Simulado OBM 2024 - Ampulheta do Saber
Nível 3 - (Ensino Médio)

Olimpíada Brasileira de Matemática

Soluções

---

1. Como mx é inteiro para algum $m \leq 2022$ segue que x é racional, e que o denominador da fração irredutível de x é menor ou igual a 2022. Por outro lado,

$$x = \frac{p_2 \dots p_k + p_1 p_3 \dots p_k + \dots + p_1 \dots p_{k-1}}{p_1 \dots p_k}$$

e como cada p_i é primo, segue que o denominador da fração acima é coprimo com o numerador, i.e., a fração acima é irredutível e logo $p_1 p_2 \dots p_k \leq 2022$. Agora note que se $k \geq 5$ então $p_1 p_2 \dots p_k \geq 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 2310 > 2022$ e logo $k \leq 4$.

Agora temos que testar casos. primeiro note que $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{43} < 1$ e é *carneiroso*; logo $k \geq 4$ pois é impossível que a soma do inverso de três primos seja maior que $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7}$ e menor que 1. Agora testando casos, vemos que o maior de fato é $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{43}$

---

2. Note que

$$abc + abd + acd + bcd + a + b + c + d =$$

$$= (a+1)(b+1)(c+1)(d+1) - (a-1)(b-1)(c-1)(d-1)$$

portanto a condição do enunciado é equivalente a

$$(a+1)(b+1)(c+1)(d+1) = (a-1)(b-1)(c-1)(d-1) \ (*)$$

agora observe que

$$\frac{1}{a-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{a+1}{a-1} - 1\right)$$

e então

$$\frac{2}{a-1} + \frac{2}{b-1} + \frac{2}{c-1} + \frac{2}{d-1} = \frac{a+1}{a-1} + \frac{b+1}{b-1} + \frac{c+1}{c-1} + \frac{d+1}{d-1} - 4$$

e agora acabou por MA-MG, de fato, primeiro note que $\frac{a+1}{a-1} = \frac{a^2-1}{(a-1)^2} > 0$ (pois $|a| > 1$), e logo, se usarmos MA-MG na equação acima o problema acaba por $(*)$.

Simulado OBM 2024 - Ampulheta do Saber
Nível 3 - (Ensino Médio)

Soluções

3. Considere a interpretação natural em que temos um grafo G, inicialmente vazio, em que adicionamos uma aresta de cada vez até formar um n-clique, marcando cada aresta S com o menor número que ainda não apareceu em uma aresta que compartilha um vértice com S. Além disso, diga que duas arestas são vizinhas se compartilham um vértice. Afirmamos que a resposta é $2n-4$ se n é par e $2n-3$ se n é ímpar.

Primeiro mostraremos que

Lema 1: $k \leq 2n-3$ independentemente da paridade de n.
Prova:
Note que toda vez que Victor marca um segmento S, há no máximo $2n-4$ segmentos que compartilham um vértice com S ($n-2$ para cada extremidade de S), portanto, existe algum número menor ou igual a $2n-3$ que ainda não foi associado a nenhum dos vizinhos de S, e logo S será marcado com algum número menor ou igual a $2n-3$ $\square$.

Agora diviremos em casa ímpar e caso par.

Caso 1: Se n é ímpar, então Victor pode atingir $2n-3$. Prova:

Númere os vértices $0, 1, 2, \ldots, n-1$ e considere o $n-1$-ágono formado por $1, 2, \ldots, n-1$. Sem perdo de generalidade, suponha que tal $n-1$-ágono é regular. A idéia é que como $n-1$ é par podemos particionar as arestas formados por $1, 2, \ldots, n-1$ em $\frac{n-1}{2}$ emparelhamentos perfeitos.

