Marcação de ângulo - Parte 1

João Victor Silva dos Santos

1 Introdução

1.1 A técnica mais poderosa da Geometria Plana

Marcação de ângulo é a técnica mais importante da geometria em olimpíadas, saber marcar ângulo bem é o que faz de algumas pessoas boas em geometria. Neste material (parte 1 e 2) vamos ir do básico, como ângulos entre retas paralelas cortadas por transversais até manipulação de ângulos na circunferências e algumas coisas envolvendo trigonometria, sempre tentando fazer os problemas do jeito mais olímpico possível. Aproveitem o material!!

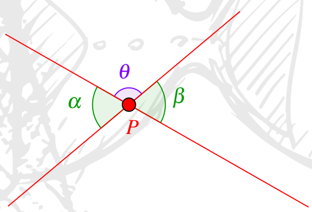
2 Conceitos básicos

2.1 Ângulos entre retas

Provavelmente você já ouviu falar dos ângulos opostos pelo vértice, é mais um conceito em que você vai usar em toda questão que diz o seguinte:

> Dado duas retas concorrentes no ponto P, então os ângulos opostos pelo vértice P são iguais.

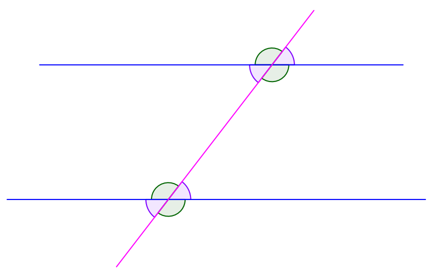
Prova.



Bem, temos os ângulos α, β e θ e queremos provar que $\alpha = \beta$. Para isso, note que $\alpha + \theta = 180$ e $\theta + \beta = 180$, logo $\alpha = \beta$ ■

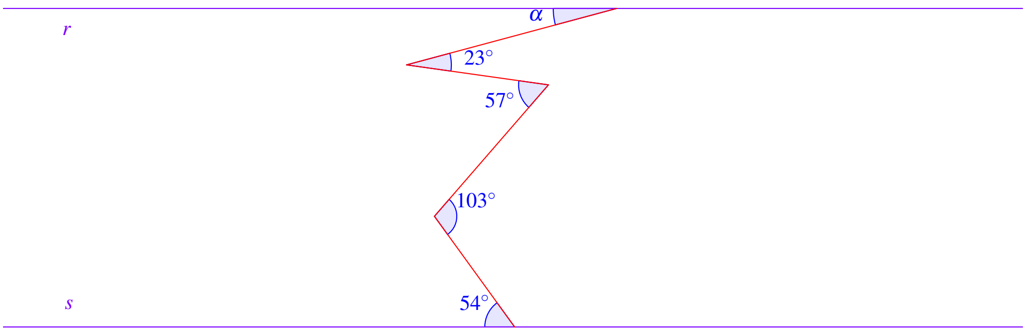
Agora que já vimos como marcar ângulo entre retas concorrentes, vamos ver como marcar entre retas paralelas, porém, elas estão cortadas por uma transversal:

> Dados duas retas paralelas cortadas por uma transversal, os ângulos de mesma cor são iguais

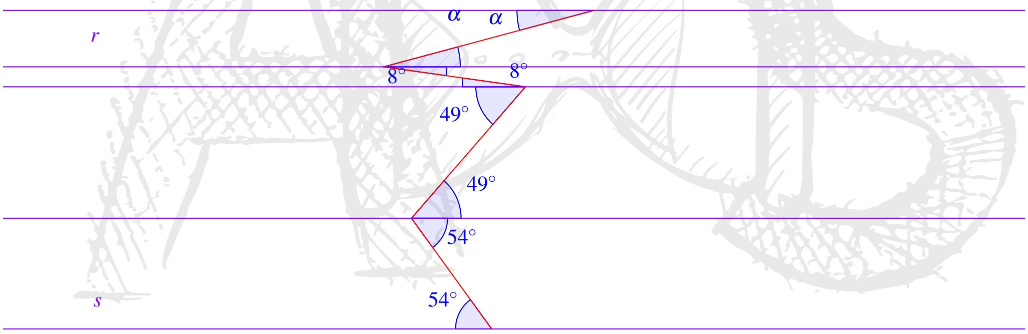


Esse resultado é analogo ao quinto postulado de euclides, pois se não fossem iguais, existia dois deles, internos e do mesmo lado que somariam menos que 180, então eles iriam se encontrar neste mesmo lado. Com esses dois resultados, já conseguimos resolver alguns problemas:

Exemplo 1. Na figura a seguir, sabendo que $r \parallel s$ (r é paralela a s), ache o ângulo α.

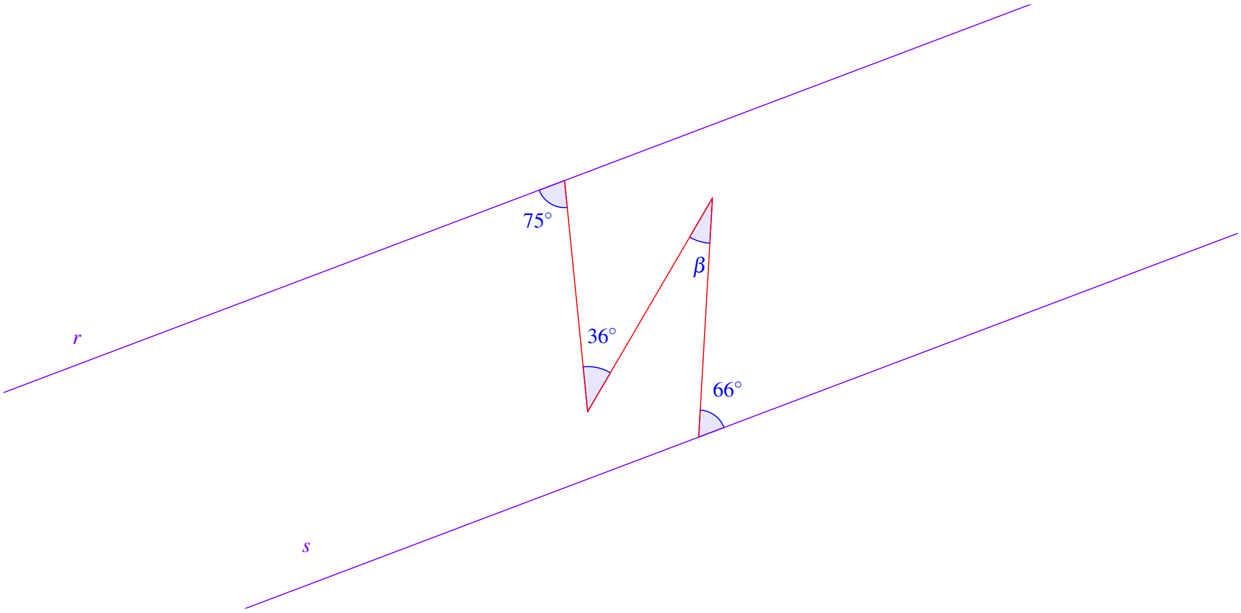


Solução. Trace retas paralelas a r e s passando pelos vértices, usando o teorema das retas paralelas, temos os seguintes ângulos:

