Simulado OBM 2024 - Ampulheta do Saber
Nível 1 - (6° ou 7° ano)

Soluções

---

1. Note que se um número é OBMeco, chame de x, então $x^2 = s^5$, onde s é a soma dos dígitos, então s é um quadrado perfeito (caso contrário existiria um primo tal que seu expoente é ímpar na fatoração de s e elevado a 5 continuaria ímpar, absurdo pois deve ser par para ser igual a um quadrado perfeito). Logo tirando a raiz quadrada, x deve ser uma potência de 5, e a única potência de 5 com 3 dígitos é o número $3^5 = 243$, que satisfaz o enunciado.

---

2. Note que podemos olhar para uma invariante $\frac{a}{b}$ sendo $a \geq b$ os números na lousa: $\frac{a+x/b}{b+x/a} = \frac{a}{b}$. Logo como $2/1 \neq 3/2$ é impossível.

---

3. Seja K o ponto médio de BS, daí por base média $MN \parallel AB \parallel CD$ e $MN = AB/2 = CH$ logo $NMCH$ é paralelogramo, o que nos dá $\angle NHC = 180 - \angle MCD$, onde $\angle MCD = 90 + 60/2 = 120$. Portanto $\angle NHC = 180 - 120 = 60$.

---

4. Temos que resolver $2^8 + 2^{11} + 2^n = k^2 \Rightarrow 2^8(1+2^3) + 2^n = k^2 \Rightarrow 2^n = k^2 - 48^2 = (k+48)(k-48)$. Portanto: $k + 48 = 2^a$ e $k - 48 = 2^b$ onde $a + b = n$. Subtraindo uma da outra: $96 = 2^a - 2^b \Rightarrow 3 \cdot 2^5 = 2^b(2^{a-b} - 1)$, logo igualando a parte par, $b = 5$ e igualndo a parte ímpar $a = 7$. Temos então $n = 12$ única solução.

---

5. Seja c_k a cor do número k.

Note que todos números serem vermelhos funciona.

Suponha agora algum número azul.

Seja $k = a$ o menor número vermelho.

Caso 1: $a = 2$ Logo c_{1+2} é azul, $c_{2\cdot 3} =$ vermelho, $c_{1+6} =$ azul, $c_{2\cdot 7} =$ vermelho, logo $c_{14+1} =$ azul, contradição.

Caso 2: $a = 3$

$c_{1+3} =$ azul, $c_{2+3} =$ azul, $c_{2\cdot 3} =$ vermelho, $c_{1+6} = c_{3+4}$ =azul,$c_{2+6} = c_{3+5}$ =azul. Se c_9 =azul, temos $c_{15} = c_{6+9} =$ azul contradição. Se $c_9 =$ vermelho pode se checar que teremos o conjunto vermelho $[3, 6, 9, 12, 15]$ irá funcionar.

Caso 3: $a = 5$ $c_{2\cdot 5}$ é vermelho. Logo $c_{5m+1} = c_{5m+2} = c_{5m+3} = c_{5m+4}$ é azul para $m = 0, 1, 2$, logo o conjunto vermelho $[5, 10, 15]$ funciona.

Caso 4: $a \geq 4$ e a não divide 15.

Logo $c_{m\cdot a}$ é vermelho para $m = 0, 1, 2$, portanto se 15 deixa resto r quando dividido por a, $r \leq 4$, então $15 = ma + r$, daí, $c_{ma+r} = c_{15}$ que fica azul contradição.

Portanto, os conjuntos de números que podemos pintar de vermelho são:

$[1, 2, 3, ..., 15]$; $[3, 9, 12, 15]$; $[5, 10, 15]$