Continuidade Discreta

Julia Leguiza

1 Introdução

Olá pessoal, nesse material, vamos abordar um tema bem legal de combinatória, que é a continuidade discreta. Desde já, no material Combinatória Geométrica, fizemos uma introdução à ideia de continuidade e resolvemos um exemplo. Aqui, vamos revisar a definição e resolver mais problemas.

Definição 1. Função Contínua: Dizemos que uma função f real é contínua se seu gráfico não tem “pulos abruptos", ou seja, tal gráfico é desenhado sem tirar o lápis do papel. De maneira mais formal, se f é contínua em $[a, b]$, então $\forall\ m \in [a, b]$,

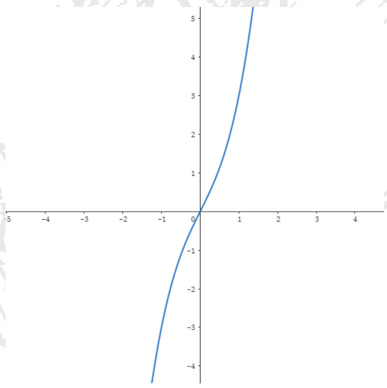
$$\lim_{x \to m} f(x) = f(m).$$

.

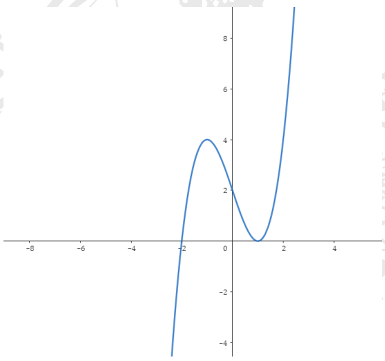
A partir disso, conseguimos o seguinte lema que será o mais utilizado nesse material:

Lema 1. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e $a, b \in \mathbb{R}$ números na imagem de f, ou seja, existem z e w tais que $f(z) = a$ e $f(w) = b$. Logo, $\forall x \in (a, b)$, existe um $t \in (z, w)$ tal que $f(t) = x$.

Exemplos de funções contínuas:



(a) $f(x) = x^3 + 2x$



(b) $f(x) = x^3 - 3x + 2$

Exemplos de funções não contínuas

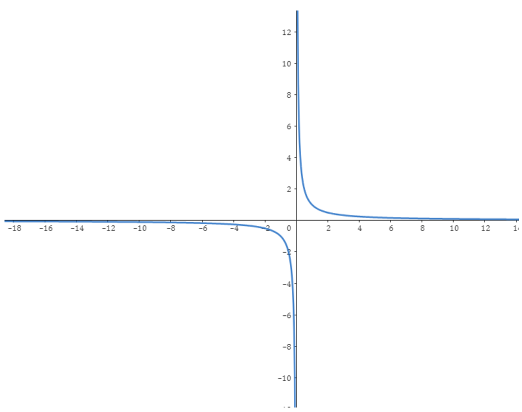


Figura 1: $f(x) = \frac{1}{x}$

2 Qual é a ideia principal?

Normalmente, procuramos definir uma função f que varia pouco, e então provar que ela é contínua. A partir disso, sabendo dois pontos a e b na imagem da função, podemos obter resultados legais, como por exemplo f passar por um ponto específico entre a e b. Vamos descobrir mais com os problemas resolvidos!

3 Problemas Introdutórios

Problema 1. Prove que existe um conjunto de 100 inteiros positivos consecutivos dentre os quais exatamente 15 são primos.

Solução: Seja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ uma função tal que $f(n) = \#$ quantidade de números primos de n até $(n + 99)$. Agora, note que:

$$f(n+1) - f(n) = \begin{cases} -1, & \text{se } n \text{ é primo e } (n+100) \text{ é composto} \\ 0, & \text{se } n \text{ e } (n+100) \text{ são ambos primos ou ambos compostos} \\ 1, & \text{se } n \text{ é composto e } (n+100) \text{ é primo} \end{cases}$$

Logo, f é uma função contínua, então se achamos um x e um y tal que $f(x) > 15$ e $f(y) < 15$, existe um $m \in \mathbb{N}$ tal que $m \in [x, y]$ e $f(m) = 15$. Veja: $f(1) = 25$ e $f(100! + 1) = 0$, pois $i + 1 \mid 100! + i + 1$, pra todo $i = 1, 2, \ldots, 99$ e daí não há nenhum primo de $100! + 2$ até $100! + 100$. Já achamos nosso x e y! Portanto, por continuidade discreta, existe um $m \in [1, 100! + 1]$ tal que $f(m) = 15$, ou seja, existe um m tal que no intevalo $m, m+1, m+2, \ldots, m+99$ há exatamente 15 números primos. Obs: Note que qualquer quantidade entre 0 e 25 funcionaria, por conta dos exemplos de f's que demos.