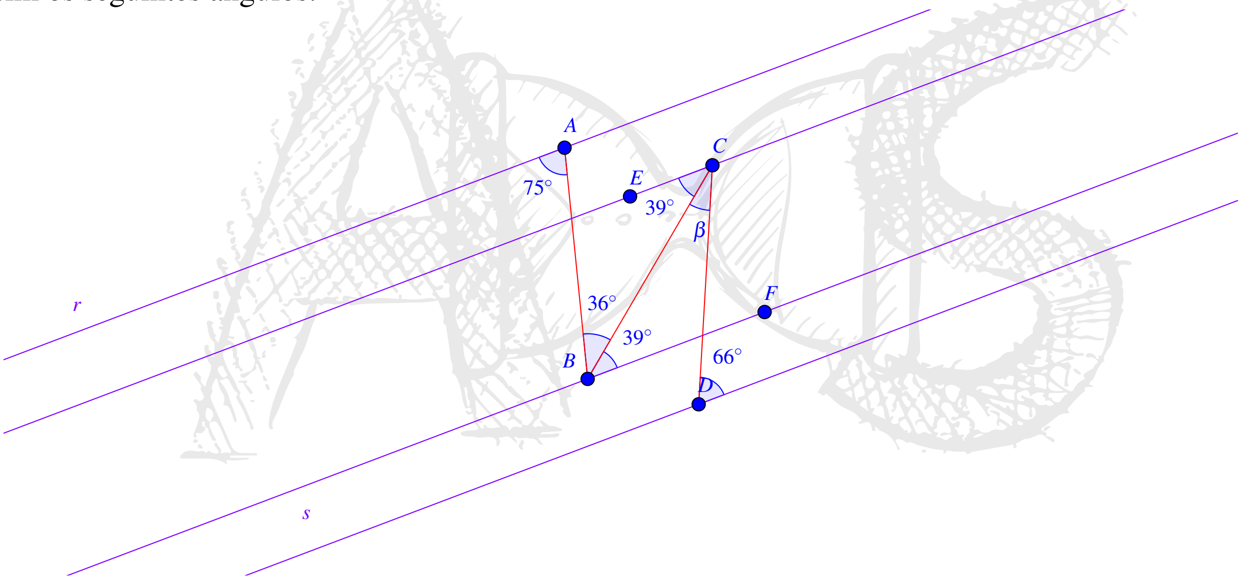


Pois se começar do vértice de baixo e indo para cima, temos $103 = 54+49$, $57 = 49+8$, $23 = 8+15$, então temos $\alpha = 15$.

Exemplo 2. Na figura abaixo, r e s são retas paralelas, determine o ângulo β.



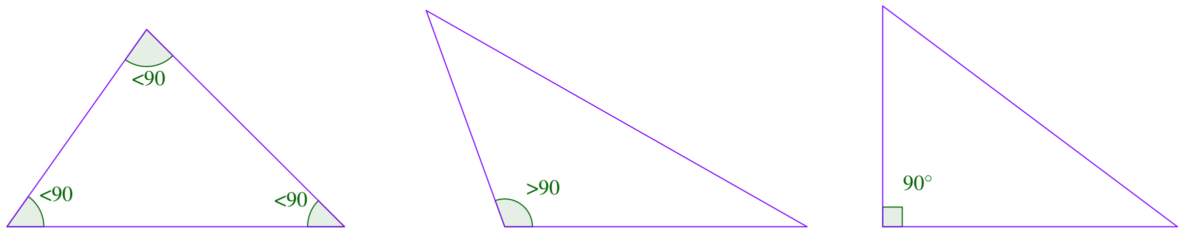
Solução. Trace novamente as paralelas a r e s passando pelos dois vértices do problema, tendo assim os seguintes ângulos:



Perceba que $\angle FBA = 75$ pelo teorema das paralelas, mas $\angle CBA = 36$, assim $\angle FBC = 75 - 36 = 39$, então $\angle ECB = 39$ pelo teorema das paralelas, assim $\angle ECD = 39 + \beta$, e por fim, pelo teorema das paralelas, $\angle ECD = 39 + \beta = 66 \rightarrow \beta = 27$

2.2 Ângulos no triângulo

Inicialmente, vamos passar algumas classificações de triângulos em relação aos ângulos dele para você ficar mais por dentro dos nomes. Um triângulo é chamado de **acutângulo** quando tem todos os seus ângulos agudos, ou seja, todos menores que 90. Um triângulo é chamado de **obtusângulo** quando tem um ãngulo obtuso, ou seja, um ângulo maior que 90 (com o teorema seguinte, vamos provar que um triãngulo não pode ter dois ângulos obtusos). Por fim, um triângulo é dito **retângulo** quando possui um ângulo reto, ou seja, um ângulo de 90

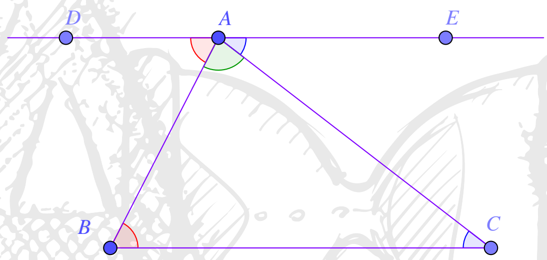


Triângulo acutângulo, obtusângulo e retângulo, respectivamente

Agora vamos provar uma das marcações de ângulos mais poderosas de todas, provavelmente vai ser o teorema que mais vamos usar neste material (diretamente ou indiretamente), que diz o seguinte:

A soma dos ângulos internos de um triângulo é 180.

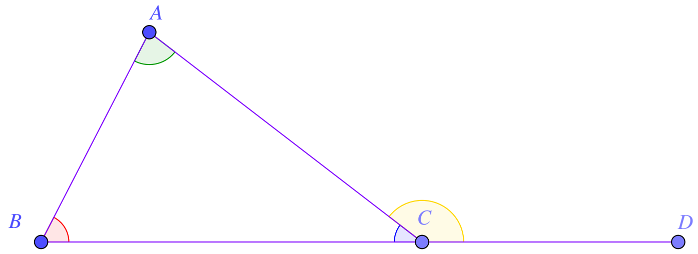
Prova. Seja $\triangle ABC$ um triângulo ABC, vamos chamar de $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ os ângulos $\angle BAC$, $\angle CBA$ e $\angle ACB$.



Assim, tome uma reta DE paralela a BC que passa por A (igual a figura acima, com D e E quaisquer). Pelo teorema das retas paralelas, temos $\angle DAB = \angle ABC = \hat{B}$ e $\angle EAC = \angle ACB = \hat{C}$, logo $180 = \angle DAE = \angle DAB + \angle BAC + \angle EAC = \hat{B} + \hat{A} + \hat{C}$, então a soma dos ângulos internos é 180 ■
Perceba que com esse teorema, não podemos ter dois ou mais ângulos obtusos, pois se dois ângulos forem maior que 90, a soma dos ângulos internos vai ser maior que 180, o que é um absurdo.

Teorema. A medida de um ângulo externo de um triângulo é igual a soma das medidas dos ângulos internos não adjacentes a ele.

Prova.

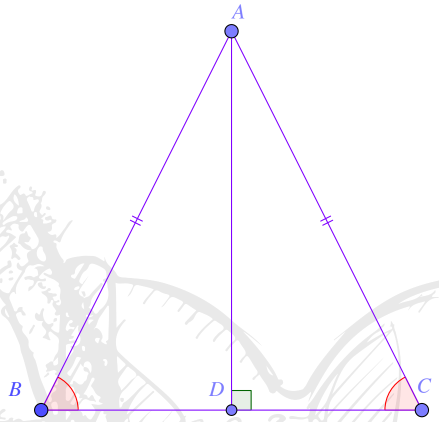


Temos que, pelo teorema anterior, $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180 \Rightarrow \hat{A} + \hat{B} = 180 - \hat{C} = \angle DCA =$ ângulo externo do C, logo a medida do ângulo externo do C é a soma dos ângulos internos não adjacentes a ele, ou seja, do B e do A ■. Vamos uar esse teorema para facilitar a conta e quando a gente quiser, por exemplo, trabalhar com quadrilateros cíclicos, onde é bom ver ângulos externos.

