto foi $x(y+2)+(x+4)y = 2xy+2x+4y$. Porém, o preço correto seria $(x+4)(y+2)+xy = 2xy+2x+4y+8$. Portanto ele vai ter que pagar 8 reais a mais.

---

## Questão 6 - Alternativa E

**Solução:** Somando 2025 de ambos os lados, temos que:

$N + 2025 = 1 + (1+9) + (1+99) + \cdots + (1 + 999\ldots99)$

$\implies N + 2025 = 10^0 + 10^1 + 10^2 + 10^3 + \cdots + 10^{2024}$.

Pela fórmula da PG, temos que: $N + 2025 = \dfrac{10^{2025}-1}{9} = \underbrace{111\ldots11111}_{2025}$

Daí, temos que

$$N = \underbrace{111\ldots11111}_{2025} - 2025 = \underbrace{1111\ldots11}_{2020}09086$$

Logo, a soma de algarismos de $N$ é: $2020 \cdot 1 + 0 + 9 + 0 + 8 + 6 = 2043$.

# Simulado OBMEP 2024 - 1ª fase

## Nível 3 - (Ensino Médio)

## Soluções

---

### Questão 7 - Alternativa E

**Solução:** Note que $1000 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$, logo, como o único algarismo que é múltiplo de 5 é ele mesmo, (pois $2 \cdot 5 = 10 > 9$) então o número terá que conter 3 dígitos iguais a 5 para multiplicados contribuirem com $5^3$ que está na fatoração de 1000. E, para os últimos 2 algarismos, eles poderão ser 2 e 4 ou 1 e 8, para contribuirem com os 3 fatores 2.

Então os números com essa propriedade vão ter seus dígitos sendo uma permutação de 5,5,5,2,4 ou 5,5,5,1,8. E para cada caso teremos que escolher onde colocar o 2 e o 4 que os 5 já estarão determinados, o mesmo vale para o 1 e o 8.

Sendo que para colocar o 2 teremos 5 possibilidades e para colocar o 4, agora teremos apenas 4 possibilidades, totalizando $5 \cdot 4 = 20$ para o primeiro caso e $5 \cdot 4 = 20$ para o segundo, então a quantidade de números com tal propriedade é $20 + 20 = 40$.

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

### Questão 8 - Alternativa C

**Solução:** Seja $x$ a quantidade inicial de pessoas na festa. Temos que $60\% \cdot x$ é a quantidade de mulheres. Por outro lado, após a van chegar, temos que $58\% \cdot (x + 20)$ são mulheres. Porém, como na van não tinha mulheres, então podemos igualar: $\frac{60}{100}x = \frac{58}{100}(x + 20) = \frac{58}{100}x + \frac{58}{100}20 \implies \frac{2}{100}x = \frac{58}{100}20 \implies x = 580.$

Daí, tinham $40\% \cdot 580$ pessoas que gostavam de dançar $+20$ homens que gostam de dançar. Logo, ao todo são $232 + 20 = 252$ pessoas ficaram até o final.

## Questão 9 - Alternativa A

**Solução:** Seja $x$ o comprimento em metros da pista. A distância entre Bruno e Caio era de 10 metros quando Arthur cruzou a linha de chegada, e era de 16 metros quando Bruno cruzou a linha de chegada. Vemos assim que, durante o intervalo de tempo no qual Arthur e Bruno completaram a corrida, Bruno correu 36 metros enquanto Caio correu 30, logo

$$\frac{\text{velocidade de Caio}}{\text{velocidade de Bruno}} = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}.$$

Como Bruno cruzou a linha de chegada 16 metros à frente Caio, temos a equação $\frac{5}{6} = \frac{x-16}{x} \implies 5x = 6(x-16) = 6x - 96 \implies x = 96$ que é o comprimento em metros da pista.

