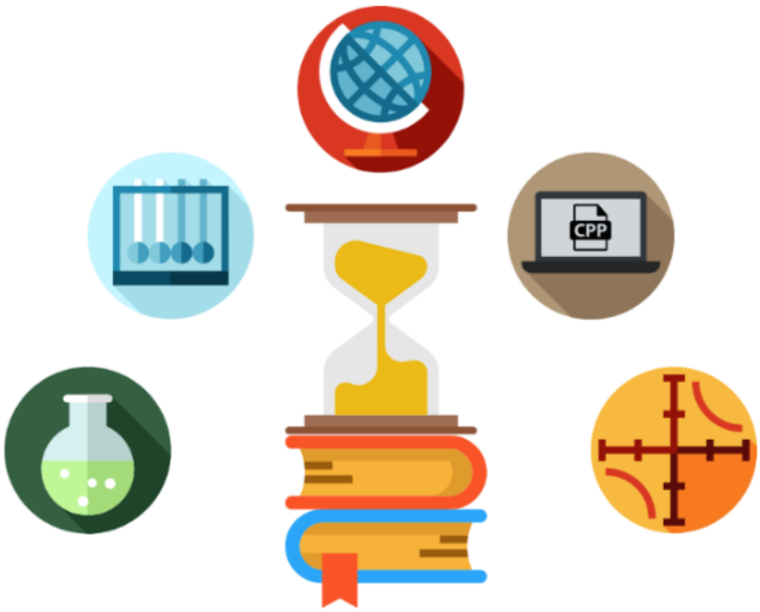
Introdução a Desigualdades

Gustavo Mesquita



1 Introdução

1.1 Contextualização

Uma das propriedades mais fundamentais dos números reais é que estes podem ser ordenados, de tal maneira podemos sempre comparar dois números e dizer qual é menor, maior ou se são iguais.

Podemos pensar em uma reta numérica, na qual associamos cada real a um ponto dela, e definindo uma direção positiva para direita, podemos dizer que se um número está à direita de outro, então ele é maior.

Com essa simples característica dos reais podemos atacar diversos problemas em diversas áreas da matemática, seja resolvendo inequações, cotando valores ou até mesmo em geometria!

1.2 Esclarecimentos

Quando dizemos que um número é maior que outro ("mais à direita na reta numérica") matematicamente escrevemos $a > b$ (a maior que b), caso a seja menor escrevemos $a < b$. Ainda à o caso em que não temos certeza se a é maior ou igual então escrevemos $a \geq b$ e se for menor ou igual escreve-se $a \leq b$.

É importante citar também que ao longo do material será utilizado algumas técnicas de fatoração, então o leitor deverá estar acostumado com as mais básicas como $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

---

2 Definição

Além da analogia com a reta numérica podemos definir: $a > b \iff a - b > 0$, analogamente $a < b \iff a - b < 0$.

---

3 Propriedades básicas

Uma desigualdade funciona quase como uma equação, em que podemos manipular em ambos lados para chegar em uma conclusão, porém temos que tomar cuidados em relação ao sentido da inequação ($\geq$ ou $\leq$). Note também que podemos ler a inequação $10 > 7$ como $7 < 10$ sem alterar o significado.

Considerando sempre números reais podemos enumerar as seguintes propriedades:

1. Se $a \geq b$ e $b \geq c$ então $a \geq c$
2. Se $a \geq b$ então $a + c \geq b + c$
3. Se $a \geq b \Rightarrow -a \leq -b$
4. Se $a \geq 0$ e $b \geq 0$ então $ab \geq 0$
5. Se $a \leq 0$ e $b \leq 0$ então $ab \geq 0$
6. Se $a \geq 0$ e $b \leq 0$ então $ab \leq 0$
7. Se $c > 0$ então $ac > bc \Rightarrow a > b$ e se $c < 0$ então $a < b$.

8. Se $a \geq b \geq 0$ e $c \geq d \geq 0$ então $ac \geq bd$
9. Se $a \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{a} \leq 1$
10. $a^2 \geq 0$ (**Muito importante!!!**)

3.0.1 Demonstrações

1. Pensando na reta numérica, se a está à direita de b e b está à direita de c, então a está à direita de c. Tente pensar em exemplos numéricos.
2. Se temos dois números na reta numérica e transladarmos ambos por c a ordem se mantém.
3. Se a está à direita de b na reta numérica, multiplicar ambos por -1 refletiria ambos pela origem, o que deixaria $-a$ mais à esquerda de $-b$.
4. Um número positivo multiplicado por um positivo sempre é positivo.
5. usando (3): $-a \geq 0$ e $-b \geq 0$ logo como $(-a)(-b) = ab$ segue de (4).
6. $-b \geq 0$ logo $(a)(-b) \geq 0$ logo $ab \leq 0$
7. $ac > bc \Rightarrow (a-b)c > 0$ então pela definição e por (4) (5) e (6) os resultados seguem.
8. Note que por (7): $ac \geq bc$ e $bc \geq bd$, logo por (1): $ac \geq bd$.
9. $a \cdot \frac{1}{a} = 1$, logo como $a \geq 1$ temos $\frac{1}{a} \leq 1$. Tente generalizar esta propriedade para outros números além do 1. Cuidado com os negativos.
10. Segue de (4) e (5).

