Simulado OBM 2024 - Ampulheta do Saber
Nível 2 - (8º ou 9º ano)

Soluções

---

1. Os r's que dão certos são todos os racionais com denominador ímpar. Veja que basta provar que a sequência tem um inteiro além do n, pois dado esse novo inteiro, teremos uma repetição das operações, ocasionando uma periodicidade na parte após da vírgula dos números da sequência, fazendo ela ter infinitos inteiros. Se r é irracional, suponha que tem algum inteiro K na sequência após n. Veja que K=n+r+2rt, para t sendo a quantidade de operações que serão feitas de n+r até K. Queremos que a parte fracionária de n+r(2t+1) seja 0, então como a parte de n já é 0, basta[r(2t+1)] ([x] está representando a parte fracionária de algum real x). Porém, temos que r é irracional, sendo impossível [r(2t+1)]=0. Assim, vamos assumir agora que r é racional. Temos que r=$\frac{p}{q}$, com mdc(p,q)=1. Queremos que em algum momento n+r+2rt seja inteiro, então [r(2t+1)]=[$\frac{p}{q}$(2t+1)]=0. Como mdc(p,q)=1, [$\frac{p}{q}$(2t+1)]=0 apenas se q divide 2t+1, que é par, então q não pode ser par. Agora, basta ver que se t=$\frac{q-1}{2}$, com q ímpar, temos $\frac{p}{q}$(2t+1)=p, que é inteiro. Logo, concluímos que os r's que dão certo são todos aqueles racionais com denominador ímpar.

---

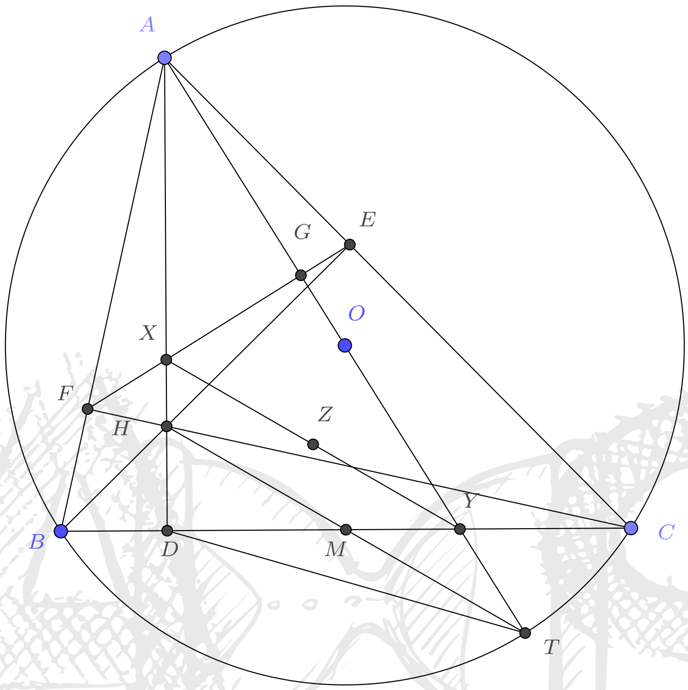
2. Iremos provar que apenas as potências de 2 dão certo. Primeiro, veja que se n é ímpar, basta que n-1 crianças recebam 0 doces e 1 criança receba n^2, pois n^2 é ímpar, então essa criança não pode dividir doce com ninguém que tem 0. Assuma que n é par, mas não é potência de 2. Temos que n=2^aT, sendo "a"maior que 0 e T ímpar maior que 1. Assim, podemos separar as crianças em T grupos de 2^a crianças, e para T-1 grupos, colocar as crianças com 2^aT-1 doces e 1 grupo com todas as crianças com 2^aT+T-1, pois não é possível fazer operação entre par e ímpar e os números de paridade igual tem a mesma quantidade de doces.

Agora, basta provar que funciona para potência de 2. Perceba que se estamos numa troca M e multiplicarmos os valor dos doces de cada criança, na troca M+1 o produto aumenta, pois apenas dois termos irão mudar, e, por desigualdade, se a+b=X=c+d, o maior produto ab ou cd é aquele que tem termos mais próximos de $\frac{X}{2}$, então o produto é monovariante e sempre aumenta. Porém, existe uma quantidade finita de produtos, fazendo com que não possa crescer sempre, ou seja, a quantidade de operações é finita. Isso só ocorre se tivermos uma última troca M, deixando k crianças com quantidades ímpares I iguais e n-k crianças com quantidades P pares iguais, ou seja, kI+(n-k)P=n^2. Só que temos n potência de 2, n=2^a, então kI+Pn-Pk=n^2, k(I-P)=n(n-P)=2^a(2^a-P), só que I-P é ímpar, então 2^a divide k, e k menor ou igual a n. Isso implica que k=n ou k=0, e, em ambos os casos, temos que todos os doces foram distribuídos de maneira igual entre as crianças. Logo, concluímos que os n's que dão certo são apenas potências de 2.

Simulado OBM 2024 - Ampulheta do Saber
Nível 2 - (8º ou 9º ano)

Soluções

3.



Defina T como a intersecção de AO com o circuncírculo de △ABC, H o ortocentro de △ABC e G a intersecção de EF com AO. Veja que BE//CT, pois como AT é diâmetro, A$\hat{C}$T=A$\hat{E}$B=90°. Analogamente, CF//BT, então #BHCT é um paralelogramo, e como M é o ponto médio de BC, M é o ponto médio de TH. Assim, basta mostrar que △AXY é homotético ao △ADT, ou seja, o problema acaba se XY//HT. Perceba que #DXGY é cíclico, pois A$\hat{E}$F=A$\hat{B}$C e, por isogonal, C$\hat{A}$O=H$\hat{A}$B, então A$\hat{D}$B=A$\hat{G}$E=90°, fazendo X$\hat{D}$Y+X$\hat{G}$Y=180°. Também, #DHGT é cíclico, já que, por potência de ponto, #DHGT é cíclico se, e somente se, AH×AD=AG×AT, então $\frac{AH}{AT}$=$\frac{AG}{AH}$, verdade, pois temos △AEF∼△ABC, então as razões de semelhança serão preservadas, já que temos, respectivamente, razão de diâmetros e razão de alturas. Com esses quadriláteros, veja que X$\hat{D}$G=X$\hat{Y}$G e H$\hat{D}$G=H$\hat{T}$G, então X$\hat{Y}$G=H$\hat{T}$G, fazendo com que HT//XY, que, consequentemente, acaba o problema.