Teorema. Dizemos que um triângulo é **isósceles** quando ele possui dois lados de mesmo tamanho, assim dizemos que o terceiro lado é a base. Prove que o triângulo ABC é isósceles de base BC (ou seja, $AB = AC$) se, e somente se, $\angle ABC = \angle ACB$.

Prova. Perceba que esse problema é um problema de "se, e somente se" ou seja, se ele é isósceles, então vamos tentar provar que $\hat{B} = \hat{C}$, essa é chamada de "ida", ou seja, usando apenas o fato dele ser isósceles, vamos provar a condição de ângulo e tem a "volta", ou seja, assumindo que a condição de ângulo é verdade, vamos provar que o triângulo é isósceles.

Atenção: MUITO cuidado quando for fazer questões de "se e somente se" e acabar esquecendo de provar alguns dos lados ou usar algo do outro caso que não foi provado para concluir a questão. Agora vamos para a prova desse nosso teorema.



($\Rightarrow$ Ida, suponha ABC isósceles) Tome D o pé da altura de A em BC, note que os triângulos ADB e ADC são retângulos e com dois lados iguais ($AD = AD$ e $AB = AC$), portanto, por pitágoras, temos $DC = DB$, assim os triângulos ADB e ADC são congruentes por LLL (lado, lado, lado) e $\angle ABC = \angle ACB$.

($\Leftarrow$ Volta, suponha $\angle ABC = \angle ACB$) Tome D novamente para ser o pé da altura de A em BC, logo temos $\angle ADB + \angle ABD = \angle ADC + \angle ACD$, pois $\angle ADB = \angle ADC = 90$, assim, como a soma do ângulo de um triângulo é 180, temos que o suplementar desses dois triângulos, é igual, assim $\angle BAD = \angle CAD$, portanto os triângulos ABD e ACD são semelhantes, e como possuem AD em somum, então eles são congruentes e $AB = AC$ $\blacksquare$. Tome um tempo para perceber que essas duas demonstrações, apesar de muito parecidas, são diferentes.

Lema. Um triângulo é **equilátero** se ele possui todos os seus lados de mesmo tamanho. Prove que um triângulo é equilátero se e somente se ele possui todos os seus ângulos iguais a 60.

Prova. Isso acontece de imediato usando o teorema anterior, se ele tiver todos os lados iguais, é so pegar os pares de lados dois a dois e ver que os três ângulos são iguais, e como a soma é 180, cada um deles vale 60, por exemplo, se o triângulo $\triangle ABC$ for equilátero, pelo nosso último teorema, temos $AB = AC \Rightarrow \hat{B} = \hat{C}$, mas $BA = BC \Rightarrow \hat{A} = \hat{C} = \hat{B} \Rightarrow 3 \cdot \hat{A} = 180 \Rightarrow \hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 60$ pois a soma dos ângulos é 180. E se os ângulos são todos iguais, é so pegar os pares de ângulos dois a dois e seus lados opostos vão ser todos iguais, ou seja, vai ser equilátero, por exemplo, se $\triangle ABC$ tem os três ângulos sendo 60, como $\hat{B} = \hat{C} = 60 \Rightarrow AB = AC$ e $\hat{A} = \hat{C} = 60 \Rightarrow BA = BC$, então $BA = BC = CA \Rightarrow$

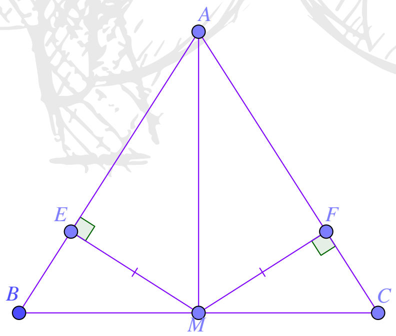
o $\triangle ABC$ é equilátero. ■

Lema. Em um triângulo isósceles, a altura, mediana e bissetriz da base são a mesma reta, além disso, se duas dessas três retas coincidirem, então o triângulo é isósceles.

Prova. Já fizemos a primeira parte quando provamos que $AB = AC \iff \hat{B} = \hat{C}$, pois ao pegar a altura AD, vimos que $\triangle BAD \equiv \triangle CAD$ (triângulo BAD congruente ao triângulo CAD), ou seja, $DB = DC \Rightarrow AD$ também é mediana e, ainda da congruência, temos que $\angle DAB = \angle DAC \Rightarrow AD$ é bissetriz. Basta provar que se dois desses coincidem, então o triângulo é isósceles.

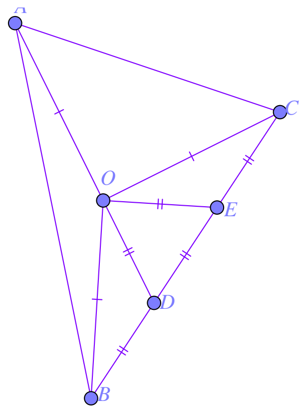
Perceba que é bem mais simples provar que é isósceles se a altura e a mediana coincidirem ou se a altura e a bissetriz coincidirem do que se a mediana e a bissetriz coincidirem. Pois se temos o $\triangle ABC$ e a altura AD, com $D \in BC$ coincidir com a mediana, então tem tanto como argumentar que a reta AD é a mediatriz de BC (pois é a perpendicular a BC que passa pelo ponto médio do mesmo), então $AB = AC$ ou usar congruência/pitágoras (pois é desse jeito que prova que $AB = AC$), pois temos $\angle ADB = \angle ADC = 90$, e como eles tem o lado AD em comum e $DB = DC$, então $AB = AC$.

E se a altura e bissetriz coincidirem então temos $\angle DAB = \angle DAC$, $\angle ADB = \angle ADC = 90$ e ainda temos o lado AD em comum, então por ALA (ângulo, lado, ângulo) temos $\triangle ADB \equiv \triangle ADC$ e consequentemente $AB = AC$. Agora se a mediana e bissetriz coincidirem, para os olimpicos de plantão que já viram o material de razão de segmento sabem da existência do teorema da bissetriz interna, então se M for o ponto médio e o pé da bissetriz, então $\frac{MB}{MC} = \frac{AB}{AC} = 1 \Rightarrow AB = AC$, portanto é isósceles, mas aqui vou apresentar outra solução nessa mesma ideia de congruências que já estamos trabalhando.



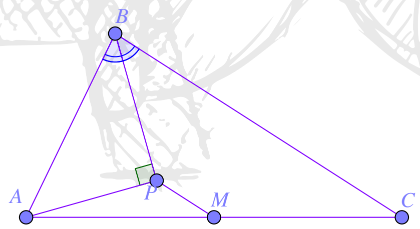
Pegue os pés das alturas de M em AB e AC e chame de E e F respectivamente. Perceba que $\angle MAE = \angle MAF$ e $\angle MEA = \angle MFA = 90$ e eles tem o lado AM em comum, portanto $\triangle MAE \equiv \triangle MAF$, então $ME = MF$, porém $MB = MC$ e $\angle MEB = \angle MFC = 90$, assim, por cateto-hipotenusa (basicamente, so fazer pitágoras para ver que o terceiro lado é igual) temos $\triangle MEB \equiv \triangle MFC$, assim $\hat{B} = \hat{C} \Rightarrow AB = AC$. ■

Exemplo 3. (OBMEP 2019 2ª Fase Problema 2 Nível 2 Na figura, $OA = OB = OC$. Os pontos A, O e D estão alinhados, e os pontos D e E no segmentos BC são tais que $BD = DE = EC = OD = OE$. Ache os ângulos $\angle ODE$, $\angle BOE$ e $\angle BAC$.

