Comentário OBF - Fase 3, Nível II

Autores: Arthur Uchoa, Benny, Bernardo, Clara, Felipe Brandão, Gisela Ceresér, João Victor Evers, Lucas Cavalcante, Patrick Silva, Pedro Saldanha e Thiago Falcão

Questão 1. Júlio Verne pode ser considerado o criador do gênero literário de ficção científica. Em 1873, ele publicou o romance de aventura *A Volta ao Mundo em 80 Dias* no qual a rapidez e a integração dos transportes são destaques da trama.

Considerando uma viagem de volta ao mundo que dura exatamente 80 dias, determine a velocidade escalar média (rapidez média) dos viajantes, em km/h, nos casos:

a) A viagem é feita ao longo do equador.

b) A viagem é feita ao longo do paralelo de latitude 30º norte.

Solução - Questão 1

a) A velocidade média é, por definição:

$$v = \frac{d}{t}$$

A distância percorrida no equador corresponde à circunferência da Terra. Utilizando os dados fornecidos na prova ($\pi = 3$ e raio da Terra $R_t = 6400\,\text{km}$), temos:

$$d = 2\pi R_t = 2 \times 3 \times 6400 = 38400\,\text{km}$$

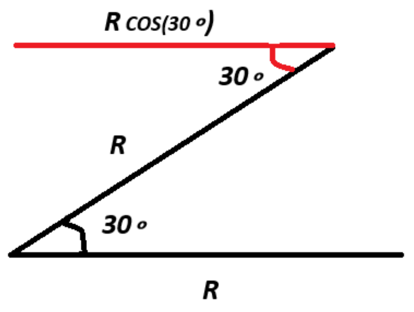
O tempo de viagem é de 80 dias. Convertendo para horas:

$$t = 80 \times 24 = 1920\,\text{h}$$

Assim, a velocidade média em km/h é:

$$v = \frac{38400}{1920}\,\text{km/h} \Rightarrow \boxed{v = 20\,\text{km/h}}$$

b) Neste caso, o raio da circunferência percorrida corresponde ao círculo de latitude 30°. Usando um pouco de geometria, podemos determinar que o raio dessa nova circunferência é $R_t \cos(30°)$.



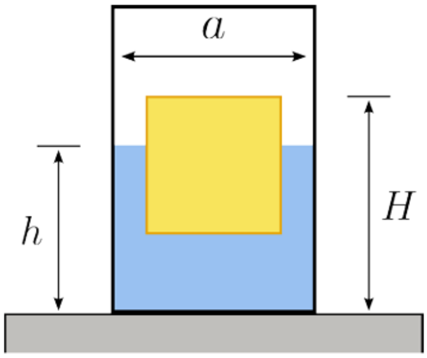
Utilizando os dados fornecidos na prova ($\cos(30°) = 0{,}85$), temos:

$$d = 2\pi R_t \times 0{,}85 = 32640\,\text{km}$$

O tempo permanece o mesmo, portanto, a velocidade média em km/h é:

$$v = \frac{32640}{1920}\,\text{km/h} \Rightarrow \boxed{v = 17\,\text{km/h}}$$

Questão 2. Dentro de uma geladeira de temperatura interna $T_i = 6°C$, há uma cuba de base quadrada com lado a = 10 cm. Dentro da cuba, há 750 g de água e 194,4 g de manteiga na forma de uma barra cúbica. A figura ao lado, fora de escala, mostra a cuba com a água e a manteiga, onde h e H são, respectivamente, as alturas em relação à base da cuba dos níveis mais altos de água e de manteiga. Considere que a manteiga tem temperatura de fusão $T_f = 26°C$ e densidade constante de $0,9$ g/cm^3. Trata-se de um dia quente de verão de temperatura ambiente $T_a = 36°C$. Desconsidere a dilatação da água e do recipiente.



a) Determine os valores de h e H, em cm, com a cuba ainda na geladeira.

b) Determine os valores de h e H, em cm, após a cuba ter sido retirada da geladeira, apoiada em uma mesa horizontal e esperado até que toda a manteiga tenha se derretido.

