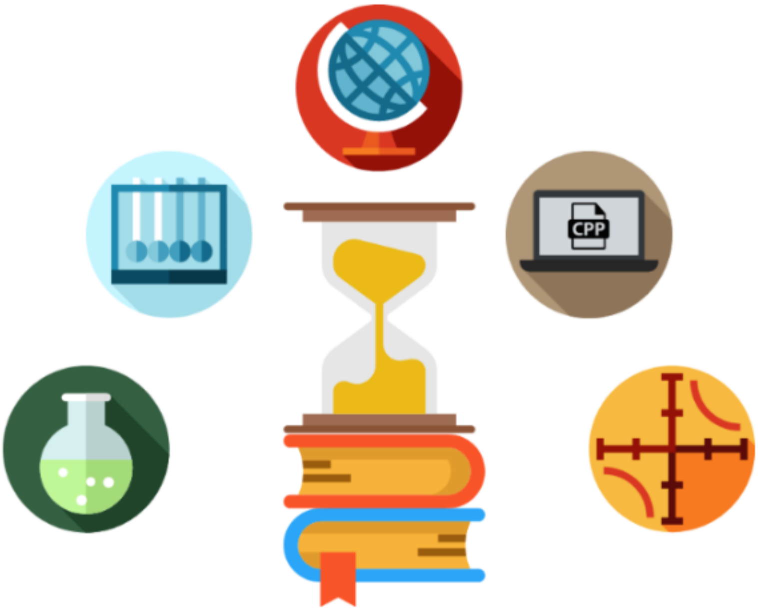
Soma de dígitos

Julia Leguiza



1 Introdução

Para esse material, recomenda-se um domínio sobre congruências (temos esse assunto no material Congruências e Restos do AMPS!) e parte inteira. Assim, vamos fazer um breve resumo sobre partes inteiras (+teto e parte fracionária):

Definição 1. (Parte inteira/piso): É uma função $\lfloor x \rfloor : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ tal que, para cada real x, $\lfloor x \rfloor$ é o inteiro n tal que $n \leq \lfloor x \rfloor < n+1$. Ou seja, é o maior inteiro que não ultrapassa x.
Exemplos:$\lfloor 3,1415 \rfloor = 3$;$\lfloor -2,14553 \rfloor = -3$

Definição 2. (Teto): É uma função $\lceil x \rceil : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ tal que, para cada real x, $\lceil x \rceil$ é menor inteiro n que ultrapassa x.
Exemplos: $\lceil 2,345 \rceil = 3$; $\lceil -1,45 \rceil = -1$.

Definição 3. (Parte fracionária): Seja $x \in \mathbb{R}$. Então a parte fracionária de x, denotada por $\{x\}$, é dada por: $\{x\} := x - \lfloor x \rfloor$
Exemplos: $\{-2,4\} = 0,6$; $\{2,34\} = 0,34$

Com a definição, conseguimos algumas coisas legais para cotas:

1. $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$
2. $x \leq \lceil x \rceil < x+1$
3. $0 \leq \{x\} < 1$

E mais resultados úteis: Seja $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{Z}$. Então:

1. $\lfloor x+n \rfloor = n + \lfloor x \rfloor$
2. $\lceil x+n \rceil = n + \lceil x \rceil$
3. $\{x+n\} = \{x\}$

2 Intuição e Congruências

O que vêm à cabeça quando falamos "soma de dígitos"? Um dos critérios de divisibilidade que aprendemos é o do 9, que diz: "Um número N é múltiplo de 9 se, e somente se, $S(N)$ é divisível por 9". Ainda mais, se $S(N)$ deixa resto r quando dividido por 9, então N também deixa r ao ser dividido por 9. Em outras palavras,

$$N \equiv S(N) \pmod 9$$

Demonstração. Seja $N = \overline{a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0}$, onde $a_i \in \{0,1,2,\dots,9\}$ $\forall i$ e $a_k \neq 0$. Logo, $N = 10^k \cdot a_k + 10^{k-1} a_{k-1} + \cdots + 10a_1 + a_0$. Olhando módulo 9, como $10 \equiv 1 \pmod 9$, então $10^i \equiv 1 \pmod 9$, para todo i. Daí, $N \equiv 1 \cdot a_k + 1 \cdot a_{k-1} + \cdots + 1a_1 + a_0 \pmod 9$, e $a_k + a_{k-1} + \cdots + a_1 + a_0 = S(N)$. Portanto, $N \equiv S(N) \pmod 9$, como queríamos.