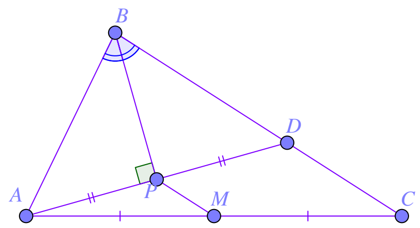


Solução. Inicialmente perceba que $\triangle ODE$ é um triângulo equilátero, dado que $DE = OD = OE$, portanto $\angle \mathbf{ODE} = \mathbf{60} = \angle DOE = \angle OED$. Agora, como $\angle ODE = 60 \Rightarrow \angle ODB = 180 - 60 = 120$, porém o $\triangle ODB$ é isósceles de base OB, assim $\angle DOB = \angle DBO = 30$, pois a soma dos ângulos internos é 180. Deste modo, $\angle BOE = \angle BOD + \angle DOE \Rightarrow \angle \mathbf{BOE} = \mathbf{90}$. Por fim, perceba que $\angle BAC = \angle OAB + \angle OAC$, porém $\triangle AOB$ é isósceles de base AB e o $\triangle AOC$ é isósceles de base AC, portanto $\angle OAB + \angle OAC = \angle OBA + \angle OCA = \frac{\angle DOB}{2} + \frac{\angle DOC}{2}$ pelo teorema do ângulo externo. Porém $\angle DOB = 30$, como vimos anteriormente, e $\angle DOC = 90$, fazendo a mesma coisa que fizemos para o ângulo $\angle BOE$, deste modo temos $\frac{\angle DOB}{2} + \frac{\angle DOC}{2} = \frac{30}{2} + \frac{90}{2} = 15 + 45 = 60$. Assim $\angle \mathbf{BAC} = \mathbf{60}$.

Exemplo 4. No triângulo ABC abaixo, BP é bissetriz do ângulo $\hat{B}$ e M é ponto médio do lado AC. Se $AB = 6$ e $BC = 10$, calcule PM.

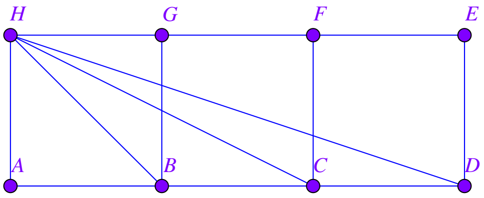


Solução:

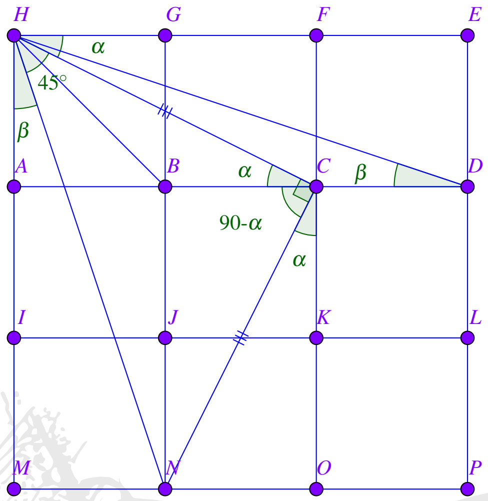


Prolongue a reta AP até encontrar o lado BC em D, note que no triângulo $\triangle ABD$ temos que BP é altura e bissetriz, portanto o triângulo é isósceles e $PA = PD$. Agora note que como $BA = BD = 6 \Rightarrow DC = BC - BD = 10 - 6 = 4$. Porém P é ponto médio de AD e M é ponto médio de AC, assim PM é base média e então $PM = \frac{DC}{2} = 2$.

Exemplo 5. Na figura abaixo, $ABGH$, $BCFG$ e $CDEF$ são quadrados. Qual o valor de $\angle ABH + \angle ACH + \angle ADH$?



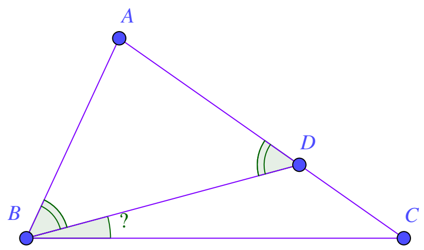
Solução.



Temos que pelo teorema das retas paralelas, $\angle ACH = \alpha = \angle CHE$. Note que por congruência de triângulos, os triângulos $\triangle HAD \equiv \triangle NMH$ são congruentes, deste modo $\angle ADH = \beta = \angle MHN$. Agora perceba que $\triangle NOC \equiv \triangle HAC$, assim $\angle OCN = \alpha = \angle ACH \Rightarrow \angle BCA = 90 - \alpha \Rightarrow BCH = 90$, porém $CH = CN$, assim $\angle ABH = 45 = \angle BHC$. Deste modo temos que $\angle ABH + \angle ACH + \angle ADH = \angle BHC + \angle CHE + \angle MHN = 90$. Deste modo o valor da soma desses ângulos é 90.

> **Exemplo 6.** No triângulo $\triangle ABC$, um ponto D é escolhido sobre AC tal que $AB = AD$. Se $\angle ABC - \angle ACB = 30$, qual o valor de $\angle CBD$?

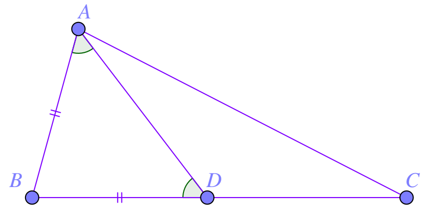
Solução. Note que como $\angle ACB = \hat{C}$ e $\angle ABC = \hat{B}$, então $\hat{B} = 30 + \hat{C}$, assim como $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180 \Rightarrow \hat{A} = 180 - \hat{B} - \hat{C} = 180 - 30 - 2\hat{C} = 150 - 2\hat{C}$, como $AB = AD$, então $\angle ABD = \angle ADB = \frac{180 - \hat{A}}{2} = \frac{30 + 2\hat{C}}{2} = 15 + \hat{C}$, porém $\hat{B} = 30 + \hat{C}$, deste modo $\angle CBD = \angle ABC - \angle ABD = (30 + \hat{C}) - (15 + \hat{C}) = 15$.



2.3 Ângulos e desigualdades

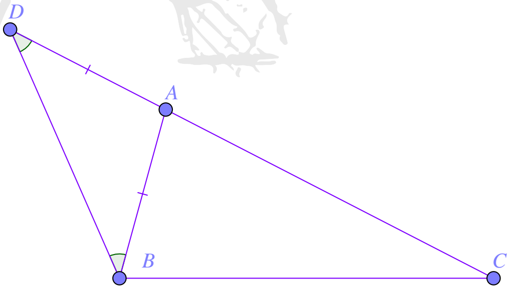
Teorema. Dado dois lados distintos de um triângulo, o maior ângulo é oposto ao maior lado.

Prova. Suponha $BC > AB$, queremos provar que $\hat{A} > \hat{C}$, então seja D um ponto em BC tal que $BA = BD$. Pelo teorema do ângulo externo, $\angle BDA = \angle DAC + \angle DCA > \angle DCA = \angle BCA$, porém $\hat{A} = \angle BAD + \angle DAC > \angle BAD = \angle BDA > \angle BCA = \hat{C}$, que era o que queriamos provar. ■



Teorema. (Desigualdade triângular) A soma de dois lados quaisquer de um triângulo é maior que o terceiro.