Problema 2. (OBM 2008) Sobre uma reta há um conjunto S de $6n$ pontos. Destes, $4n$ são escolhidos ao acaso e pintados de azul; os $2n$ demais são pintados de verde. Prove que existe um segmento que contém exatamente $3n$ pontos de S, sendo $2n$ pintados de azul e n pintados de verde.

Solução: Sejam $P_1, P_2, \ldots, P_{6n}$ os $6n$ pontos da reta em ordem e seja $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ uma função tal que $g(k) = \#$ a quantidade de pontos verdes no intervalo de P_k até P_{3n-k+1}. Veja que g é contínua, pois

$$g(k+1) - g(k) = \begin{cases} -1, & \text{se } P_k \text{ é verde e } P_{3n-k+2} \text{ não é} \\ 0, & \text{se } P_k \text{ e } P_{3n-k+2} \text{ são ambos verdes ou ambos azuis} \\ 1, & \text{se } P_k \text{ não é verde e } P_{3n-k+2} \text{é} \end{cases}$$

Agora, note que se $g(1) = n$, acabou. Caso contrário, temos 2 casos: $g(1) > n$ e $g(1) < n$. Consideraremos $g(1) > n$, pois o segundo caso é análogo. Daí, $g(3n+1) < n$, pois se fosse $> n$, então $g(1) + g(3n + 1) > 2n = \#$ quantidade de pontos verdes. Absurdo! Então $g(1) > n$ e $g(3n + 1) < n$. Portanto, por continuidade, existe um t tal que $g(t) = n$, CQD.

Problema 3. Chamamos um inteiro positivo n de *doido* se e somente se existem inteiros $a, b > 1$ tais que $n = a^b + b$. Existem 2022 inteiros positivos consecutivos dos quais exatamente 2020 são *doidos*?

Solução: E se tentássemos achar 2022 inteiros positivos consecutivos doidos (todos)? Primeiro, poderíamos ficar variando b de 2 a 2023 e depois ajeitar o a. Como a e $b > 1$, então podemos escolher uma base simples, como o 2, mas veja que $2^2 + 2$ e $2^3 + 3$ não são consecutivos, então podemos escolher $a = 2^{\frac{2023!}{b}}$, pois daí $a^b = 2^{2023!}$ pra qualquer $b \in \{2, 3, \ldots, 2023\}$. Logo, o intervalo $[2^{2023!} + 2, 2^{2023!} + 2023]$ possui 2022 números doidos. Agora, pra provar que passa por 2020, pegue o intervalo $[1, 2022]$, ele claramente tem ≤ 2019 números doidos.

Então, sendo $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ uma função tal que $f(n) = \#$ quantidade de números doidos em $\{n, n+1, \ldots, n+2021\}$.

Como $f(n+1) - f(n) = \begin{cases} -1, & \text{se } n \text{ é doido e } (n+2022) \text{ não é doido} \\ 0, & \text{se } n \text{ e } (n+2022) \text{ são ambos doidos ou ambos não doidos.} \\ 1, & \text{se } (n+2022) \text{é doido e } n \text{ não é doido.} \end{cases}$

Portanto, f é contínua e já que $f(1) \leq 2019$ e $f(2^{2023!} + 2) = 2022$, então existe N tal que $f(N) = 2020$, como queríamos.

4 Problemas

Problema 4. (USAMO 2005) Seja n um inteiro maior do que 1. São dados $2n$ pontos no plano de modo que entre eles não haja três colineares. Dos $2n$ pontos, n são coloridos de azul e os demais n são coloridos de vermelho. Uma reta do plano é dita *balanceada* quando passa por um ponto azul e um ponto vermelho e, em cada lado da reta, a quantidade de pontos azuis naquele lado é igual à quantidade de pontos vermelhos do mesmo lado. Prove que há ao menos 2 retas balanceadas.

Problema 5. (China 2019) A sequência $\{a_n\}_{n\geq 1}$ é definida como segue: a_1 é um inteiro maior que 1. Para $n \geq 1$, definimos $a_{n+1} = a_n + P(a_n)$, onde $P(a_n)$ denota o maior fator primo de a_n. Prove que existe ao menos 1 quadrado perfeito na sequência $\{a_n\}_{n\geq 1}$.