De fato, podemos considerar os seguintes embarelhamentos perfeitos. Inicialmente, considere os emparelhamentos e_i, para $i = 1, 2, \ldots, \frac{n-1}{2}$, em que e_i é o emparelhamento que liga i e $i+\frac{n-1}{2}$, e para $j \neq i, i+\frac{n-1}{2}$, liga j com $2i-j$ (onde $2i-j$ é tomado módulo $n-1$). Finalmente, considere os emparelhamentos e'_i para $i = 1, 2, \ldots, \frac{n-1}{2}$, como sendo o emparelhamento que liga cado j com $2i-1-j$. É fácil ver que de fato tais emparelhamentos particionam todas as arestas do $n-1$ clique formado por $1, 2, \ldots, n-1$.

Soluções

Agora, Victor fará o seguinte, inicialmente ele vai desenhar todas as arestas de e_1 uma de cada vez; depois as arestas de e'_1, depois as de e_2, assim sucessivamente até $e'_{\frac{n-1}{2}}$. Note que após todas as essas operações, todas as arestas ambas as com extremidades em $1, 2, \ldots, \frac{n-1}{2}$ forão marcados, e mais do que isso, todos os vértices $1, 2, \ldots, \frac{n-1}{2}$ possuem arestas com os valores $1, 2, \ldots, n-2$. Agora, basta que vitor finalize marcando todas as arestas $(0, 1), (0, 2), \ldots (0, n-1)$ nessa ordem, desse modo, a aresta $(0, n-1)$ terá valor $2n-3$.

Caso 2: Se n é par, então a resposta é $2n-4$

Inicialmente, provemas que $2n-4$ é possível. Númere os vértices $1, 2, \ldots, n-1$, considere os $n-2$ vértices $3, \ldots, n$. Como $n-2$ é par podemos fazer a mesma coisa do caso anterior, de modo que todos os vértices $3, \ldots, n-2$ tenham arestas com valores $1, \ldots, n-3$.

Agora, Victor fará o seguinte, inicialmente, marque as arestas $\{2, 3\}, \{2, 4\}, \ldots \{2, n\}$ nessa ordem, de modo que a aresta $\{2, n\}$ seja marcado com $2n-5$. Agora, marque as arestas $\{1, 4\}, \{1, 5\}, \ldots, \{1, n-1\}$ nessa ordem, e depois marque a aresta $\{1, 3\}$. Desso modo, o vértice 1 tem arestas com os seguintes valores marcados: $n-2, n-1, \ldots, 2n-6$, enquanto o vértice n tem arestas com os valores $1, 2, \ldots, n-3, 2n-5$, logo, se Victor marcar a aresta $\{1, n\}$, marcará o valor $2n-4$.

Agora basta provar que $2n-4$ é o máximo. Para isso, provaremos o seguinte Lemma:

Lema 2: Se n é par, então após Victor marcar todas as arestas, as arestas marcadas com o número 1 formar um emparelhamento perfeito.

Prova:
Por definição, as arestas com valor 1 não tem extremidades em comum. Suponha então que elas não formam um emparelhamento perfeito. Então como n é par, existem pelo menos dois vértices que não tem arestas incidentes com valor 1, mas então, no momento em que Victor marcou a aresta ligando esses dois vértices, ela deveria ter sido marcada com o valor 1, absurdo. Logo de fato, as arestas com o valor 1 devem formar um emparelhamento perfeito.

Agora podemos terminar. Suponha por absurdo que Victor consiga marcar uma aresta com um número maior que $2n-4$. Então suponha sem perda de generalidade, que tal aresta é a última a ser marcada. Sejam i, j as extremidades dessa raresta. Então pelo Lemma 2, existem arestas com valor 1 incidentes a i e j, mas então o conjunto de valores que estão marcados com as arestas incidentes a i ou j tem tamanho no máximo $2n-5$, mas então o valor associado com a aresta $\{i, j\}$ deveria ser no máximo $2n-4$, que absurdo.

Então de fato, o valor máximo para n par é $2n-4$ e o problema acabou.