Simulado OBM 2024 - Ampulheta do Saber

Nível 2 - (8º ou 9º ano)

Olimpíada Brasileira de Matemática

Soluções

---

4. Note que $DA = DB$ e $\angle DAC = \angle DBC$. Então, $\triangle DAM \sim \triangle DBN$ o que resulta em:

$$\angle DMC = 180^\circ - \angle DMA = 180^\circ - \angle DNB = \angle DNC$$

Logo $CDNM$ é cíclico.

---

5. Temos dois casos:

Caso 1. $m > n$:

Seja $k^2 + 2kn + m^2 = S^2$, então $S^2 - (k+n)^2 = m^2 - n^2$. Como $m > n$, nós concluímos que $S > (k+n)$, e portanto $S \geq k+n+1$, logo $m^2 - n^2 \geq 2(k+n)+1$. Para acharmos a contradição, basta tomarmos $k > \frac{m^2-n^2-1-2n}{2}$.

Caso 2. $m < n$

Analogamente, como fizemos no caso 1, se tomarmos $k > \frac{n^2-m^2+1-2n}{2}$ chegaremos em contradição.

Portanto $m = n$.

---

6. Tome $P(x,y)$ para ser $x^3 + f(x)f(y) = f(f(x^3) + f(xy))$

$P(0,y)$ temos $f(0)f(y) = f(2f(0))$, se $f(0)$ diferente de 0 significa que $f(y) = 0$ que não é solução.

$P(\sqrt[3]{x}, 0)$ nos dá $f(f(x)) = x$ $(*)$

$P(1, f(y - f(1)))$ implica $1 + f(1)f(f(y - f(1))) = f(f(1) + f(f(y - f(1))))$ usando $(*)$ temos: $1 + f(1)(y - f(1)) = f(f(1) + y - f(1)) \iff f(y) = yf(1) + 1 - f(1)^2 \iff f(y) = ay + b$

$0 = f(0) = b$ temos que $f(x) = ax$

$a^2x = f(ax) = f(f(x)) = x$ então $a = \pm 1$ os quais ambos são soluções.

Logo $f(x) = x$ para todo x ou $f(x) = -x$ para todo x.