Quadriláteros Circunscritíveis

João Pedro de Almeida da Silva

1 Introdução

Nesse material, iremos explorar a parte da geometria de quadriláteros circunscritíveis. Para isso, começaremos com algumas ideias iniciais que nos ajudarão em provas futuras.

2 Ideias iniciais

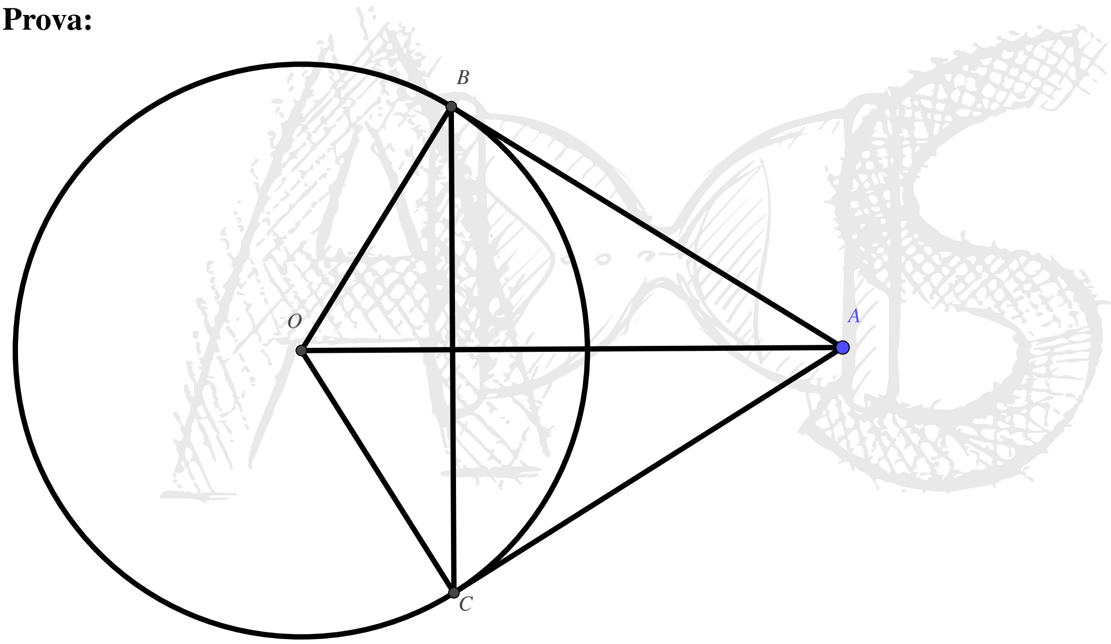
2.1 Teorema do bico

Esse teorema servirá como base principal para prova de diversos outros teoremas sobre quadriláteros circunscritíveis e também sobre triângulos.

Ele afirma que:

Teorema. Seja Γ uma circuferência e A um ponto externo a Γ. Defina B e C como pontos em Γ tais que AB e AC são tangentes a Γ. Temos que AB=AC.

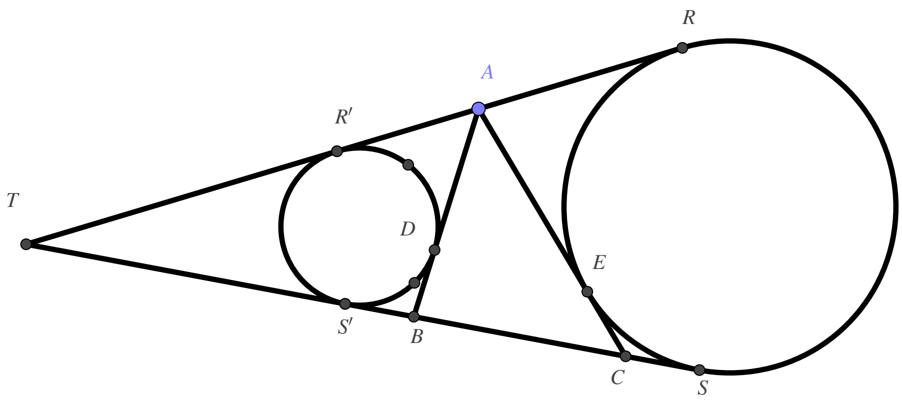
Prova:



Perceba que $O\hat{B}A = O\hat{C}A = 90°$, por tangência, e OC=OB, por serem raios de Γ. Assim, temos que $\triangle OCA \equiv \triangle OBA$, pelo critério cateto-hipotenusa de congruência. Logo, concluimos que AC=AB, como queríamos demonstrar.