Prova. Seja D um ponto no prolongamento de AC por A tal que $AD = AB$. Perceba que $\triangle BAD$ é isósceles e $\angle DBC = \angle DBA + \angle ABC = \angle BDA + \angle ABC > \angle BDA = \angle BDC$, logo, pelo nosso teorema anterior, $DC > BC$, mas $DC = AD + AC = AB + AC$, portanto $AB + AC > BC$. ■ Perceba que não há nada demais com o A, então essa desigualdade também ocorre para os outros lados, inclusive, é um se e somente se, ou seja, se a, b e c são números reais positivos que satisfazem a desiguldade triângular para todo mundo (ou seja, $a + b > c$, $b + c > a$, $a + c > b$), então existe um triângulo cujo os lados possuem tamanho a, b e c. Você pode ver isso fixando uma aresta de tamanho a e pegando duas circunferências de centro nas pontas, uma de raio b e outra de raio c, como $|b - c| < a < b + c$, então existe interseção. (Tente imaginar o porque isso é verdade)

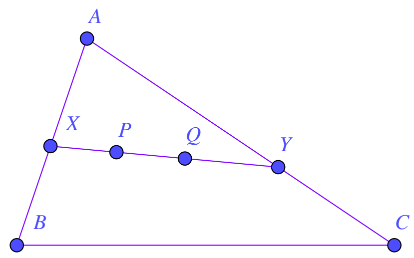


Exemplo 7. Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo (possui todos seus ângulos menores que 180), prove que $AC + BD > AB + CD$.

Solução. Como o quadrilátero é convexo, então os segmentos AC e BD se encontram em um ponto E. Pela desigualdade triângular, sabemos que $EA + ED > AD$ e $EB + EC > BC$, assim, somando as inequações, temos que $EA + EC + EB + ED > AD + BC \Rightarrow AC + BD > AB + CD$ pois $EA + EC = AC$ e $EB + ED = BD$.

> **Exemplo 8.** Prove que a distância entre quais quer dois pontos dentro de um triângulo não é maior que metade do perímetro do triângulo.

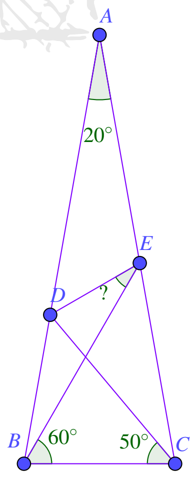
Solução.



Seja $\triangle ABC$ o triângulo e P e Q dois pontos internos, trace a reta que passa por P e por Q até encontrar o triângulo em X e Y (com eles podendo ser algum vértice) e suponha, sem perda de generalidade, que X tá em AB e Y em AC. Note que $PQ \leq XY$ e pela desigualdade triângular $XY \leq AX + AY$ e $XY \leq BX + BY \leq BX + BC + CY$, assim, $2XY \leq BC + (AX + BX) + (CY + AY) = AB + BC + CA \Rightarrow PQ \leq XY \leq \frac{AB+BC+CA}{2}$, que era o que queriamos provar. ■ Perceba que usamos $\leq$ (menor ou igual) ao inves de $<$ (menor) pois aqui estamos trabalhando com muitas coisas degeneradas, por exemplo, a primeira desigualdade poderia ser igualdade se $X = A$ e $Y = C$, onde $AX = 0$ e $AY = AC = XY$, ou seja, a desigualdade triângular com caso de igualdade vale para qualquer três pontos no plano, já o sem caso de igualdade, apenas quando temos a certeza que esses três pontos não são colineares.

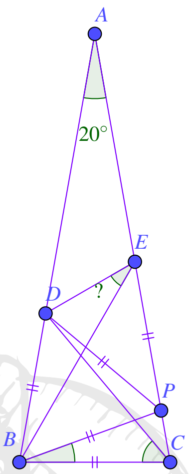
2.4 O problema do triângulo russo

> **Exemplo 9.** Sabendo que o triângulo abaixo é isósceles de base BC, ache a medida do ângulo $\angle BED$



Solução. Fazendo umas manipulações de ângulos básicas, achamos algumas coisas nada demais nesse problema, por exemplo, dado que ABC é isósceles, então $\angle ABC = \angle ACB = \frac{180-\angle BAC}{2} = 80$, logo $\angle ABE = \angle ABC - \angle EBC = 80 - 60 = 20$ e $\angle ACD = \angle ACB - \angle DCB = 80 - 50 = 30$. Se voce definir F para ser a interseção entre BE e CD, então pelo teorema do ângulo externo $\angle DFB = \angle EFC = \angle FBC + \angle FCB = 60 + 50 = 110$, assim como $\angle ABE = 20$ e $\angle ACD = 30$ juntamente que $\angle DFB = \angle EFC = 110$, então $\angle BDF = 50$ e $\angle CEF = 40$.

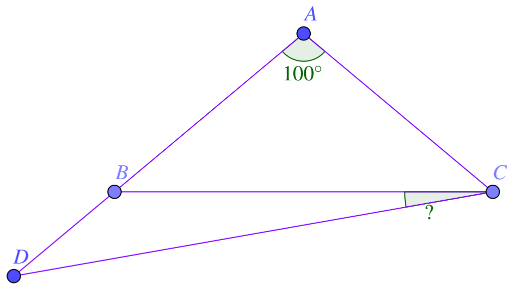
Apartir de agora, não há muito o que se fazer, os ângulos do triângulo DEF ainda são uma incógnita, assim, como apenas ângulos não funcionou, vamos partir para segmentos e tentar fazer uma construção esperta (a intuição para isso é tanto pela a falta de informação no problema, dado que temos pouquíssimas coisas para trabalhar, quanto pelo fato de apenas ângulo não ter ajudado). Note que como $\angle BCD = \angle BDC = 50$, então $BC = BD$ e também como $\angle EBA = \angle EAB = 20$, então $EA = EB$, dado esses dois tamanhos, vamos escolher o $BC = BD$ para trabalhar encima, pois já vamos ter um tamanho fixo (que é o BC) e o $EB = EA$ vai ser difícil para o que vamos tentar fazer aqui, que vai ser construir um triângulo equilátero dado dois lados iguais e um ângulo de 60 entre eles.



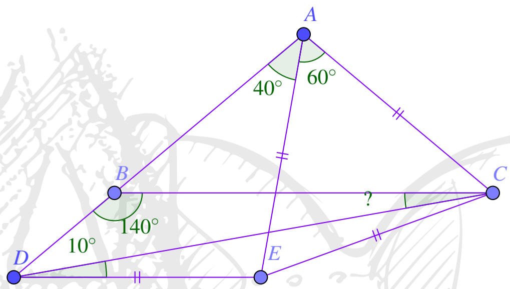
Para isso, suponha que existe P em AC tal que $BP = BC = BD$, assim como $\angle BCP = \angle BPC = 80$, temos $\angle CBP = 20$, e de fato se a gente tomar o ponto P em AC tal que $\angle PBC = 20$, teremos $BP = BC = BD$, e ainda mais, como $\angle ABC = 80$ o ângulo $\angle PBD = 80 - 20 = 60$, logo $BD = BP$ e $\angle PBD = 60$, portanto $\triangle BPD$ é um triângulo equilátero e $BD = BC = BP = PD$. Note que como $\angle PBC = 20$ e $\angle EBC = 60 \Rightarrow \angle PBE = \angle PEB = 40$, logo $PB = PE = PD$. Por fim, como $\angle DPB = 60$, $\angle BPC = 80$, então $\angle DPE = 40 \Rightarrow \angle PED = \angle PDE = \frac{180-40}{2} = 70$ e como $\angle GEB = 40$, então $\angle BED = 30$ ■. É importante saber qual é a chave principal do problema: **O ponto** P. Sem o ponto P, seria muito mais complicado terminar o problema, talvez por trigonometria ou por algumas outra construção o problema sairia, mas nessa solução, a estrela da noite foi o ponto $P\star$.