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

## Questão 10 - Alternativa D

**Solução:** A costureira gastou 299 centavos. Como as blusas são iguais, em cada uma foi gasta a mesma quantia, logo, o número $n$ de blusas é um divisor de 299. Como $299 = 13 \times 23$ e tanto 13 quanto 23 são primos, as possibilidades para $n$ são 1, 13, 23 e 299. O enunciado exclui a possibilidade $n = 1$ (são várias blusas) e a possibilidade $n = 299$ é excluída observando que, como um botão custa 4 centavos, a quantia gasta em qualquer blusa é maior que 1 centavo. Se $n = 23$, o total em botões e laços gasto em cada blusa seria 13 centavos, o que não pode acontecer pois não é possível gastar exatamente 13 centavos com botões de 4 centavos e laços de 7 centavos. Resta a possibilidade $n = 13$, nesse caso, o total gasto em botões e laços em cada blusa é de 23 centavos, que corresponde a 4 botões e 1 laço.

Ampulheta do Saber

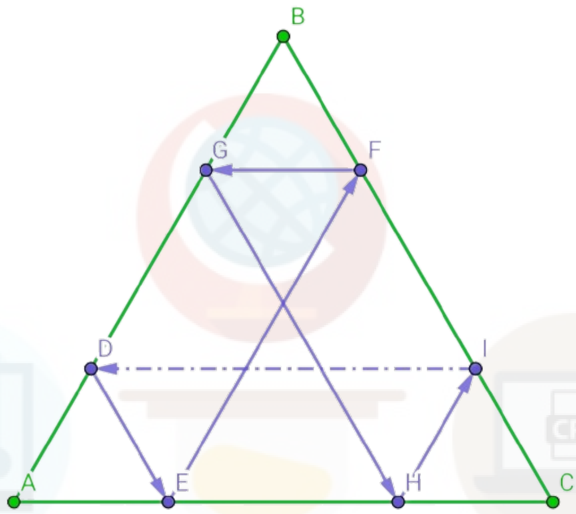
# Simulado OBMEP 2024 - 1ª fase

## Nível 3 - (Ensino Médio)

## Soluções

### Questão 11 - Alternativa A

**Solução:** Pode-se observar que após 6 batidas, a bola volta para a posição inicial.




Por paralelismo e triângulo equilátero, temos $\overline{DA} = \overline{DE} = \overline{BF} = \overline{BG} = \overline{IH} = \overline{IC}$, logo como $\overline{DA} = \overline{IC}$ temos que $DI$ é paralelo a $AC$. Então as batidas se repetem de 6 em 6, como $2024 = 6 \cdot 337 + 2$, temos que ela vai ser análoga a batidas que deixam resto 2 na divisão por 6. Das alternativas, apenas a alternativa **A**, 8 batidas deixa resto 2 na divisão por 6, logo a resposta é alternativa **A**.

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

### Questão 12 - Alternativa D

**Solução:** Sabemos que $x^2 + \frac{1}{x^2} = 3$, elevando ao cubo ambos os lados da expressão, obtemos $3^3 = 27 = (x^2 + \frac{1}{x^2})^3 = x^6 + 3x^2 + 3\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^6} = x^6 + \frac{1}{x^6} + 3(x^2 + \frac{1}{x^2}) = x^6 + \frac{1}{x^6} + 9 \implies x^6 + \frac{1}{x^6} = 18$. Mas, agora se elevarmos isso ao quadrado, obtemos $18^2 = 324 = (x^6 + \frac{1}{x^6})^2 = x^{12} + 2x^6\frac{1}{x^6} + \frac{1}{x^{12}} = x^{12} + \frac{1}{x^{12}} + 2 \implies x^{12} + \frac{1}{x^{12}} = 322$.