Propriedades do "S(n)"
Propriedade 1 Para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \equiv S(n) \pmod 9$

Propriedade 2 Para todo $n \in \mathbb{N}$, $S(n) = n - 9 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{10^i} \right\rfloor$

Demonstração. Indução na quantidade de algarismos. Seja k a quantidade de algarismos de n. (podemos substituir o ∞ do somatório por $(k-1)$, afinal, se for $\geq k$, $\left\lfloor \frac{n}{10^k} \right\rfloor = 0$ e as outras partes inteiras vão zerar)

(i) Casos iniciais:
$k = 1 : n = a_0 \implies S(n) = a_0 = a_0$ OK!
$k = 2 : n = \overline{a_1 a_0} \implies S(n) = a_1 + a_0 = n - 9 \cdot \left\lfloor \frac{10a_1 + a_0}{10} \right\rfloor = 10a_1 + a_0 - 9a_1 = a_1 + a_0$ OK!
(ii) Hipótese de Indução: Suponha que para todo inteiro positivo n com $\leq (k-1)$ dígitos,
$S(n) = n - 9 \cdot \sum_{i=1}^{k-2} \left\lfloor \frac{n}{10^i} \right\rfloor$
(iii) Passo Indutivo: Vamos provar para k. Seja $n = \overline{a_{k-1} a_{k-2} \ldots a_1 a_0}$.
Seja também $n^* = \overline{a_{k-2} a_{k-3} \ldots a_1 a_0}$.
Note que $\left\lfloor \frac{10^{k-1} a_{k-1} + n^*}{10^i} \right\rfloor = 10^{k-1-i} a_{k-1} + \left\lfloor \frac{n^*}{10^i} \right\rfloor$
Veja agora que:

$$S(n) = a_{k-1} + S(n^*) = a_{k-1} + n^* - 9 \cdot \sum_{i=1}^{k-2} \left\lfloor \frac{n^*}{10^i} \right\rfloor$$

$$= 10^{k-1} a_{k-1} - (10^{k-1} - 1) a_{k-1} + n^* - 9 \cdot \sum_{i=1}^{k-2} \left\lfloor \frac{n^*}{10^i} \right\rfloor$$

$$= n - (10^{k-1} - 1) a_{k-1} - 9 \cdot \sum_{i=1}^{k-2} \left\lfloor \frac{n^*}{10^i} \right\rfloor$$

$$= n - 9 \cdot \left(\frac{10^{k-1} - 1}{9} \right) a_{k-1} - 9 \cdot \sum_{i=1}^{k-2} \left\lfloor \frac{n^*}{10^i} \right\rfloor$$

$$= n - 9 \cdot (10^{k-2} + 10^{k-3} + \cdots + 10^1 + 1) a_{k-1} - 9 \cdot \sum_{i=1}^{k-2} \left\lfloor \frac{n^*}{10^i} \right\rfloor$$

$$= n - 9 \cdot \sum_{i=1}^{k-1} \left\lfloor \frac{n^*}{10^i} \right\rfloor$$

Propriedade 3 Para $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, $S(n_1 + n_2) \leq S(n_1) + S(n_2)$

Demonstração. Pela propriedade 2, temos que $S(n_1 + n_2) = (n_1 + n_2) - 9 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n_1 + n_2}{10^i} \right\rfloor$.

Sabemos que $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $\lfloor x + y \rfloor \geq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$. Daí, $\left\lfloor \frac{n_1 + n_2}{10^i} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{n_1}{10^i} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n_2}{10^i} \right\rfloor$

$$\implies \sum_{i=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n_1 + n_2}{10^i} \right\rfloor \geq \sum_{i=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n_1}{10^i} \right\rfloor + \sum_{i=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n_2}{10^i} \right\rfloor.$$

Logo, $S(n_1+n_2)=(n_1+n_2)-9\cdot\sum_{i=1}^{\infty}\left\lfloor\frac{n_1+n_2}{10^i}\right\rfloor \leq n_1-9\cdot\sum_{i=1}^{\infty}\left\lfloor\frac{n_1}{10^i}\right\rfloor+n_2-9\cdot\sum_{i=1}^{\infty}\left\lfloor\frac{n_2}{10^i}\right\rfloor=S(n_1)+S(n_2)$.

Portanto, $S(n_1+n_2)\leq S(n_1)+S(n_2)$

Propriedade 4 Para $n_1,n_2\in\mathbb{N}$, $S(n_1\cdot n_2)\leq\min(n_1\cdot S(n_2),n_2\cdot S(n_1))$

Demonstração. Vamos aplicar a propriedade 3, já que podemos ver o produto $n_1\cdot n_2$ como $\underbrace{n_1+n_1+\cdots+n_1}_{n_2 vezes}$. Então, $S(n_1\cdot n_2)\leq\underbrace{S(n_1)+S(n_1)+\cdots+S(n_1)}_{n_2 vezes}=n_2\cdot S(n_1)$.