É muito importante para a sua carreira olímpica você saber construir e ter imaginação. Não tenha medo de tentar, de por acaso achar que esta fazendo algo inútil ou até ir fora do caminho, confie no seu instinto e faça muitos problemas, eles melhoram muito a sua intuição. Por agora, vamos para mais um outro problema em que se usa a ideia de construção (novamente perceba que é um problema simples e sem muitos pontos ou informações).

Exemplo 10. Na figura abaixo, temos $\angle BAC = 100$, $AB = AC$ e $AD = BC$. Qual o valor de $\angle BCD$?



Solução. Vamos inicialmente fazer algumas coisas básicas. Perceba que como $\angle BAC = 100$ e $AB = AC$, então $\angle ABC = \angle ACB = 40$ e $\angle DBC = 140$. Dado o fato que $AD = BC$, vamos construir um triângulo congruente ao ABC com base AD, para isso tome E no mesmo semiplano que C em relação a AD tal que $\triangle DEA \equiv \triangle CAB$. Note que $EA = ED = AC = AB$, porém $\angle EAD = \angle ABC = 40 \Rightarrow EAC = 60$, mas como $EA = AC$, então $\triangle EAC$ é equilátero, assim $ED = EC = AC = AB = EA$ e $\angle DEC = \angle EAC + \angle DEA = \angle EAC + \angle CAB = 60 + 100 = 160$, logo $\angle EDC = \angle ECD = 10$, porém como $\angle EDA = 40$, temos $\angle BDC = 30$ e como $\angle DBC = 140$, então $\angle BCD = 10$ $\blacksquare$. Note que nessa questão, é muito intuitivo pegar o ponto E, que é a nossa estrela do problema $\star$.

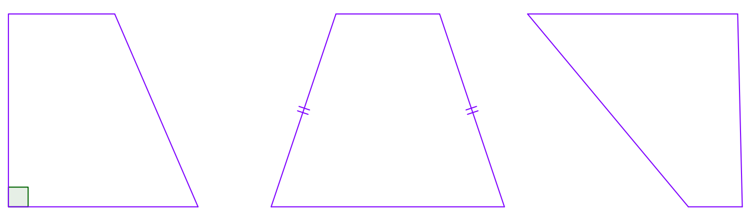


3 Ângulos em polígonos

3.1 Ângulos em quadriláteros

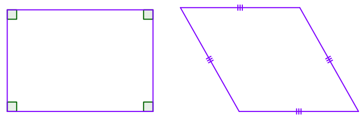
Assim como nos triângulos, vamos fazer algumas classificações de quadrilateros aqui e posteriormente ver as suas propiedades. Inicialmente, existe dois quadriláteros que são muito bons de se analisar: os trapézios e os paralelogramos. Um quadrilátero é um trapézio quando ele possui um par de lados opostos paralelos e é um paralelogramo quando possui dois pares de lados opostos paralelos.

Nos trapézios, ainda temos 3 classificações: retângulo, isóseles e escaleno. Um trapézio retângulo é um que possui um ângulo de 90, isósceles é quando ele possui os dois lados não paralelos de mesma medida e escaleno quando o trapézio possui os seus lados de tamanhos diferentes.



Trapézio retângulo, isósceles e escaleno, respectivamente

Dentro dos paralelogramos temos mais duas classificações: retângulos e losangos. Basicamente, um retãngulo é um quadrilátero que possui todos os ãngulos iguais (que posteriormente vamos provar que todos devem ser iguais a 90, ou seja, ângulos retos) e losango é um quadrilátero que possui todos os seus lados iguais (depois vamos provar que esses dois tipos de quadriláteros são paralelogramos, ou seja, se satisfazem isso, são paralelogramos).



Por fim, se um quadrilátero for um losango e um retângulo ao mesmo tempo, ele é um quadrado: possui todos os seus ângulos e lados iguais aos mesmos. Nessa parte específica dos lemas, não vamos ter tantas figuras, mas é importante que você entenda sobre a prova de cada um dos lemas, uma dica que eu dou é que tente desenhar, isso vai ajudar tanto a você entender as provas de agora quanto treinar a sua interpretação geométrica.

Teorema. A soma dos ângulos internos de um quadrilátero é 360.

Prova. Seja $ABCD$ tal quadrilátero e trace a diagonal AC, sabemos que ABC e ADC são triângulos, logo $\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 180$ assim como $\angle ADC + \angle DCA + \angle CAD = 180$, portanto $\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB + \angle ADC + \angle DCA + \angle CAD = 360$, porém $\angle BCA + \angle DCA = \angle BCD$ e $\angle CAB + \angle CAD = \angle DAB$, logo $\angle ABC + \angle BCD + \angle CDA + \angle DAB = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360\blacksquare$. Perceba que isso prova que todo retângulo possui seus ângulos iguais a 90, pois ele possui todos os ângulos iguais e a soma é 360.

Lema. Todo retângulo é um paralelogramo.

Prova. Seja $ABCD$ o retângulo, note que a reta paralela a DC passando por A é perpendicular a reta AD, porém a reta AB é perpendicular a AD, logo AB é paralela a DC e analogamente, BC é paralela a AD. Assim $ABCD$ é um paralelogramo.

Lema. Todo losango é um paralelogramo.

Prova. Seja $ABCD$ o losango, assim note que $\triangle ABC \equiv \triangle ADC$ por LLL, então como $AB = BC = CD = DA$, temos $\angle BAC = \angle BCA = \angle DAC = \angle DCA$, assim como em particular $\angle BAC = \angle DCA$, então $AB \parallel CD$, analogamente $AD \parallel BC$, sendo assim $ABCD$ um paralelogramo.

Lema. Em um losango, as diagonais são perpendiculares.

Prova. Perceba que $\angle BAC = \angle DCA = \angle DAC$ usando que é um losango e consequentemente um paralelogramo, porém $AB = AD$ e AC é bissetriz de $\hat{A}$, logo também é altura e temos $AC \perp BD$. Uma observação é que note que a volta não é verdadeira, para isso, basta variar A para ser qualquer ponto na mediatriz de BD. Neste caso, teriamos o que nos dizemos que é uma “pipa”.

Lema. Um quadrilátero é um paralelogramo se e somente se os ângulos opostos forem iguais.

Prova. ($\Rightarrow$ Ida) Suponha que $\hat{A} = \hat{C}$ e $\hat{B} = \hat{D}$, como $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360 \Rightarrow \hat{A} + \hat{B} = 180$, assim $AD \parallel BC$ e analogamente (é tão bom usar essa palavra) temos que $AB \parallel CD$ e $ABCD$ um paralelogramo.

($\Leftarrow$ Volta) Basta ver que como é um paralelogramo então pelo teorema das retas paralelas temos que $\hat{B} = 180 - \hat{A} = \hat{D}$ e $\hat{A} = 180 - \hat{B} = \hat{C}$, logo $\hat{B} = \hat{D}$ e $\hat{A} = \hat{C}$, ou seja, os ângulos opostos são iguais.

Lema. Um quadrilátero possui os lados opostos congruêntes (de mesmo tamanho), se e somente for um paralelogramo.

Prova. ($\Rightarrow$ Ida) Se for um paralelogramo, note que como $\angle ABD = \angle CDB$ e $\angle ADB = \angle CBD$, então $\triangle ABD \equiv \triangle CDB$ por ALA (esses dois ângulos e o lado BD), assim $AB = CD$ e $AD = CB$, ou seja, os lados opostos são iguais.

($\Leftarrow$ Volta) Se $AB = CD$ e $AD = BC$ então pelo caso LLL de congruência de triângulos, temos $\triangle ABC \equiv \triangle CDA$, assim $\angle BAC = \angle DCA \Rightarrow AB \parallel CD$, analogamente $AD \parallel BC$ e o quadrilátero é um paralelogramo.