Ampulheta do Saber

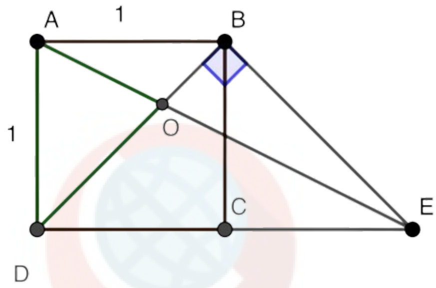
# Simulado OBMEP 2024 - 1ª fase

**Nível 3 - (Ensino Médio)**

## Soluções

---

## Questão 13 - Alternativa B

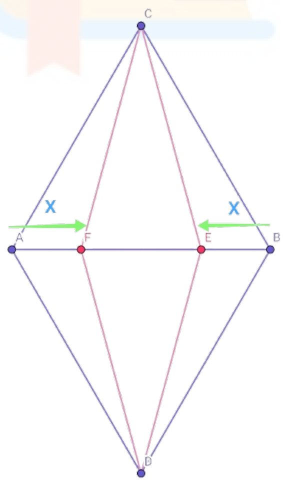



**Solução:** Note que DBE é retângulo isóceles, logo BC é altura e portanto mediana $\Rightarrow \overline{CE} = \overline{DC} = 1$. Pelo Teorema da Bissetriz Interna (no triângulo $AED$, pois $\angle EDO = \angle ODA = 45°$) $\dfrac{\overline{AO}}{\overline{OE}} = \dfrac{1}{2}$. Portanto $\dfrac{[AOD]}{[DOE]} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow [DOE] = 2[AOD] \Rightarrow \dfrac{1 \cdot 2}{2} = 1 = [DAE] = [AOD] + [DOE] = [AOD] + 2[AOD] \Rightarrow [AOD] = \frac{1}{3}$

Obs.: $[XYZ]$ denota a área do triângulo $XYZ$.

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

## Questão 14 - Alternativa B



**Solução:** Inicialmente, perceba que $f(x) = f(1-x)$, então basta resolver para $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$. Note que como o lado do triângulo é 1, é facil calcular por Pitágoras que a altura é $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Logo a área de $ABC$ e $ABD$ é $\frac{1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ e a área de $ACBD$ é $\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Note que as áreas dos triângulos $ACF$, $BCE$, $ADF$ e $BDE$ são as mesmas, que é $\frac{x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{x\sqrt{3}}{4}$, logo $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} - 4 \cdot \frac{x\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}(1-2x)}{2}$ para $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$. Se $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ então $f(x) = f(1-x) = \frac{\sqrt{3}(1-2(1-x))}{2} = \frac{\sqrt{3}(2x-1)}{2} = \frac{|\sqrt{3}(1-2x)|}{2}$. Portanto, temos que $f(x) = \frac{|\sqrt{3}(1-2x)|}{2}$ para todo $0 \leq x \leq 1$.

---

## Questão 15 - Alternativa C

**Solução:** Podemos supor que $a \geq b$ sem perder a generalidade. Então $a^2 < a^2 + 4b + 1 \leq a^2 + 4a + 1 < a^2 + 4a + 4 = (a+2)^2$, como $a^2 + 4b + 1$ é um quadrado perfeito entre $a^2$ e $(a+2)^2$, então $a^2 + 4b + 1 = (a+1)^2 = a^2 + 2a + 1 \implies a = 2b$. Então como sabemos que $b^2 + 4a + 1$ também é um quadrado perfeito e $a = 2b$, logo $b^2 + 8b + 1$ é quadrado perfeito. Mas $(b+1)^2 = b^2 + 2b + 1 < b^2 + 8b + 1 < b^2 + 8b + 16 = (b+4)^2$, portanto, de forma análoga temos que $b^2 + 8b + 1$ é $(b+2)^2$ ou $(b+3)^2$. Mas se $b^2 + 8b + 1 = (b+2)^2 = b^2 + 4b + 4 \implies b = \frac{3}{4}$ que não é inteiro! Logo $b^2 + 8b + 1 = (b+3)^2 = b^2 + 6b + 9 \implies b = 4 \implies a = 8$, então o valor da soma dos números que Marcos escolheu é $a + b = 8 + 4 = 12$.