Analogamente, $S(n_1\cdot n_2)\leq n_1\cdot S(n_2)$. Daí, $S(n_1\cdot n_2)\leq\min(n_1\cdot S(n_2),n_2\cdot S(n_1))$, como queríamos.

3 Técnicas

Vamos focar em duas técnicas principais, que são: cotas e construções. Note que, somente com módulo 9, não conseguimos descobrir a soma dos algarismos de um n qualquer. Por exemplo, o número $m=856$, a soma dos algarismos é 19, mas módulo 9 é 3. Para contornar esse problema, normalmente tentamos estimar a soma dos algarismos pela quantidade de algarismos. Daí, se soubéssemos que nosso m era menor que 10^3 e maior que 10^2, então ele teria 3 dígitos. E daí $S(m)\leq 27$, pois seria a maior soma possível (9+9+9), com isso, só teríamos duas possibilidades para $S(m)$: 1 ou 19 (são os únicos números menores que 27 e $\equiv 1 \pmod 9$). Mas soma 1 seria só se fosse 100, porém $m>100$. Então $S(m)=19$. Já as construções são para estilos de problemas em que o número em questão possui propriedades mais específicas. Vamos observar melhor essas situações nos exemplos.

4 Exemplos com Cotas

Exemplo 1. (IMO 1975) Quando 4444^{4444} é escrito na base 10, a soma de seus algarismos é A. Se B é a soma dos algarismos de A, determine a soma dos algarismos de B.

Solução: Primeiramente, note que $A=S(4444^{4444})\equiv 16^{4444}\equiv 7^{4444} \pmod 9$. Como $7^1\equiv 7 \pmod 9$, $7^2\equiv 49\equiv 4 \pmod 9), 7^3\equiv 28\equiv 1 \pmod 9$, então podemos escrever 7^{4444} em congruência como: $(7^3)^{1481}\cdot 7^1\equiv 7 \pmod 9$. Já que $A\equiv S(A)\equiv B\equiv S(B) \pmod 9$, então $S(B)\equiv 7 \pmod 9$. Agora, vamos fazer algumas estimativas: Note que $4444<10000=10^4 \implies 4444^{4444}<(10^4)^{4444}$. Logo, 4444^{4444} possui no máximo $4444\cdot 4=17776$ dígitos. Daí, $A=S(4444^{4444})\leq 9\cdot 17776=159984$. Então, $B=S(A)\leq S(149999)=41$, que é a maior soma que pode ser atingida por um número menor que 159984. Com isso, $S(B)\leq S(39)=12$, que, novamente, é a maior soma que pode ser atingida por um número menor que 41. Portanto, como $S(B)\equiv 7 \pmod 9$ e $S(B)\leq 12$, $\boxed{S(B)=7}$.

Exemplo 2. (IME 2022) Um número natural é palíndromo quando é o mesmo lido da esquerda para a direita e vice-versa. Seja n um número natural palíndromo tal que $1000\leq n\leq 9999$. Se n é um cubo perfeito, determine a soma dos algarismos de n.

Solução: Como $1000 \leq n \leq 9999 \implies n = \overline{abba}$, onde $a, b \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ e $a \neq 0$. Daí, sabemos que $n = 1000a + 100b + 10b + a = q^3$, $q \in \mathbb{N}$. Então $1001a + 110b = 11(91a + 10b) = q^3 \implies 11 \mid q^3 \implies 11^3 \mid q^3$. Logo, $q^3 = 11^3 \cdot m^3$. Se $m \geq 2 \implies q^3 = 1331 \cdot m^3 \geq 1331 \cdot 8 = 10648 > 9999$, absurdo!. Portanto só podemos ter $n = q^3 = 11^3 = 1331$. E assim a soma dos algarismos de 1331 é $1 + 3 + 3 + 1 = 8$. ■

5 Exemplos de Construção

Exemplo 3. (APMO 2014) Para cada inteiro positivo m, denote por $S(m)$ e $P(m)$ a soma e o produto, respectivamente, dos algarismos de m. Mostre que para cada inteiro positivo n, existem inteiros positivos $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ satisfazendo as seguintes condições: $S(a_1) < S(a_2) < S(a_3) < \cdots < S(a_n)$ e $S(a_i) = P(a_{i+1})$ $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$. (Faça $a_{n+1} = a_1$).