Lema. As diagonais de um retângulo são iguais, ou seja, possuem a mesma medida.

Prova. Dado que um retângulo é um paralelogramo, então pelo lema anterior temos que $AD = BC$, assim $\triangle BCD \equiv \triangle ADC$ por LAL, pois $AD + BC$, $\angle ADC = 90 = \angle BCD$ e $DC = DC$, por fim, da congruência obtemos que $AC = BD$.

Lema. Se $ABCD$ é um quadrilátero e as diagonais AC e BD se cortam no ponto médio das mesmas (ou seja, AC bissecta BD e BD bissecta AC), se e somente se $ABCD$ é um paralelogramo.

Prova. ($\Rightarrow$ Ida) Se é um paralelogramo então tome E para ser a interseção das diagonais AC e BD, temos que $\triangle EAB \equiv \triangle ECD$ pois $\angle EAB = \angle ECD$, $\angle EBA = \angle EDC$ e pelo penúltimo lema, $AB = CD$, logo por ALA temos esses triângulos congruentes e assim, $EA = EC$ e $EB = ED$, logo E é ponto média de AC e BD.

($\Leftarrow$ Volta) Certo, se temos que AC e BD se intersecta em E com $EA = EC$ e $EB = ED$ então como $\angle AEB = \angle CED$ então temos $\triangle AEB \equiv \triangle CED$ por LAL. Assim $\angle CAB = \angle EAB = \angle ECD = \angle ACD \Rightarrow AB \parallel CD$, analogamente temos $AD \parallel BC$ e $ABCD$ um paralelogramo.

Lema. Se $AB = CD$ e $AB \parallel CD$, então $ABCD$ é um paralelogramo.

Prova. Vimos que se $ABCD$ é um paralelogramo, ele de fato cumpre esses dois requisitos, agora vamos provar que essas duas informações são suficientes para provar que é um paralelogramo. Para isso tome E a interseção das diagonais, então pelo paralelismo temos que $\angle EAB = \angle ECD$ e $\angle EBA = \angle EDC$, porém como $AB = CD$ então $\triangle EAB \equiv \triangle ECD$ por ALA, assim $EA = EC$ e

$EB = ED$, portanto, pelo nosso lema anterior, temos que $ABCD$ é um paralelogramo.

Lema. Um triângulo $\triangle ABC$ é retângulo em A, ou seja, $\angle BAC = 90$, se e somente se seu circuncentro está em BC.

Prova. Esse lema é importantíssimo. Para a Ida ($\Rightarrow$) se o circuncentro está em BC, chame ele de O, logo $OA = OB = OC$ (O é ponto médio de BC), então $\angle BAC = \angle OAC + \angle OAB = \angle OCA + \angle OBA = \angle BCA + \angle CBA$, porém $\angle BAC + \angle BCA + \angle CBA = 2\angle BAC = 180 \Rightarrow \angle BAC = 90$. E para a Volta ($\Leftarrow$) tome M o ponto médio de BC e tome A' o reflexo de A por M (ou seja, o ponto em AM tal que $MA = MA'$ e $A' \neq A$. Então temos que como M é ponto médio de BC e AA', então $ABA'C$ é um paralelogramo, so que como $\angle BAC = 90 = \angle BA'C = 180 - \angle A'BA = 180 - \angle A'CA$, então é na verdade um retângulo e $AA' = BC \Rightarrow MA = MA' = MB = MC$, logo M é o circuncentro. Apartir desse lema, você consegue manipular diametro muito bem, você sabe que o ângulo de todo diametro é 90 e que ao pegar o ponto médio de um triângulo retângulo, ele vai ser o centro da circunferência (acredite, isso é extremamente útil, principalmente para a segunda parte que iremos manipular ângulos na circunferência).

Perceba que tem muita propriedade sobre os paralelogramos, basicamente, se um quadrilátero $ABCD$ é um paralelogramo, então todas as seguintes propiedades ocorrem sobre ele:

i. AC corta BD no ponto médio
ii. BD corta AC no ponto médio
iii. $AB \parallel CD$
iv. $AD \parallel BC$
v. $AB = CD$
vi. $AD = BC$
vii. $\angle ABC = \angle CDA$
viii. $\angle DAB = \angle BCD$

Fica a cargo do leitor brincar com essas expressões e tentar provar quantas condições são necessárias para afirmar que $ABCD$ é um paralelogramo, note que já provamos algumas (por exemplo, os pares (i, ii), (v, vi) e (iii, v)) e que nem sempre duas informações são suficientes (por exemplo, se a gente sabe que $AD = BC$ e $AB \parallel CD$ então podemos ter tanto o paralelogramo quanto o trapézio isósceles).

As provas são todas nesse mesmo estilo, usando ângulos, congruências e semelhanças, um ótimo exercício para treinar essas partes. Observe também que o fato do quadrado ser um losango e um retângulo, ele tem a propiedade de ambos, por exemplo, de ser um paralelogramo, de possuir as diagonais perpendiculares, de ter todo os ângulos retos, possuir as diagonais de mesma medida, todos os lados iguais, ...

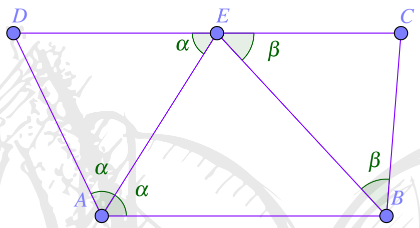
Bem, para finalizar, vamos ver um pequeno lema só para entender um pouco mais sobre os trapézios, em particular, existe um bem específico que é o único que você tem que saber conteúdo sobre, que é o trapézio isósceles.

Lema. Os ângulos da base de um trapézio isósceles são iguais e as suas diagonais possuem a mesma medida.

Prova. Tome $ABCD$ o trapézio isósceles tal que $AD = BC$. Seja AE e BF as alturas do trapézio, com E e F em CD, note que $ABFE$ é um paralelogramo (em particular, um retângulo) logo $AE = BF$, como $\angle AED = \angle BFC = 90$, temos que $\triangle ADE \equiv \triangle BCF$ pelo caso cateto-hipotenusa de congruência, assim $\angle ADE = \angle ADC = \angle BCD = \angle BCF$, então os ângulos da base são os mesmos. Para as diagonais, note que $\triangle ADC \equiv \triangle BCD$ por LAL, dado que $AD = BC$, $\angle ADC = BCD$ e $DC = CD$, portanto da congruência temos que as diagonais AC e BD possuem mesmas medidas.

Exemplo 11. **(OCM)** Sejam AB e CD as bases de um trapézio tal que a base CD é igual a soma dos lados não paralelos. Se E é um ponto de CD e EA é bissetriz de $\hat{A}$, mostre que EB também é bissetriz de $\hat{B}$.

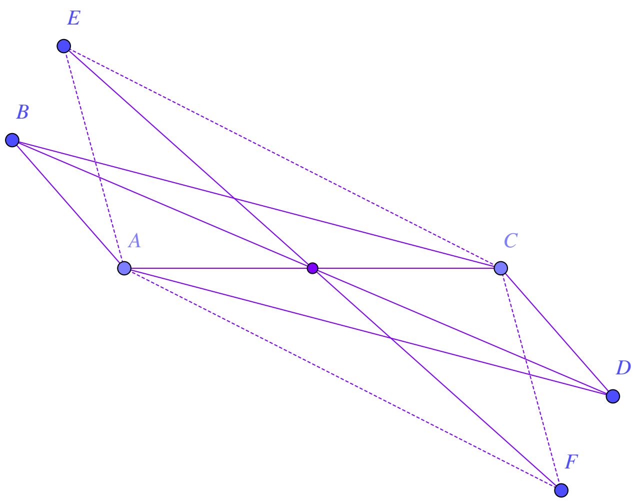
Solução.



