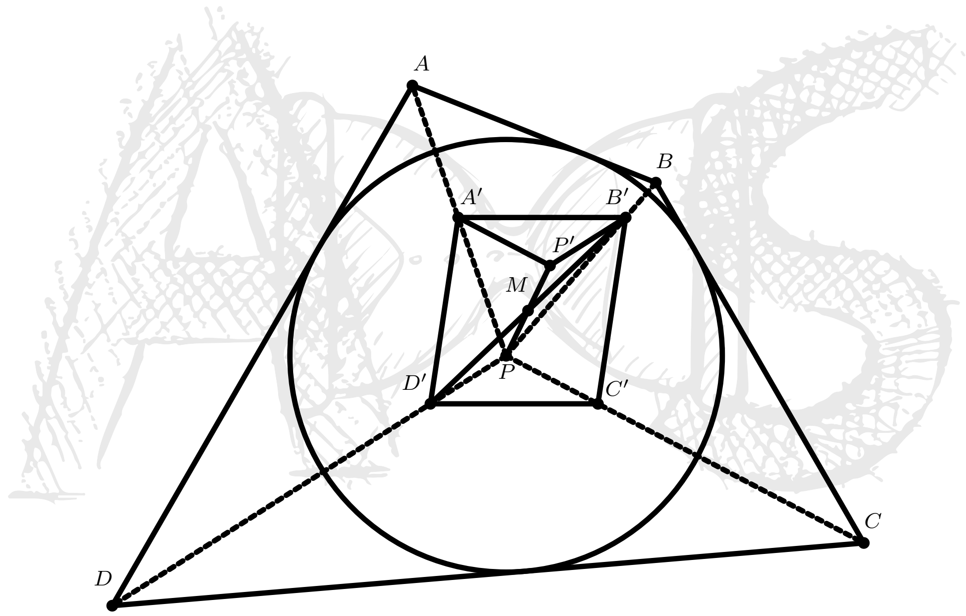
Simulado OBM 2024 - Ampulheta do Saber
Nível 3 - (Ensino Médio)

Soluções

---

4. Isso é impossível acontecer. Seja x o número de pares distintos A e B tal que A aparece antes de B; e seja y a quantidade de pares tal que B aparece antes de A. Dado um par A e B específico durante uma operação, temos que se A tá antes de B, então o A vai virar um B e aparecer depois do A que era o B antes, logo x e y são invariantes ao realizar o processo. Também temos que $x + y = \binom{250}{2}$ que é impar, então $x \neq y$. Mas na palavra inicial invertida, x e y vão trocar, cada par de x vai ser um par de y e cada par de y vai ser um par de x, e devemos ter $x = y$, o que é impossível.

5.



Vamos provar que P é o incentro de $ABCD$. Para isso, inverta por P, tome A', B', C' e D' as imagens de A, B, C e D na inversão, respectivamente. As duas últimas condições de ângulos vão dizer que $\hat{A}' = \hat{C}'$ e $\hat{B}' = \hat{D}'$, assim $A'B'C'D'$ é um paralelogramo com um ponto P no seu interior tal que $\angle A'PB' + \angle C'PD' = \angle B'PC' + \angle D'PA'$, mas a soma de todos esses ângulos é 360, logo $\angle A'PB' + \angle C'PD' = \angle B'PC' + \angle D'PA' = 180$, deste modo P possui um conjugado isogonal, chame ele de Q. Vamos provar que a reflexão de P pelo ponto médio de $A'C'$ (que também é ponto médio de $B'D'$, dado que $A'B'C'D'$ é um paralelogramo) é o ponto Q.

Soluções

Perceba que $\angle C'QD' = \angle QD'A' + \angle QC'B' = \angle PD'C' + \angle PC'D' = 180 - \angle C'PD' = \angle A'PB'$, de modo analogo $\angle B'PC' = \angle A'QD'$, $\angle C'PD' = \angle A'QB'$ e $\angle A'PD' = \angle B'QC'$. Por outro lado, se P' é o reflexo de P pelo encontro das diagonais (ponto médio de ambas), então temos que $\angle A'PB' = \angle C'P'D'$, por homotetia, analogamente $\angle B'PC' = \angle A'P'D'$, $\angle C'PD' = \angle A'P'B'$ e $\angle A'PD' = \angle B'P'C'$. Logo como os "ângulos" de P' e Q são os mesmos e como as circunferências que passa por $A'QB'$, $B'QC'$, $C'QD'$ e $D'QA'$ não sao coaxiais, assim $P' = Q$ e então $\angle QB'C' = \angle PD'A' = \angle PB'A'$ e $\angle PAD = \angle PAB$ na figura original, logo P ta na bissetriz de $\hat{A}$ e analogamente, ele é o incentro.