Solução: Basicamente temos a seguinte sequência: $S(a_1) = P(a_2) < S(a_2) = P(a_3) < \cdots < S(a_{n-1}) = P(a_n) < S(a_n) = P(a_1)$. Note que temos muitas ocorrências de $S(a_i) > P(a_i) \forall i = 2, 3, \ldots, n$ e $S(a_1) < P(a_1)$, e veja que se tivéssemos um a_i tal que $S(a_i) < P(a_i)$, então basta colocar uma quantidade suficiente de uns para que a soma dos algarismos aumente e o produto se mantenha.

Daí, podemos tentar fazer $a_i = \underbrace{11111\ldots111}_{x_i vezes}\underbrace{2222\ldots222}_{y_i vezes}$

Temos que $S(a_i) = P(a_{i+1})$, então $x_i + 2y_i = 2^{y_{i+1}} \implies x_i = 2^{y_{i+1}} - 2y_i$.

Colocando $y_i = i$, teríamos $x_i = 2^{i+1} - 2i$. Agora, só precisamos nos preocupar quando $S(a_n) = P(a_1)$, mas $P(a_1) = 2$, que é bem pequeno, e com isso a ideia é trocar $i \to i + a$ para y_i.

$\implies \boxed{x_i = 2^{i+1+a} - 2(i+a)}$ (*)

Sabemos que $S(a_1) = P(a_2)$ e $S(a_n) = P(a_1)$. Logo:

$S(a_1) = P(a_2) \implies \boxed{x_1 + 2y_1 = 2^{y_2} = 2^{a+2}}$ (1)

$S(a_n) = P(a_1) \implies x_n + 2y_n = 2^{y_1}$.

Colocando $y_n = n + a$, conseguimos: $\boxed{x_n + 2(n+a) = 2^{y_1}}$. (2)

Por outro lado, se existisse o "a_{n+1}", de (*) e trocando "y_{n+1}" por $(n+1+a)$:

$x_n = 2^{n+1-a} - 2y_n = 2^{n+1+a} - 2(n+a)$. Daí, de (2), $x_n = 2^{y_1} - 2(n+a) = 2^{n+1+a} - 2(n+a)$.

Assim, basta colocar $y_1 = (n+1+a)$. E, substituindo em (1),

$x_1 + 2(n+1+a) = 2^{a+2} \implies x_1 = 2^{a+2} - 2(n+1+a)$.

Portanto, $a_1 = \underbrace{1111\ldots11}_{2^{a+2}-2(n+1+a)}\ \underbrace{2222\ldots22}_{n+1+a}$ e $a_i = \underbrace{1111\ldots11}_{2^{i+1+a}-2(i+a)}\ \underbrace{2222\ldots22}_{i+a}$, $2 \leq i \leq n$ funciona, desde que $2^{a+2} \gg 2(n+1+a)$, para garantir uma boa quantidade de "uns".

Exemplo 4. (Sierpinski) Prove que para todo inteiro positivo s, existe um inteiro positivo n cuja soma de dígitos é s e $s \mid n$.

Solução: Qual a soma de dígitos mais simples? $1 + 1 + 1 + \ldots$, então queremos procurar um múltiplo de s com s uns. E podemos chegar nisso com soma de potências de 10! Se for algo do tipo: $n = 10^1 + 10^2 + \cdots + 10^s$. Mas e se s tiver fator 2 ou 5?

Ah, então podemos colocar $s = 2^\alpha \cdot 5^\beta \cdot \gamma$ e $n = 10^{\alpha+\beta}(10^1 + 10^2 + \cdots + 10^s)$. Daí, $2^\alpha \cdot 5^\beta \mid 10^{\alpha+\beta}$, e só precisamos que $10^1 + 10^2 + \cdots + 10^s \equiv 0 \pmod{\gamma}$.

Mas note que $\gamma \mid s$, e como temos s termos de soma, podemos forçar a cada um deles ser $\equiv 1 \pmod{\gamma}$, basta trocar 10^i por $10^{\phi(\gamma)\cdot i}$, pois $(10^{\phi(\gamma)})^i \equiv 1^i \equiv 1 \pmod{\gamma}$. Logo, sendo $s = 2^\alpha \cdot 5^\beta \cdot \gamma$ e $n = 10^{\alpha+\beta}(10^{\phi(\gamma)} + 10^{2\cdot\phi(\gamma)} + \cdots + 10^{s\cdot\phi(\gamma)})$, temos que a soma dos algarismos de n é s e $s \mid n$. ■

6 Problemas!

Problema 1. (Iberoameriana 1995) Determine todos os valores possíveis da soma dos dígitos de um quadrado perfeito.