Temos que, pelo paralelismo, $\angle BAE = \angle DEA = \angle DAE$, logo $DA = DE$, porém como $DC = DA + BC = DE + EC$, então $CE = CB$. Deste modo $\angle CBE = \angle CEB = \angle ABE$ pelo parelelismo, assim temos que BE é bissetriz de ABC.

Exemplo 12. **(Cone Sul 1991)** Sejam A, B e C três pontos não colineares e $E \neq B$ um ponto qualquer que não pertence a reta AC. Construa o paralelogramo $ABCD$ e $AECF$. Demonstre que $BE \parallel DF$.

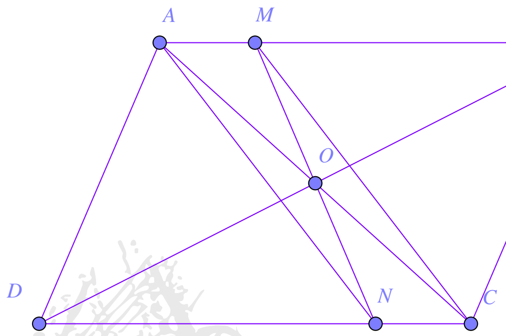
Solution.



Perceba que BD bissecta AC, porém EF bissecta AC, então temos que BD e EF se encontram no ponto médio de AC e como esse ponto também é ponto médio de BD e EF, então $BEDF$ é um paralelogramo e $BE \parallel DF$.

Exemplo 13. (Torneio das Cidades) $ABCD$ é um paralelogramo. Um ponto M é escolhido sobre o lado AB tal que $\angle MAD = \angle AMO$, onde O é o ponto de interseção das diagonais do paralelogramo. Prove que $MD = MC$.

Solução.



Defina N para ser a interseção da reta MO com CD. Perceba que como $\angle DAM = \angle CMA$, então $DAMN$ é um trapézio isósceles, então $MD = AN$. Como $OA = OC$ então $\triangle OAM \equiv \triangle OCN$ pois $\angle OAM = \angle OCN$, $\angle OMA = \angle ONC$ e $OA = OC$, logo $AMCN$ é um paralelogramo (dois lados opostos e paralelos iguais), então $MD = AN - MC \Rightarrow MD = MC$, que era o que queríamos provar.

3.2 Ângulos em polígonos gerais

Em polígonos com mais de 4 lados, é complicado trabalhar com ângulos e rara são as questões que pedem para trabalhar mais do que foi dito aqui, por isso vamos trabalhar apenas com um lema, mas antes do nosso lema, quero exclarecer algumas coisas sobre polígonos.

Um polígono é dito **regular** se possui todos os seus lados e ângulos iguais. Muita gente se confunde, não é porque o problema deu apenas que todos os lados ou ângulos são iguais que temos que ele é regular, existe sim polígonos irregulares porém com todos seus lados, ou, todos os seus ângulos iguais, sem ambos acontecendo simultaneamente. Dado isso, vamos ver o seguinte lema:

Lema. Em um polígono convexo de n lados, a soma dos seus ângulos internos vai ser $180(n-2)$.

Prova. Seja P_1, P_2, ..., P_n os vértices do polígono no sentido horário, e ligue P_1 a todos os outros vértices, observe que os triângulos $\triangle P_1P_2P_3$, $\triangle P_1P_3P_4$, ..., $\triangle P_1P_iP_{i+1}$, ..., $\triangle P_1P_{n-1}P_n$ são $(n-2)$ triângulos internos ao polígono, formando assim o que chamamos de uma **triangulação**, ou seja, ligamos vértice a vértice de modo que não tem duas arestas se intersectando e que dividimos o polígono apenas em triângulos. Dado isso, como não há vértice interno (ou seja, todos eles fazem parte do polígono), a soma dos ângulos internos vai ser a soma dos ângulos internos desses $(n-2)$ triângulos, que vai ser $180(n-2)$.

Observe que esse argumento vale apenas para poligonos convexos, dado que em um polígono pode existir um ponto onde ao ligar ele a todos os outros vértices, tenha uma aresta que “sai” do polígono. Assim, vamos provar que todo polígono possui uma triangulação (não necessariamente com todas as arestas saindo de um esmo vértice), perceba que se provarmos que existe uma triangulação com $n-2$ triângulos, então a soma dos ângulos é $180(n-2)$.

Para isso, use indução forte para todo cara até $n-1$, onde no passo você vai ligar dois pontos que está dentro do polígono e essa aresta também deve estar inteiramente dentro (reflita do porque esses dois vértices existirem, não é uma tarefa muito fácil mas você pode ir no caminho de fazer um pequeno algoritmo sempre trocando esses dois pontos por outros dois), assim temos dois polígonos, um com $a+2$ pontos e outro com $b+2$ pontos, onde $n = a+b+2$, porém com a $a+2$ conseguimos triangulação com a e com o $b+2$ conseguimos triangulação com b, logo conseguimos triangulação para $n = a+b+2$ com $n-2 = a+b$. Com isso, melhoramos nosso lema e adicionamos um fato extra, que queremos que você pense sobre:

Lema (update). Em um polígono de n lados, a soma dos ângulos internos vai ser $180(n-2)$. Se o polígono for regular, cada ângulo mede $\frac{180(n-2)}{n}$.

4 Problemas

Segue aqui alguns problemas usando as ideias descritas neste material. Pense em todos os problemas e aproveite!! Te vejo na parte 2.

Problema 1. (Olimpíada de Maio) No retângulo $ABCD$, seja P um ponto no lado AD tal que $\angle BPC = 90$. A perpendicular a BP traçada por A corta BP em M e a perpendicular a CP traçada por D corta CP em N. Demonstre que o centro do retângulo está no segmento MN.

Problema 2. Considere um triângulo acutângulo ABC com $\angle BAC = 30$. Sejam B_1, C_1 os pés das alturas em relação aos lados AC e AB, respectivamente, e B_2, C_2 os pontos médios dos lados AC e AB, respectivamente. Mostre que os segmentos B_1C_2 e B_2C_1 são perpendiculares.

Problema 3. Sejam ABC um triângulo e M o ponto médio do lado BC. Se, D e E são os pés das alturas relativas aos lados AC, AB, respectivamente, prove que $ME = MF$.

Problema 4. (Romênia) Sejam ABC um triângulo isósceles com $AB = AC$, D o ponto médio de BC e N a projeção de D sobre BM. Prove que $\angle ANC = 90$.

Problema 5. (Torneio das Cidades) Sejam $ABCD$ um paralelogramo, M o ponto médio de CD e H o pé da perpendicular de B em AM. Prove que BCH é um triângulo isósceles.

Problema 6. No triângulo ABC, D é ponto médio de AB e E é um ponto sobre BC tal que $BE = 2CE$. Sabendo que $\angle ADC = \angle BAE$, descobra o valor de $\angle BAC$.

Problema 7. Sejam ABC e D, E e F os pontos médios de BC, CA e AB, respectivamente. Prove que

$$\angle DAE = \angle ABE \iff \angle AFC = \angle ADB$$

Problema 8. Sejam ABC e ABD triângulos com o lado AB em comum. O triângulo ABC tem $\angle BAC = 90$ e $AB = 2AC$. O triângulo ABD tem $\angle ADB = 90$ e $AD = DB$. O segmento CD corta o segmento AB em O. Calcule a medida de BO sabendo que $AC = 4$.

Problema 9. No triângulo ABC, os pontos D e E pertencem ao lado BC e são tais que $BD = BA$ e $CE = CA$. Dado que $\angle DAE = 40$, determine a medida do ângulo $\angle BAC$.