Ampulheta do Saber

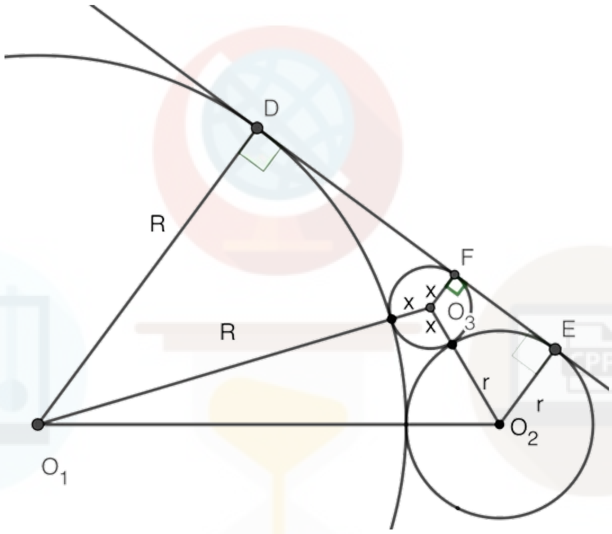
# Simulado OBMEP 2024 - 1ª fase

## Nível 3 - (Ensino Médio)

## Soluções

### Questão 16 - Alternativa B

**Solução:** Seja os raios das circunferências $R = 4$, $r = 1$ e $x$ que queremos achar. Aplicaremos o Teorema de Pitágoras múltiplas vezes.




Olhando para $O_1DFO_3$:

$$(R+x)^2 - (R-x)^2 = DF^2 \Rightarrow DF = \sqrt{4Rx}$$

Olhando para $FEO_2O_3$:

$$(r+x)^2 - (r-x)^2 = EF^2 \Rightarrow EF = \sqrt{4rx}$$

Olhando para $DEO_2O_1$:

$$ED^2 = (R+r)^2 - (R-r)^2 \Rightarrow EF = \sqrt{4Rr}$$

Logo, $DE = DF + FE \Rightarrow \sqrt{4Rr} = \sqrt{4Rx} + \sqrt{4rx} \Rightarrow 4\sqrt{x} + 2\sqrt{x} = 4 \Rightarrow \sqrt{x} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow x = \dfrac{4}{9}$.

# Simulado OBMEP 2024 - 1ª fase

## Nível 3 - (Ensino Médio)

## Soluções

## Questão 17 - Alternativa E

**Solução:** Vamos trocar as sentenças pelas frases análogas a elas. A frase "não gosta de maçã, então não gosta de laranja" é análogo a dizer que "se gosta de laranja, então gosta de maçã". A frase "não gosta de maçã e não gosta de banana então não gosta de uva" é análogo a "gosta de uva então gosta de maçã ou gosta de banana". E, por fim, "todo mundo não gosta de maçã ou não gosta de banana" é análogo a "ninguém gosta de maçã e banana". Assim fica mais fácil de entender o problema. Note que Alice mentiu, pois ela gosta de laranja e todo mundo que gosta de laranja, gosta de maçã. Bia também mentiu pois ninguém gosta de maçã e banana, Cecília mentiu pois ela gosta de laranja e não gosta de maçã. Daniela mentiu também pois não é possível gostar apenas de uva sem gostar de maçã ou banana. Logo a única que não mentiu foi Eduarda, que gosta de uva, laranja e maçã.

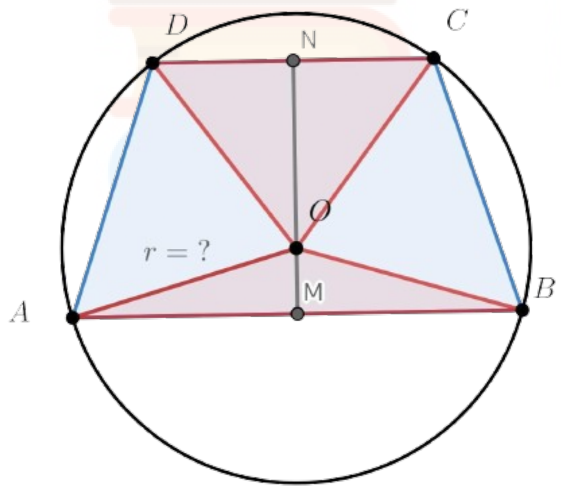
- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