Problema 6. (IMO 1996) Sejam p, q e n três inteiros positivos tais que $p + q < n$. Seja $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ uma $(n+1)$-tupla de inteiros satisfazendo as seguintes condições:

(a) $x_0 = x_n = 0$, e

(b) Para cada i com $1 \leq i \leq n$, vale $x_i - x_{i-1} = p$ ou $x_i - x_{i-1} = -q$.

Mostre que existem índices $i < j$ com $(i, j) \neq (0, n)$ tal que $x_i = x_j$.

Problema 7. (OBM 1999) O planeta Zork é esférico e tem várias cidades. Dada qualquer cidade existe uma cidade antípoda (i.e., simétrica em relação ao centro do planeta). Existem em Zork estradas ligando pares de cidades. Se existe uma estrada ligando as cidades P e Q então também existe uma estrada ligando as cidades P' e Q', onde P' é a antípoda de P e Q' é a antípoda de Q. Além disso, estradas não se cruzam e dadas duas cidades P e Q é sempre possível viajar de P a Q usando alguma sequência de estradas. O preço da Kriptonita em Urghs (a moeda planetária) em duas cidades ligadas por uma estrada difere no máximo 100 Urghs. Prove que existem duas cidades antípodas onde o preço da Kriptonita difere por no máximo 100 Urghs.

Problema 8. (IMO 2011) Seja $\mathcal{S}$ um conjunto finito de dois ou mais pontos do plano. Em S não há 3 pontos colineares. Um moinho de vento é um processo que começa com uma reta ℓ que passa por um único ponto $P \in \mathcal{S}$. A reta roda no sentido horário pelo pivô P até que encontre outro ponto pertencente a $\mathcal{S}$. Esse ponto, Q, se torna o novo pivô, e a reta agora roda no sentido horário sobre Q, até encontrar um novo ponto em $\mathcal{S}$. Esse processo continua indefinidamente. Mostre que podemos escolher P e ℓ de forma que o moinho de vento resultante use cada ponto de $\mathcal{S}$ como pivô uma quantidade infinita de vezes.

Problema 9. (Cone Sul 2012) Ao redor de uma circunferência estão escritos 2012 números, cada um deles é igual a 1 ou -1. Se não há 10 números consecutivos cuja soma seja 0, ache todos os possíveis valores da soma dos 2012 números.

5 Dicas e Soluções

Problema 4:
Dica 1. Considere o fecho convexo (ideia presente no material de Combinatória Geométrica). Veja que se tivermos pontos das duas cores na borda o problema acaba (Por quê?)
Dica 2. Se a borda só tiver pontos vermelhos, fixe um deles pra ser um dos vértices e gire a reta em torno desse ponto. O que podemos afirmar sobre a quantidade de pontos vermelhos e azuis sobre 1 dos lados?

Problema 5:
Solução: Para cada $n \in \mathbb{Z}_+^*$, defina a sequência de números primos $\{P_n\}_{n\geq 1}$ de tal modo que P_n é o maior fator primo que divide a_n, ou seja, $P_n = P(a_n)$, $\forall\ n$.

Logo, para cada $n \in \mathbb{Z}_+^*$, como $P_n \mid a_n$, existe $b_n \in \mathbb{Z}_+^*$ tal que $\boxed{a_n = P_n \cdot b_n}$.

Dessa forma, temos a sequência $\{b_n\}_{n\geq 1}$ de números inteiros positivos.

Logo, $a_{n+1} = a_n + P(a_n) = a_n + P_n \implies \boxed{a_{n+1} = P_n \cdot b_n + P_n = P_{n+1} \cdot b_{n+1} = P_n(b_n+1)}$ (1)

De (1), $a_{n+1} = P_n(b_n+1) \implies P_n \mid a_{n+1}$. Como P_{n+1} é o maior fator primo de $a_{n+1} \implies \boxed{P_{n+1} \geq P_n}$. (2)

$\implies$ A sequência $\{P_n\}$ dos primos é não decrescente.

Vamos considerar agora 3 casos:

<u>1º caso:</u> Suponha que $\exists\ n_0 \in \mathbb{Z}_+^*$ tal que $b_{n_0} = P_{n_0}$. Então, $a_{n_0} = P_{n_0} \cdot b_{n_0} = P_{n_0}^2 \implies a_{n_0}$ é quadrado perfeito! $\to$ OK!