4 Exemplos

Exemplo 1

Prove que se $x \geq 0$:

$$x + \frac{1}{x} \geq 2$$

Solução. Note que usando as propriedades (4), (2) e (10) temos:

$$x + \frac{1}{x} \geq 2 \iff x^2 + 1 \geq 2x \iff x^2 - 2x + 1 \geq 0 \iff (x-1)^2 \geq 0 \blacksquare$$

Como estaremos usando fortemente as propriedades básicas, vou omiti-las agora em diante, então certifique-se de tê-las em mente para continuar.

Exemplo 2 (olimpíada Tcheca)

Seja a, b, c, d números reais tais que $a+d=b+c$. Prove que:

$$(a-b)(c-d)+(a-c)(b-d)+(d-a)(b-c) \geq 0$$

Solução. Expandindo os termos em parentêses temos que provar:

$$ac-da-bc+db+ab-ad-cb+cb+db-dc-ab+ac \geq 0 \iff$$

$$2(ac+db-da-bc) \geq 0 \iff (a-b)(c-d) \geq 0$$

Utilizando agora o fato de $a+d=b+c \Rightarrow (a-b)=(c-d)$.
Logo $(a-b)(c-d)=(a-b)^2 \geq 0$ ■

Exemplo 3

Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$. Prove a seguinte desigualdade:

$$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$$

Solução. Note que:

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0$$

$$\iff 2(a^2+b^2+c^2)-2(ab+bc+ca) \geq 0$$

$$\iff a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca \blacksquare$$

Exemplo 4

Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$. Prove que:

$$a^4+b^4+c^4 \geq abc(a+b+c)$$

Solução. Pelo exemplo 3:

$$a^4+b^4+c^4=(a^2)^2+(b^2)^2+(c^2)^2 \geq (ab)^2+(bc)^2+(ca)^2$$

Olhando para o lado direito:

$$(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2 \geq abc^2+bca^2+acb^2=abc(a+b+c)$$

Portanto:

$$a^4+b^4+c^4 \geq abc(a+b+c) \blacksquare$$

4.1 MA ≥ MG

Desigualdade das médias. Sejam x, y reais positivos. Então é válido a desigualdade:

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

Igualdade se e somente se $x = y$.

Prova.

$$(x-y)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$$
$$\iff x^2 + 2xy + y^2 \geq 4xy \iff (x+y)^2 \geq 4xy$$
$$\iff \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

Para o caso de igualdade teríamos que ter $(x-y)^2 = 0 \Rightarrow x = y$.

4.2 Aplicações

Exemplo 1

Sejam x, y reais positivos. Prove que:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$$

Solução.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x+y}{xy}$$

logo queremos que:

$$\frac{x+y}{xy} \geq \frac{4}{x+y} \iff (x+y)^2 \geq 4xy$$

Verdade por MA MG.

. . . .

Exemplo 2

Sejam x, y, z reais positivos tais que $x + y + z = 1$. Prove que:

$$\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \geq 1$$

Solução. Note que por MA MG:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{xy}{z} + \frac{xz}{y}\right) \geq \sqrt{\frac{xy}{z}\frac{xz}{y}} = x$$

Somando ciclicamente nas variáveis:

$$\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y} \geq x+y+z=1 \blacksquare$$

. . . .

Exemplo 3 (ARML)

Em um triângulo ABC, de lados a, b, c, tem que $2a^2+4b^2+c^2=4ab+2ac$. Ache o valor de $\cos B$ (ângulo oposto ao lado b).

Solução. Apesar do problema de primeira vista parecer puramente de geometria, com um pouco de criatividade podemos notar que por MA MG:

$$a^2+c^2 \geq 2\sqrt{a^2c^2}=2ac$$

E também:

$$a^2+4b^2 \geq 2\sqrt{4a^2b^2}=4ab$$

Somando ambas inequações:

$$2a^2+4b^2+c^2 \geq 4ab+2ac$$

Isto nos dá que a identidade fornecida pelo enunciado é exatamente o caso de igualdade do nosso resultado. Portanto, olhando para os casos de igualdade nas MA MG usadas teríamos:

$$a^2=c^2 \Rightarrow a=c$$

$$a^2=4b^2 \Rightarrow a=2b$$

Para terminar basta utilizar lei dos cossenos no ângulo requerido:

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B \Rightarrow b^2=4b^2+4b^2-8b^2\cos B \Rightarrow \cos B=\frac{7}{8}$$

. . . .

5 Problemas

Problema 1

Sejam a, b reais positivos. Prove que:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$$

. . . .

Problema 2

Prove que para todo x real a seguinte desigualdade é válida:

$$2x^4 + 1 \geq 2x^3 + x^2$$

. . . .

Problema 3 (Nesbitt)

Prove que para reais positivos a, b, c vele:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{b+a} \geq \frac{3}{2}$$

. . . .

Problema 4

Sejam x, y reais positivos. Prove que:

$$\sqrt{\frac{x^2}{y}} + \sqrt{\frac{y^2}{x}} \geq \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

. . . .

Problema 5

Para um x real positivo ache o valor mínimo de $\frac{32}{n} + \frac{n}{2}$.

. . . .

Problema 6

Mostre que a média quadrática é maior que a aritimética para x, y reais positivos.

$$\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \geq \frac{x+y}{2}$$

Problema 7

Sejam a, b, c reais positivos. Mostre que:

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{c}\right)\left(c+\frac{1}{a}\right) \geq 8$$

6 Bibliografia

- **Inequalities, Zdravko Cvetkovski**
- **Inequalities, Radmila Bulajich**