Problema 2. (Rioplatense 2016) Os números naturais são escritos no quadro em ordem crescente, resultando na sequência $123456789101112\dots$. Seja A_k o número formado pelos primeiros k dígitos da sequência. Prove que para todo inteiro positivo n, existe um inteiro positivo m, satisfazendo as seguintes três condições:

- n divide A_m;
- n divide m;
- n divide a soma dos dígitos de A_m.

Problema 3. (TST Cone Sul 2018) Para cada inteiro positivo n, sejam $S(n)$ a soma dos algarismos de n e $P(n)$ o produto dos algarismos de n. Por exemplo, $S(123) = 1+2+3 = 6$ e $P(451) = 4\cdot 5\cdot 1 = 20$. Determine todos os inteiros positivos n para os quais

$$n = S(n) + P(n).$$

Problema 4. (OBM 2018) Para todo inteiro positivo n definimos $s(n)$ como a soma dos dígitos de n. Determine todos os pares (a,b) de inteiros positivos para os quais

$$s(an+b) - s(n)$$

assume um número finito de valores ao variar n nos inteiros positivos.

Problema 5. (Romênia- Teste JBMO 1999) Ache todos os inteiros positivos n tais que existem inteiros positivos a e b satisfazendo: $S(a) = S(b) = S(a+b) = n$.

Problema 6. (Cone Sul 2017) Um número inteiro positivo n se denomina *guayaquileno* se a soma dos dígitos de n é igual a soma dos dígitos de n^2. Achar todos os possíveis valores que pode assumir a soma dos dígitos de um número *guayaquileno*.

Problema 7. (Cone Sul 2016) Seja $S(n)$ a soma dos dígitos do número inteiro positivo N. Encontre todos os inteiros positivos n tais que $S(n)\cdot(S(n)-1) = n-1$

Problema 8. (IMOSL 1999) Prove que para todo número real M, existe uma progressão aritmética infinita tal que:

- cada termo é um inteiro positivo e a razão não é múltipla de 10
- a soma dos dígitos de cada termo (na representação decimal) é maior que M.

Problema 9. (Kvant Magazine No. 2 2024 M2783) A soma dos dígitos de um número natural é k. Dado que $k \geq 4$, qual a maior soma de dígitos possível para:

1. o quadrado desse número
2. a quarta potência desse número

Problema 10. (Baltic Way 2023) Mostre que $S(2^{2^{2\cdot 2023}}) > 2023$, onde $S(m)$ denota a soma dos dígitos de m.

Problema 11. (Rioplatense 2018) Para cada inteiro positivo m, denotamos $S(m)$ como a soma de seus dígitos. Por exemplo, $S(2018) = 2+0+1+8 = 11$. Dizemos que um inteiro positivo n é rioplatense se existe um inteiro positivo m tal que $m + 2S(m) = n$. Determinar todos os inteiros positivos que são rioplatenses.

Problema 12. (IMOSL 2016) Para cada inteiro positivo k, denotamos a soma de dígitos de k na representação decimal por $S(k)$. Determine todos os polinômios $P(x)$ com coeficientes inteiros tal que para todo inteiro positivo $n \geq 2016$, $P(n)$ é positivo e

$$S(P(n)) = P(S(n)).$$

Problema 13. (IMOSL 2022) Para cada inteiro positivo n, denotamos por $s(n)$ a soma dos dígitos de n. Seja $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ um polinômio, onde $n \geq 2$ e a_i é inteiro positivo para todo $0 \leq i \leq (n-1)$. Pode existir um caso em que, para todos os inteiros positivos k, $s(k)$ e $s(P(k))$ tenham a mesma paridade?

Problema 14. (Lista Treinamento Cone Sul) Prove que existem infinitos inteiros naturais n com a seguinte propriedade: não existe um número de n algarismos tal que a soma de tais dígitos é igual ao seu produto.

Problema 15. Seja $P(n)$ o produto dos dígitos de um número natural n, e $S(n)$ a soma dos dígitos do número n. Para quantos n, onde $10 < n < 2022$, vale que $P(n) + S(n) = n$?

Problema 16. (Iberoamericana 2017) Para cada inteiro positivo n, seja $S(n)$ a soma de seus dígitos. Dizemos que n possui a propriedade P se todos os termos da sequência infinita $n, S(n), S(S(n)), \ldots$ são pares, e dizemos que n possui a propriedade I se todos os termos da sequência são ímpares. Mostre que para $1 \leq n \leq 2017$, existem mais n com a propriedade I do que com a propriedade P.