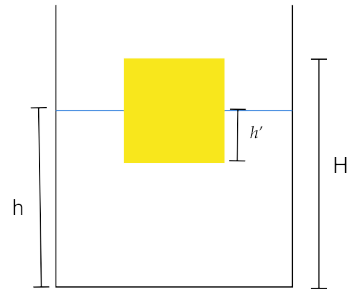
Solução - Questão 2

a) Primeiro, precisamos encontrar o comprimento do lado do cubo de manteiga. Para isso, pode-se analisar a relação entre seu volume e densidade:

$$d_m l^3 = m_m$$
$$l = \sqrt[3]{\frac{m_m}{d_m}} = 6 \text{ cm}$$

Onde l é o lado do cubo, m_m é a massa da manteiga e d_m a densidade da manteiga.

Então, redesenhando a imagem da questão com a marcação da parte do cubo que está imersa na água:



Para encontrar a altura h', é preciso igualar o empuxo com o peso do cubo de manteiga:

$$d_a h' l^2 g = m_m g$$
$$h' = \frac{m_m}{d_a l^2} = 5,4\text{cm}$$

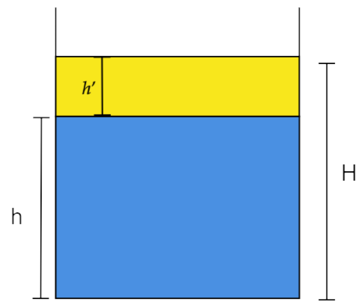
Agora, para encontrar a altura h da água, pode-se encontrar o volume da água considerando um paralelepípedo de altura h e base a^2 menos a parte que é ocupada pela manteiga, $h'l^2$:

$$m_a = d_a(a^2 h - l^2 h')$$
$$\boxed{h = \frac{\frac{m_a}{d_a} + l^2 h'}{a^2} = 9,444\text{cm}}$$

Agora, a altura H será a altura da água mais a parte da manteiga que está fora da água:

$$\boxed{H = h + l - h' = 10,044\text{cm}}$$

b) Quando a manteiga derrete completamente, a situação será uma camada apenas água e em cima apenas manteiga, pois a densidade da manteiga é maior que da água. A situação ficará:



Nesse caso, para encontrar a altura h, é necessário considerar o volume de um paralelepípedo com altura h e base a^2 composto apenas por água:

$$a^2 h d_a = m_a$$

$$\boxed{h = \frac{m_a}{d_a a^2} = 7,5\text{cm}}$$

Agora, para a altura H, primeiro, deve-se descobrir a altura h' da camada de manteiga. Pode-se executar o mesmo procedimento do necessário para a água:

$$h' l^2 d_m = m_m$$
$$h' = \frac{m_m}{d_m a^2} = 2,16\text{cm}$$

Por fim, a altura H será:

$$\boxed{H = h' + h = 9,66\text{cm}}$$

Questão 3. Em laboratório didático, uma estudante de física acrescenta 200 g de água em calorímetro (recipiente de paredes termicamente isolantes) de capacidade calorífica 100 cal/ºC. O calorímetro e a água estão inicialmente na temperatura ambiente de 22 ºC. Depois, retira dois cubos de gelo de 30 g de dentro de um congelador de temperatura interna -18 ºC e os coloca imediatamente no calorímetro, fechando-o em seguida. determine a temperatura de equilíbrio no interior do calorímetro.

Solução - Questão 3.

Suponhamos que ao final de todo o processo o gelo tenha derretido por completo. Com isso teríamos as seguintes equações:

$$Q_1 = C \cdot \Delta\theta \text{ (Calorímetro)}$$

$$Q_2 = m_a \cdot c \cdot \Delta\theta \text{ (Água)}$$

$$Q_3 = m_g \cdot c \cdot \Delta\theta \text{ (Aquecimento do gelo até 0ºC)}$$

$$Q_4 = m_g \cdot L \text{ (Fusão do gelo)}$$

$$Q_5 = m_g \cdot c \cdot \Delta\theta \text{ (Aquecimento da água do gelo)}$$

Como no calorímetro estamos em um sistema fechado, a soma de todos esses calores deve resultar em zero.