---

6. Primeiro, suponha que existam intervalos vermelhos arbitrariamente grandes. Escolha dois inteiros vermelhos a e b e considere um intervalo vermelho $[M, M+ab]$. Devemos ter $f(M) + af(b) = f(M+b) + (a-1)f(b) = \cdots = f(M+ab-b) + f(b) = f(M+ab) = f(M+ab-a) + f(a) = \cdots = f(M+a) + (b-1)f(a) = f(M) + bf(a)$, logo $f(x) = cx$ para todo x vermelho e algum $c > 0$, e se existe intervalos azuis arbitráriamente grandes, temos analogamente que $f(y) = yk$ para todo y azul e algum $k > 0$, logo o problema tá resolvido.

E se não existe intervalos azuis arbritariamente grandes, então existe algum $t > 0$ tal que intervalos azuis contêm no máximo t inteiros, logo tome $t' \leq t$ tal que se y é azul, então $y + t'$ é vermelho e $f(y) \leq f(y+t') = c(y+t') \leq c(y+t)$ para todo y azul, logo temos que o problema também está resolvido. Portanto, assuma que exista $T > 0$ tal que intervalos monocromáticos, vermelhos ou azuis, contenham no máximo T inteiros.

Lema. Para quaisquer $2T+1$ inteiros consecutivos positivos, existem v_1, v_2 vermelhos e a_1, a_2 azuis entre eles, tais que $v_1 + v_2 = a_1 + a_2$.

Prova. Se conseguirmos encontrar dois números não adjacentes da mesma cor (digamos vermelhos) a, b tal que todo $a < x < b$ é azul, então provamos o lema, pois $a + b = (b-1) + (a+1)$, onde $b-1$ e $a+1$ são azuis. Logo não podemos ter o começo e o fim de um bloco no "meio", porém cada bloco tem no máximo T caras, então conseguiriamos fazer isso com no máximo $2T$ números. Deste modo, com certeza existe a e b. ■

Para todo n inteiro não negativo, defina $g(n)$ o amior valor de $\dfrac{f(t)}{t}$ com $1 \leq t \leq \lfloor 1,5^n \cdot 1000T \rfloor$. é suficiente provar que $g(n)$ é cotada superiormente. Então temos a seguinte conjectura:

Simulado OBM 2024 - Ampulheta do Saber
Nível 3 - (Ensino Médio)

Soluções

Conjectura. Temos que

$$g(n+1) \leq g(0)\prod_{i=0}^{n}\left(1+\frac{4T+1}{1000T}1.5^{-i}\right)$$

Prova. Tome algum $\lfloor 1,5^n \cdot 1000T \rfloor < t \leq \lfloor 1,5^{n+1} \cdot 1000T \rfloor$. Seja $m = \lceil t/2 \rceil$; pelo nosso lema, existe v_1, v_2 vermelhos e a_1, a_2 azuis em $\{m, m+1, \ldots, m+2T\}$ tais que $v_1 + v_2 = a_1 + a_2 = k$, então

$$t \leq 2m \leq k \leq 2m + 4T \leq t + 4T + 1$$

agora, independente da cor do k, temos que

$$\frac{f(k)}{k} \leq max\left(\frac{f(v_1)}{v_1}, \frac{f(v_2)}{v_2}\right) \text{ ou } max\left(\frac{f(a_1)}{a_1}, \frac{f(a_2)}{a_2}\right) \leq g(n)$$

pois $m + 2T \leq \lfloor 1,5^n \cdot 1000T \rfloor$ (aqui usamos que $\frac{1,5^{n+1} \cdot 1000}{2} + 2 \leq 1,5^n \cdot 1000$, por isso é importante $1,5 < 2$). Então

$$f(t) \leq f(k) \leq kg(n) \Rightarrow \frac{f(t)}{t} \leq \frac{kg(n)}{t} \leq g(n)\left(1 + \frac{4T+1}{1,5^n \cdot 1000T}\right)$$

usando que $k \leq t+4T+1$ e $1,5^n \cdot 1000T < t$. Assim, nossa conjectura segue por indução. ■

Dado que $g(0)$ é constante, basta provar que

$$\prod_{i=0}^{\infty}\left(1+\frac{4T+1}{1000T}1.5^{-i}\right)$$

converge. Aplicando logaritmo natural e usando que $ln(1+x) \leq x$, basta que

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{4T+1}{1000T}1.5^{-i}$$

convirja, o que é verdade pois $\frac{4T+1}{1000T} < \frac{5T}{1000T} = \frac{1}{200}$ que é constante, e o somatório de $1,5^{-i}$ converge pois é soma de P.A.