<u>2ºcaso:</u> Suponha agora que $b_n > P_n$, $\forall n \in \mathbb{Z}_+^*$. De (1), $b_{n+1} = \dfrac{P_n(b_n+1)}{P_{n+1}}$.

De (2), $P_{n+1} \geq P_n \implies \dfrac{P_n}{P_{n+1}} \leq 1$.

Logo, $b_{n+1} = (b_n+1)\dfrac{P_n}{P_{n+1}} \leq b_n + 1$.

$\therefore \boxed{b_{n+1} \leq b_n + 1}$, $\forall\ n \in \mathbb{Z}_+^*$ (3)

Como $a_n = P_n \cdot b_n < b_n^2 \implies \boxed{b_n^2 > a_n}$, $\forall\ n \in \mathbb{Z}_+^* \implies b_n > \sqrt{a_n} \forall\ n \in \mathbb{Z}_+^*$.

$\implies$ A sequência b_n de inteiros positivos é ilimitada superiormente.

Seja p um primo maior que b_1. Como $\{b_n\}$ é ilimitada, existe um índice m suficientemente grande tal que $b_m > p > b_1$.

De (3): $b_{n+1} \leq b_n + 1 \implies b_{n+1} - b_n \leq 1$.

Para sairmos de b_1 e chegarmos em b_m, só podemos caminhar para a direita de 1 em 1 unidade, logo, por continuidade discreta, todos os inteiros positivos entre b_1 e b_m pertencem à sequência $\{b_n\} \implies$ o primo $p \in \{b_n\}$. Então, existe um índice b_n tal que $p = b_k$. Daí,

$a_k = P_k \cdot b_k = P_k \cdot p \implies p \leq P_k$, já que P_k é o maior primo que divide a_k. Mas $b_n > P_n \forall n \implies b_k > P_k \geq p = b_k. \implies b_k > b_k$. Absurdo!!

Assim, não podemos ter $b_n > P_n$, $\forall\ n \in \mathbb{Z}_+^*$. Logo, deve existir um índice $n_0 \in \mathbb{Z}_+^*$ tal que $b_{n_0} \leq P_{n_0}$, que é o nosso 3º caso! Se $b_{n_0} = P_{n_0}$, voltamos ao 1º caso, então considere $b_{n_0} < P_{n_0}$.

3º caso: Existe um índice n_0 tal que $b_{n_0} < P_{n_0}$. Faça $x = P_{n_0} - b_{n_0}$, $x \in \mathbb{Z}_+^*$.

De (3):

$$b_{n_0+1} \leq b_{n_0} + 1$$
$$b_{n_0+2} \leq b_{n_0+1} + 1$$
$$\vdots$$
$$b_{n_0+y} \leq b_{n_0+y-1} + 1$$

Somando tudo, $b_{n_0+y} \leq b_{n_0} + y$, $y \in \mathbb{Z}_+^*$. Temos que: $a_{n_0+1} = P_{n_0}(b_{n_0}+1) = P_{n_0+1} \cdot b_{n_0+1} \implies P_{n_0+1} \mid P_{n_0}(b_{n_0}+1)$. Note que se $x = 1 \implies P_{n_0} = b_{n_0+1} \implies P_{n_0+1} \mid P_{n_0}^2 \implies P_{n_0+1} \mid P_{n_0} \implies P_{n_0} = P_{n_0+1}$. E, se $x > 1$, $b_{n_0} + 1 < P_{n_0} \leq P_{n_0+1} \implies P_{n_0+1} \nmid (b_{n_0}+1)$. Então, em ambos os subcasos, deveremos ter $P_{n_0+1} \mid P_{n_0} \implies \boxed{P_{n_0} = P_{n_0+1}}$. Daí, $a_{n_0+1} = P_{n_0}(b_{n_0}+1) = P_{n_0+1} \cdot b_{n_0+1} = P_{n_0} \cdot b_{n_0+1} \implies \boxed{b_{n_0} + 1 = b_{n_0+1}}$.

Também, $a_{n_0+2} = a_{n_0+1} + P_{n_0+1} = P_{n_0+2} \cdot b_{n_0+2}. \implies a_{n_0+2} = P_{n_0+1}(b_{n_0+1}+1) = P_{n_0+2} \cdot b_{n_0+2}$
$\implies a_{n_0+2} = P_{n_0+1}(b_{n_0}+2) = P_{n_0+2} \cdot b_{n_0+2}$
$\implies P_{n_0+2} \mid P_{n_0+1}(b_{n_0}+2)$. Se $x > 2 \implies b_{n_0} + 2 < P_{n_0} \leq P_{n_0+2} \implies P_{n_0+2} \nmid (b_{n_0}+2) \therefore P_{n_0+2} \mid P_{n_0+} \implies \boxed{P_{n_0+1} = P_{n_0+2}}$ e $\boxed{b_{n_0+2} = b_{n_0} + 2}$.

