

Simulado OBM 2024 - Ampulheta do Saber

Nível 3 - (Ensino Médio)



4. Inicialmente, uma palavra de 250 letras com 125 letras A e 125 letras B é escrito em um quadro. A cada operação, podemos escolher um bloco contínuo de letras com o mesmo número de letras A e B , inverter essas letras e trocar todo A por B e todo B por A . (Por exemplo, se escolhermos o bloco $ABABBA$, então ele vai virar o bloco $BAABAB$). É possível escolher uma palavra inicial tal que, depois de um número de movimentos, ela vai se tornar a mesma palavra, porém invertida? (Por exemplo, sair de $ABABBA$ e chegar em $ABBABA$)

5. Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo e P em seu interior, tal que $\angle APB + \angle CPD = \angle BPC + \angle DPA$, $\angle PAD + \angle PCD = \angle PAB + \angle PCB$ e $\angle PDC + \angle PBC = \angle PDA + \angle PBA$. Prove que o quadrilátero é circunscritível.

6. Cada inteiro positivo é colorido de vermelho ou azul. Uma função f dos inteiros positivos nos inteiros positivos tem as seguintes duas propriedades:

- Se $x \leq y$, então $f(x) \leq f(y)$ e
- Se x, y e z (não necessariamente distintos) são inteiros positivos da mesma cor e $x + y = z$, então $f(x) + f(y) = f(z)$.

Prove que existe um inteiro positivo a tal que $f(x) \leq ax$ para todo x nos inteiros positivos.