## Questão 18 - Alternativa D

**Solução:** Perceba que, ao analisar apenas os restos, a cada 3 números consecutivos irão aparecer todos os restos de 0 a 2, pois caso contrário, como o padrão se repete de 3 em 3, se um resto aparece pelo menos 2 vezes no bloco de 3, ele vai aparecer pelo menos $2 \cdot 5 = 10$ vezes e não temos nenhum resto que aparece 10 vezes. Analogamente, a cada 5 números consecutivos, vão ter todos os restos de 0 a 4. Como 3 e 5 são primos entre si, ao fixar um padrão de restos para o 3 e um padrão de restos para o 5, vai aparecer todas as combinações de restos possíveis (por exemplo, um número que deixa resto 0 por 3 e resto 2 por 5), e pelo Teorema Chinês dos Restos, conseguimos garantir que todos esses números existem e são números entre 1 e 15.

Note que um mesmo número não vai ser escrito duas vezes, pois cada número entre 1 e 15 determina um único par $(a, b)$ onde $a$ é o resto na divisão por 3 e $b$ é o resto na divisão por 5. Agora basta contar quantos padrões de 3 e de 5 nós podemos ter. Para isso, fixe uma posição, ela e as suas 2 posições a direita tem $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ opções para o resto na divisão por 3 e ela e suas 4 casas a direita tem $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$, logo a quantidade de formas de preencher é $120 \cdot 6 = 720$ maneirass, porém a questão está desconsiderando as permutações circulares, como 720 é a contagem com todas as permutações, acabamos contando 15 vezes cada, nas 15 rotações. Então a resposta é $\frac{720}{15} = 48$.

## Questão 19 - Alternativa B




**Solução:** Seja $O$ o centro da circunferência, $OM$ a altura do triângulo $OAB$ relativa à base $AB$ e $ON$ a altura do triângulo OCD relativa à base $CD$. Como $AB$ é paralelo à $CD$, segue que os pontos $M$, $O$ e $N$ estão alinhados e que $MN$ é a altura do trapézio.

## Soluções

Vamos denotar $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = \overline{OD} = r$, $\overline{OM} = x$ e $\overline{ON} = y$. A altura do trapézio é, assim, igual a $x + y = 27$cm. Como o triângulo $OAB$ é isósceles com base $AB = 48$cm, segue, pelo Teorema de Pitágoras, que

$$r^2 = 24^2 + x^2$$

De forma análoga, como o triângulo $OCD$ é isósceles com base $CD = 30$cm, segue, pelo Teorema de Pitágoras, que

$$r^2 = 15^2 + y^2$$

Subtraindo a segunda equação da primeira, e usando que $y^2 - x^2 = (y + x)(y - x)$, temos

$$(y + x)(y - x) = 24^2 - 15^2 = 351$$

Embora o desenho indique que o centro da circunferência esteja dentro do trapézio, este fato pode ser confirmado pois se o centro da circunferência estivesse no exterior do trapézio, teríamos as seguintes equações:

$$\begin{cases} x - y = 27 \\ y + x = \dfrac{351}{27} = 13 \end{cases}$$

que resultariam em $x = 20$ e $y = -7$ o que é impossível já que $y > 0$. Assim, o centro da circunferência é interior ao trapézio e temos as seguintes equações:

$$\begin{cases} x + y = 27 \\ y - x = \dfrac{351}{27} = 13 \end{cases}$$

que resultam em $x = 7$ e $y = 20$. Pelo Teorema de Pitágoras, segue que

$$r^2 = 24^2 + 7^2 = 576 + 49 = 625$$

e, portanto,

$$r = \sqrt{625} = 25$$

## Questão 20 - Alternativa C

**Solução:** Perceba que para cada par a seguir, não podemos escolher ambos os números (pois um é o dobro do outro): $(1,2)$, $(5,10)$, $(6,12)$, $(7,14)$, $(8,16)$ e $(9,18)$. E não há dois pares citados com um mesmo número. Logo, temos que deixar de escolher no mínimo 6 números (um de cada par). Portanto o máximo de números que podemos escolher é $20 - 6 = 14$. Um exemplo de tal conjunto é $\{1, 3, 4, 5, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$.