Assuma agora que para um certo $1 \leq j < x$, $P_{n_0} = P_{n_0+1} = P_{n_0+2} = \cdots = P_{n_0+(j-1)}$ e que $b_{n_0+(j-1)} = b_{n_0} + (j-1)$.

Daí, $a_{n_0+j} = P_{n_0+j} \cdot b_{n_0+j} = P_{n_0+j-1}(b_{n_0+j-1}+1) = P_{n_0+j-1}(b_{n_0} + j - 1 + 1) \implies P_{n_0+j} \cdot b_{n_0+j} = P_{n_0+j-1}(b_{n_0}+j)$.

Então, $P_{n_0+j} \mid P_{n_0+j-1}(b_{n_0}+j)$

Como $x > j \implies P_{n_0} - b_{n_0} > j \implies b_{n_0} + j < P_{n_0} \leq P_{n_0+j}$. Logo, $P_{n_0+j} \nmid (b_{n_0}+j) \therefore P_{n_0+j} \mid P_{n_0+j-1} \implies P_{n_0+j} = P_{n_0+j-1}$. Além disso, segue que $b_{n_0+j} = b_{n_0} + j$. Portanto, isso irá valer $\forall j = 1, 2, 3, \ldots, (x-1)$.

Logo, $P_{n_0} = P_{n_0+1} = \cdots = P_{n_0+x-1}$ e $b_{n_0+j} = b_{n_0} + j$, $\forall j = 1, 2, \ldots, (x-1)$.

$$a_{n_0+1} = a_{n_0} + P_{n_0}$$
$$a_{n_0+2} = a_{n_0+1} + P_{n_0+1}$$

$\vdots$

$$a_{n_0+x} = a_{n_0+x-1} + P_{n_0+x-1}$$

Somando tudo, $a_{n_0+x} = a_{n_0} + P_{n_0} + P_{n_0+1} + \cdots + P_{n_0+x-1} \implies a_{n_0+x} = a_{n_0} + x \cdot P_{n_0} = P_{n_0} \cdot b_{n_0}(P_{n_0} - b_{n_0})P_{n_0} = P_{n_0}^2$.

Portanto, a_{n_0+x} é um quadrado perfeito $\implies$ tal sequência terá ao menos 1 quadrado perfeito! ■

Problema 6:

Dica 1. Considere spg $\text{mdc}(p, q) = 1$. Então, $p + q \mid n$. Escreva $n = k(p+q)$ (Por quê?)

Dica 2. Considere a sequência $a_i = (x_i - x_{i-1})$. Ela contém kp vezes o número q e kq vezes o número p.

Problema 7:

Dica 1. Considere a_i = preço da Kriptonita em P_i e a'_i = preço da Kriptonita em P'_i, $\forall$ $i = 1, 2, \ldots, n$. E suponha por absurdo que $|a_j - a'_j| > 100$, $\forall$ $j = 1, 2, \ldots, n$.
Dica 2. Suponha spg $a_1 > a'_1$, o que podemos afirmar sobre os outros?
Dica 3. Teríamos que $a_i > a'_i$ pra todo i e quando fôssemos de n para 1, trocaria, ou seja, obteríamos que $a'_1 > a_1$. Absurdo!

Problema 8:

Dica 1. Pegue uma reta ℓ que passa por um ponto $P \in \mathcal{S}$ e que não seja paralela a qualquer outra reta ligando 2 pontos de $\mathcal{S}$. (Por quê essa reta existe?)
Dica 2. Analise o ângulo formado por ℓ e o eixo x a cada movimento.
Dica 3. Queremos que eventualmente a reta ℓ passe novamente por P, como conseguir isso? (devemos considerar também a paridade da quantidade de pontos em $\mathcal{S}$)

Problema 9:

Dica 1. Considere $a_1, a_2, \ldots, a_{2012}$ os números e $S(i) = a_i + a_{i+1} + \cdots + a_{i+9}$, $\forall i = 1, 2, \ldots, 2012$ (índices módulo 2012). O que podemos afirmar sobre a paridade de $S(i)$?
Dica 2. Quais valores $S(i+1) - S(i)$ pode assumir?