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + Q_5 = 0$$

Substituindo os valores:

$$(100 \cdot (\theta - 22)) + (200 \cdot 1 \cdot (\theta - 22)) + ((2 \cdot 30) \cdot \frac{2,1}{4,2} \cdot (0 + 18)) + ((2 \cdot 30) \cdot 80) + ((2 \cdot 30) \cdot 1 \cdot (\theta - 0)) = 0$$

$$360\theta - 1260 = 0$$

$$\boxed{\theta = 3,5^{\circ}\text{C}}$$

Questão 4. Um helicóptero decola no instante $t = 0$ nas proximidades de um aeroporto. A tabela mostra as coordenadas cartesianas do helicóptero em um sistema de referência com origem no radar do aeroporto durante os 25 minutos em que ele voa em sua zona de segurança. Os eixos x e y, são paralelos às direções cardeais, com o eixo y apontando para o norte e o eixo x para o leste. A tabela mostra os instantes nos quais o helicóptero muda de direção de movimento e o instante final no qual o helicóptero deixa de ser monitorado pelo radar.

t (min)	x (km)	y (km)
0,0	0,0	3,0
5,0	-4,0	6,0
13,0	-12,0	0,0
19,0	0,0	-9,0
25,0	16,0	3,0

Durante o intervalo de tempo em que o helicóptero é monitorado pelo radar:

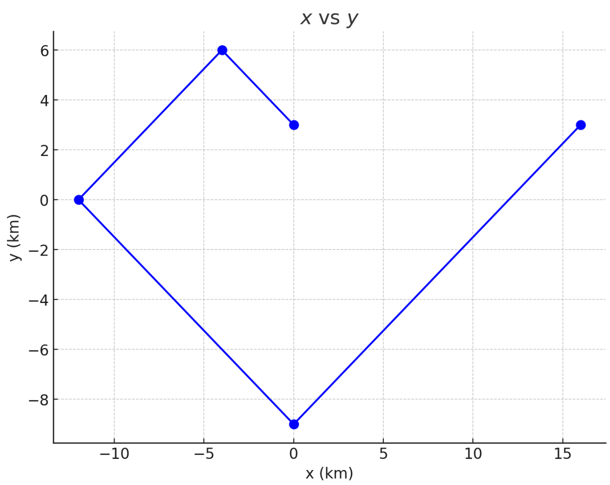
a) Faça um gráfico da trajetória do helicóptero.

b) Determine a distância percorrida e o deslocamento do helicóptero.

c) Determine a velocidade escalar média e a velocidade média do helicóptero.

Solução - Questão 4.

a) O gráfico pedido fica semelhante à:



b) A diferença entre distância percorrida e deslocamento é que o deslocamento só leva em conta os pontos inicial e final, enquanto a distância percorrida leva em conta todo o trajeto. Dessa forma, o deslocamento do helicóptero é a distância entre o ponto $P(0,3)$ inicial e o $Q(16,3)$ final, portanto o deslocamento ΔS é:

$$\boxed{\Delta S = 16 \text{ km}}$$

Para a distância percorrida vamos separar o percurso em 4 etapas retilíneas:

$$d = d_1 + d_2 + d_3 + d_4$$

Que são calculados usando a fórmula para a distância entre dois pontos:

$$d_{12} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$d_1 = \sqrt{(-4-0)^2 + (6-3)^2} = 5$$
$$d_2 = \sqrt{(-12+4)^2 + (6-0)^2} = 6\sqrt{2}$$
$$d_3 = \sqrt{(-12-0)^2 + (0+9)^2} = 15$$
$$d_4 = \sqrt{(16-0)^2 + (3+9)^2} = 20$$

Usando $\sqrt{2} \approx 1,4 \implies 6\sqrt{2} \approx 8,4$, obtemos:

$$d = 5 \text{ km} + 8,4 \text{ km} + 15 \text{ m} + 20 \text{ km}$$

Com isso:

$$\boxed{d = 48,4 \text{ km}}$$

c) A diferença entre velocidade escalar média e velocidade média é que na velocidade escalar devemos fazer $\frac{d}{\Delta t}$, onde d é a distância percorrida, enquanto na velocidade média temos que fazer $\frac{\Delta D}{\Delta t}$, onde ΔS é o deslocamento. Portanto:

$$v_{esc} = \frac{48,4}{25/60} \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$\boxed{v_{esc} \approx 116,16 \frac{\text{km}}{\text{h}}}$$

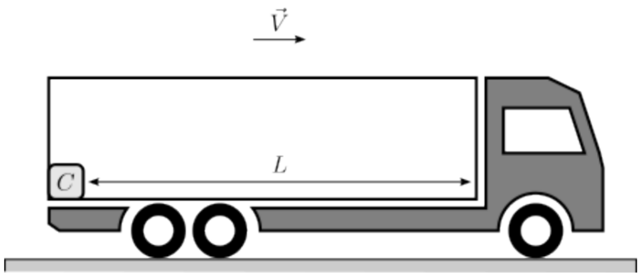
Enquanto que para a velocidade média:

$$v_{med} = \frac{16}{25/60}\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$\boxed{v_{med} \approx 38,4\,\frac{\text{km}}{\text{h}}}$$

Questão 5. Um caminhão, que carrega apenas uma caixa C apoiada na extremidade de trás de seu compartimento de carga, trafega em uma estrada retilínea, veja a figura. De repente, ao ver um obstáculo, seu motorista pisa no freio impondo ao veículo uma desaceleração constante de intensidade $|a|$.