Problema 1. (OBMEP-2021 Adaptado) Sejam Γ_1 e Γ_2 duas circunferências de raios distintos. Defina r e s como as retas tangentes externas a Γ_1 e Γ_2. Os pontos S e S' estão em s, enquanto R e R' estão em r, com S e R pertencendo a Γ_1 e S' e R' pertecendo a Γ_2. Pegue A sendo um ponto no segmento RR' e B, C pontos no segmento SS', com AC tangente a Γ_1 e AB tangente a Γ_2. Mostre que o perímetro do $\triangle ABC$ é igual a 2RR'.

Solução.



Defina T como a intersecção de r e s, D como a intersecção de AB com Γ_2 e E como a intersecção de Γ_1 com AC, como vemos na figura. Pelo teorema do bico em Γ_1, temos que TR=TS, enquanto pelo teorema do bico em Γ_2, temos TR'=TS'. Assim, concluímos que TR-TR'=TS-TS', fazendo com que RR'=SS'. Também, por bico, temos BD=BS', CE=CS, AD=AR' e AR=AE, fazendo com que SS'=BC+BD+CE e RR'=AD+AE. Como SS'=RR', temos 2RR'=RR'+SS'=(AD+AE)+(DB+BC+CE), concluindo que o perímetro de $\triangle$ABC seja igual a 2RR'.

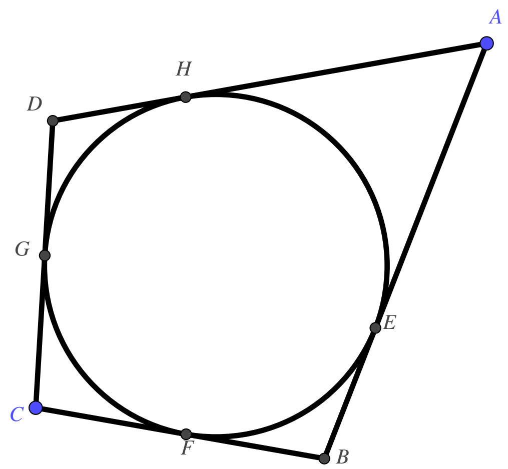
2.2 Teorema de pitot

O próximo teorema que veremos é simplesmente uma aplicação do teorema do bico em quadriláteros convexos:

Teorema. Seja ABCD um quadrilátero convexo. Tal quadrilátero é circunscritível se, e somente se, AB+CD=AD+BC.

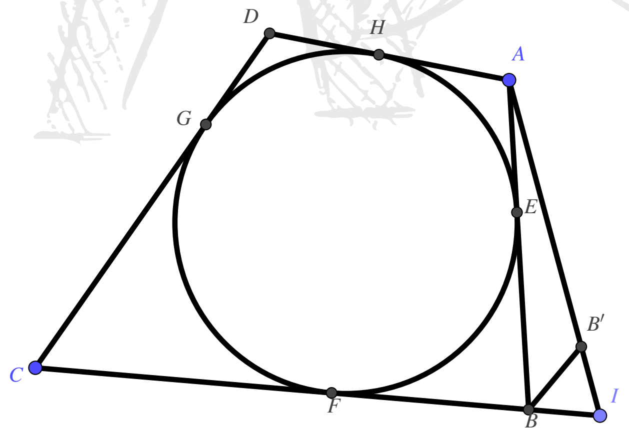
Prova:
Para mostrar o se, e somente se, começaremos fazendo a ida e depois a volta:

1°) Dado ABCD um quadrilátero circunscritível, temos AB+CD=AD+BC:



Nomeie os pontos de tangência de ABCD como E, F, G, H, como mostra na figura acima. Pelo teorema do bico, temos que AH=AE, BE=BF, CF=CG e DG=DH. Assim, temos que AH+BF+CF+DH= AE+EB+CG+DG, onde AH+DH=AD, BF+CF=BC, AE+BE=AB, CG+DG=DC. Substituindo, temos AD+BC=AB+CD.

2°) Dado que AB+CD=AD+BC, temos que ABCD é um quadrilátero circunscritível:



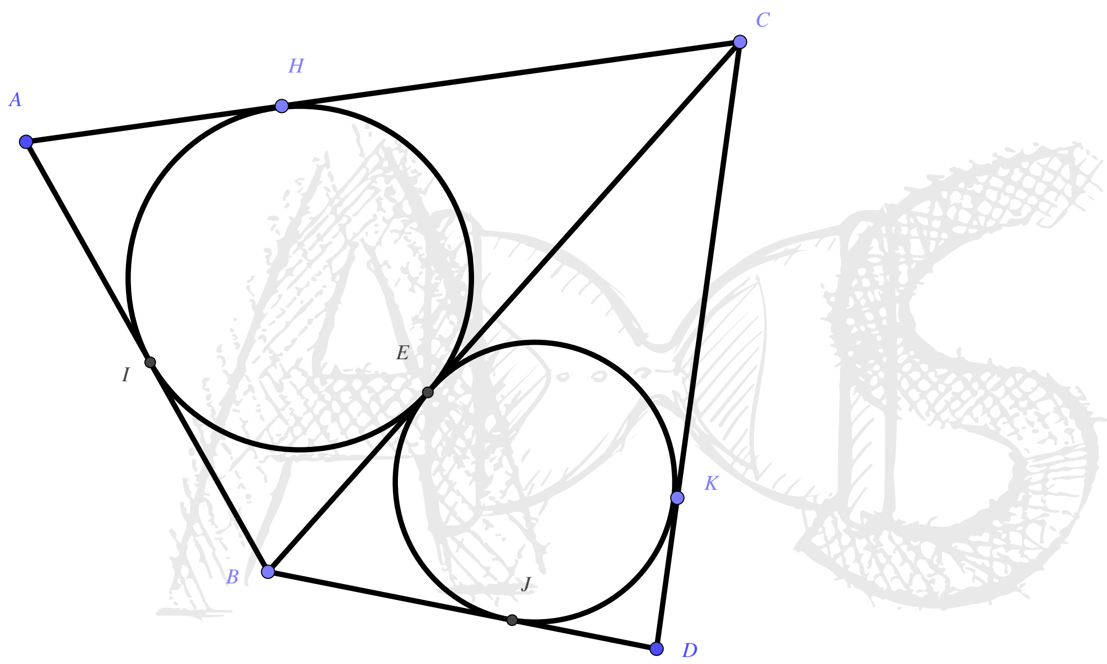
Suponha que ADCI não é circunscritível, mas vale a relação dos lados. Temos que existe uma circunferência tangente aos lados AD, DC e CI em H, G, F, respectivamente, mas não toca AI, e sim AB, intersectando em E. Pelo que já provamos, AD+BC=CD+AB, mas também temos AD+CI=CD+AI. Assim, AB-BC=AI-CI=AI-(BC+BI), então AB=AI-BI. Definindo B' como um ponto em AI tal que IB=IB', temos que AB=AI-IB=AI=IB'=AB', fazendo com que A$\hat{B}$B'=A$\hat{B}'$B=180°-I$\hat{B}'$B=180°-I$\hat{B}$B'. Porém, temos que C$\hat{B}$B'=180°-I$\hat{B}$B', fazendo com que C$\hat{B}$B'=A$\hat{B}$B', o que não é verdade, dado que A, B e C não são colineares. Portanto, nossa suposição é falsa, concluindo que ADCI é circunscritível.

Problema 1. Seja ABCD um quadrilátero circunscritível, com AB=5 e BC=9. Determine o lado DC em função de AD.

Solução.
Por pitot, 5+DC=9+AD, então DC=4+AD.

Problema 2. Sejam △ABC e △BCD tais que seus incentros são tangentes um ao outro em BC. Mostre que ABDC é circunscritível.

Solução.



Fazendo teorema do bico, temos que AH=AI, DJ=DK, BI=BE=BJ, CH=CE=CK. Juntando esses fatos, temos (AI+BI)+(CK+KD)=(AH+CH)+(BJ+JD), que é exatamente AB+CD=AC+BD. Porém, já mostramos que essa condição implica que ABDC é circunscritível, finalizando o problema.

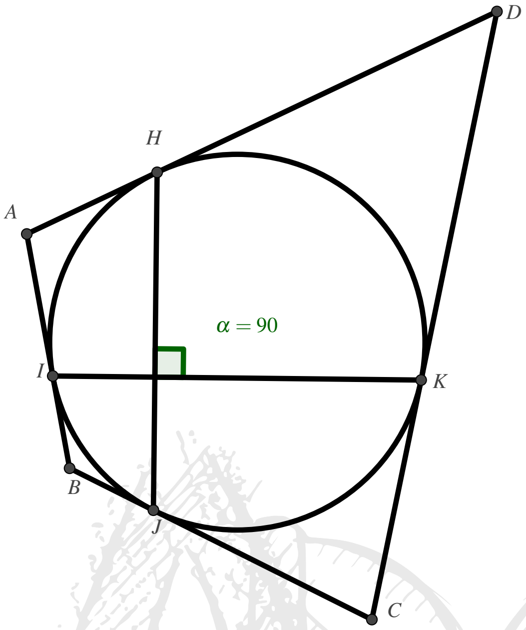
3 Quadriláteros bicêntricos

3.1 O que é um quadrilátero bicêntrico?

Sabemos que existem fatos que fazem quadriláteros inscritíveis serem bem importantes na geometria plana. Com esse material, também estamos vendo a importância dos circunscritíveis. Então por que não estudarmos a junção dos dois, ou seja, os quadriláteros bicêntricos?