Com caminhão ainda em movimento, a caixa desliza pelo piso e colide na parede frontal do compartimento após $2,00\,\text{s}$ do início da frenagem. O coeficiente de atrito estático entre a caixa e o piso é $\mu_e = 0,40$ e $L = 6{,}00\,\text{m}$. Considere o menor valor de $|a|$ capaz de fazer a caixa deslizar no piso do compartimento.



a) A intensidade da aceleração $|a|$ do caminhão.

b) O coeficiente de atrito cinético entre a caixa e o piso do compartimento de carga.

Solução - Questão 5.

a)(C = caixa, K = caminhão) Referencial da Terra:

O caminhão desacelera e a caixa tende a continuar com v_0 para a direita por inércia. Para evitar o deslizamento, é gerada uma força de atrito para a esquerda afim de diminuir v_0 para a velocidade que o caminhão tiver no momento.

Equações de aceleração relativa:

$$a_{C/K} = a_{C/T} - a_{K/T}$$

onde $a_{C/K}$ é a aceleração da caixa no referencial do caminhão, $a_{C/T}$ é a aceleração da caixa no referencial da Terra e $a_{K/T}$ é a aceleração do caminhão em relação à Terra.

O objeto desliza se $a_{C/K} > 0$. Logo, no caso limite:

$$|a_{C/T}| = |a_{K/T}|$$

Sabemos que a aceleração da caixa em relação à Terra é devido ao atrito. Logo

$$a_{C/T} = \frac{F_{at}}{m} = \mu g$$

Assim, a caixa desliza se $a_{K/T} > \mu g$, para o caso limite:

$$\mu g = a_{K/T}$$

$$\Rightarrow \boxed{a_{K/T} = a = 4\,\mathrm{m/s}^2}$$

b)

Pelas Informações da questão e no referencial do caminhão:

$$L = \frac{a_{C/K} \cdot t^2}{2} \Rightarrow a_{C/K} = \frac{2L}{t^2} = 3\,\mathrm{m/s}^2$$

Agora basta aplicarmos novamente a equação da aceleração relativa:

$$a_{C/T} = a_{C/K} + a_{K/T}$$

$$\Rightarrow a_{C/T} = 3 - 4 = -1$$

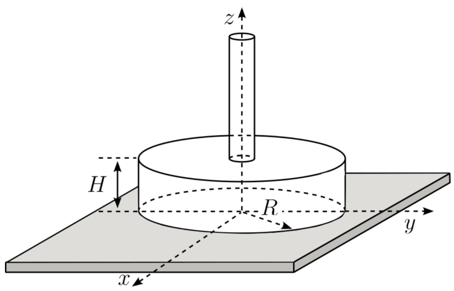
onde o sinal negativo implica numa desaceleração.

Módulo de $a_{C/T} = 1$

Dividindo ambos os lados por g para encontrar o coeficiente de atrito cinético:

$$\boxed{\mu_{\text{cin}} = 0,1}$$

Questão 6. Em um laboratório de física um estudante produz uma peça perfurando a base de um pote cilíndrico de raio R = 4 cm e altura H = 3 cm. Depois cola um tubo longo oco e fino na abertura criada e veda as junções de modo que a peça funcione como um funil. Então completa o arranjo experimental inicial apoiando a peça sobre uma superfície horizontal de borracha. Veja figura ao lado (note que o "funil" está de cabeça para baixo). A peça tem uma massa total de 300 g. Ao derramar água pela abertura superior do tubo fino, o contato da boca do "funil" com a borracha impede que a água vaze. Até que altura z, medida em relação à superfície de borracha, o estudante pode adicionar água sem que a peça levante?



Solução - Questão 6.

Vamos analizar as pressões nos pontos A(dentro do cilindro maior a uma altura H) e

B(dentro do cilindro maior e na altura do chão).