3.2 Construção de quadriláteros bicêntricos

Para construí-los, pegue um círculo com duas cordas se intersectando em um ângulo de 90° graus. Depois, pegue as tangentes ao círculo passando pelos quatro pontos das cordas. Essas tangentes formam um quadrilátero bicêntrico, como vemos na figura abaixo:



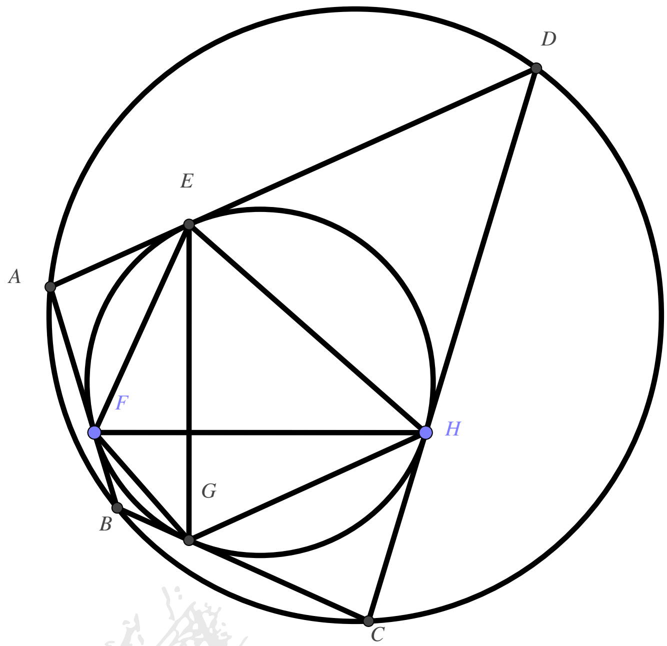
Perceba que já garantimos que ele é circunscritível, por construção, mas ainda falta provar que ele é cíclico. Também, precisamos mostrar que dado um quadrilátero bicêntrico, temos que as cordas dos pontos de tangência se cortam em um ângulo de 90°.

1°) Mostrar que o quadrilátero acima é cíclico:

Definindo I, J, K, H como os respectivos pontos de tangência da figura, temos que α=I$\hat{J}$B=I$\hat{K}$J=J$\hat{I}$B, então I$\hat{B}$J=180°-2α. Basta mostrar agora que A$\hat{D}$C=2α, que é verdade, pois K$\hat{J}$H=K$\hat{H}$D=H$\hat{K}$D=90°-α, fazendo com que A$\hat{D}$C=180°-2(90°-α)=2α, finalizando o que queríamos.

2°) Mostrar que para qualquer quadrilátero bicêntrico, as cordas são perpendiculares:

Pela figura abaixo, precisamos mostrar que EG é perpendicular a FH. Para isso, veja que se C$\hat{G}$H=α, temos α=C$\hat{G}$H=C$\hat{H}$G=H$\hat{F}$G=H$\hat{E}$G e G$\hat{C}$H=180°-2α. Como ABCD é cíclico, então E$\hat{A}$F=2α, fazendo com que A$\hat{E}$F=A$\hat{F}$E=E$\hat{H}$F=E$\hat{G}$F=90°-α. Assim, temos que H$\hat{F}$G=α e E$\hat{G}$F=90°-α, concluindo que as cordas se cortam em um ângulo de 90°.



4 Problemas

Problema 1. Seja ABCDEF um hexágono circunscritível a uma circunferência. Mostre que AB+CD+EF=AF+BC+DE.

Problema 2. (OBM-2022) Seja ABC um triângulo com AB=AC. Defina M como o ponto médio de AC, P e Q pontos em AB e BC, respectivamente, tais que PQ é paralelo a AC e tangente ao incírculo de $\triangle$ABC. Também, temos M$\hat{P}$Q=M$\hat{Q}$C e é dado que BQ=1. Determine o perímetro de ABC.

Problema 3. Mostre que a área de um quadrilátero bicêntrico é igual a $\sqrt{(abcd)}$, onde a, b, c, d são os lados do quadrilátero.

Problema 4. Seja ABC um triângulo com AB=7, AC=6 e BC=3. Sejam E e F pontos em AB e AC, respectivamente, tais que EF é paralelo a BC e EF é tangente ao incírculo de $\triangle$ABC. Determine o valor de EF.

Problema 5. Seja ABC um triângulo. Defina o A-exincírculo como a circunferência tangente aos lados AB, BC e AC que não é o incírculo e está oposto ao vértice A. O A-exincírculo tangencia BC em D’, enquanto o incírculo de $\triangle$ABC os lados BC, AC, AB em D, E, F, respectivamente. Prove que D’C=DB.

Bibliografia.

1. Polos olímpicos de treinamento intensivo
(POTI)

2. Euclidean geometry in mathematical olympiads
(EGMO)