No ponto A:

$$P_A = \rho g z - \rho g H = \rho g(z - H)$$

No ponto B:

$$P_B = \rho g z$$

O empuxo exercido pelo líquido no funil será:

$$E = \Delta P * (\acute{A}rea\ do\ topo\ do\ cil\acute{i}ndro\ maior)$$

$$E = \Delta P * \pi R^2$$

A altura máxima que se pode preencher o tubo com água, sem que a peça levante, é a altura tal que $P = E$, sendo P o peso do tubo. Logo:

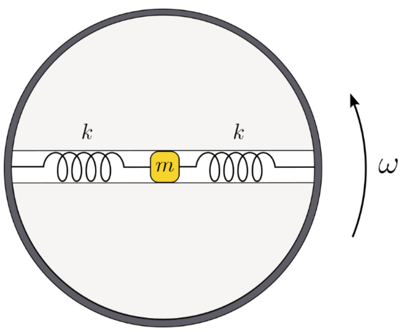
$$mg = \Delta P \pi R^2 \Rightarrow mg = \rho g(z - H)\pi R^2$$

Isolando z:

$$z = \frac{m + \rho H \pi R^2}{\rho \pi R^2} = \frac{m}{\rho \pi R^2} + H = 9,25\ cm$$

$$\boxed{z = 9,25\ cm}$$

Questão 7. Um disco giratório horizontal de raio R possui um sulco retilíneo que passa por seu centro dentro do qual pode deslizar sem atrito um bloco de massa m. Duas molas idênticas de constantes elásticas k e massas desprezíveis são colocadas no sulco com uma das extremidades presa à borda do disco e a outra ao bloco. Veja a figura. Considere que o conjunto é posto a girar com velocidade angular constante ω.



a) Determine o máximo valor da velocidade angular do disco ω_m abaixo do qual o movimento do bloco em relação ao disco pode ser oscilatório.

b) Com $\omega < \omega_m$, qual a frequência de oscilação do movimento do bloco relativo ao disco?

c) Descreva os possíveis movimentos do bloco relativo ao disco quando $\omega > \omega_m$?

Solução - Questão 7

Vamos trabalhar no referencial em rotação do disco. Nesse referencial, geralmente atuam três forças sobre a massa: a força elástica da mola à esquerda ($F_{ela,e}$), da mola à direita ($F_{ela,d}$), e a pseudo-força centrífuga (F_{cen}).

Essa última aparece por conta da força centrípeta, que, no referencial do laboratório, deve atuar em todos os corpos girando com o disco. Já que essa força centrípeta é "removida" quando adotamos o referencial em rotação, pois não há nada girando nele, experimenta-se a pseudo-força, de mesma magnitude mas sentido contrário, no caso, para fora.

Arbitre um eixo ordenado que passa no meio do sulco e é paralelo a ele. Seja x o deslocamento da massa de seu ponto de equilíbrio no centro do disco. Como todas as forças atuam nesse eixo, suprimirei notação vetorial: valores positivos são para a direita, e valores negativos, para a esquerda. A força resultante atuando sobre a massa será:

$$F_r = F_{cen} + F_{ela,d} + F_{ela,e}$$
$$F_r = m\omega^2 x - kx - kx$$
$$F_r = -(2k - m\omega^2)x$$

Note que a expressão final que obtemos é similar a de uma sistema massa-mola simples, com constante de mola efetivo $k_{ef} = 2k - m\omega^2$. Isso ocorre porque todas as forças atuando sobre a massa são diretamente proporcionais ao deslocamento, e obtemos um efeito análogo a uma associação de molas. Porém, note que, ao contrário de uma associação de molas normal, para certos valores de ω, $k_{ef} < 0$, indicando que a força resultante pode não ser restauradora. Isso ocorre precisamente quando a força centrífuga supera as forças elásticas.

a) Note que, para que o movimento ser oscilatório, a força resultante deve ser restauradora. Pelas considerações feitas anteriormente, isso equivale a $k_{ef} > 0$. Desenvolvendo,

$$k_{ef} > 0$$
$$2k - m\omega^2 > 0$$
$$\boxed{\omega < \sqrt{\frac{2k}{m}}}$$

Identificamos então que $\omega_m = \sqrt{\frac{2k}{m}}$.

b) Continuando a analogia com um sistema massa-mola simples, obtemos a frequência de oscilação f:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_{ef}}{m}}$$

$$\boxed{f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2k}{m} - \omega^2}}$$

Note que essa expressão só faz sentido para $\omega < \omega_m$, como deveria ser.

c) Note que $\omega > \omega_m$ implica $k_{ef} < 0$. Pelas considerações feitas anteriormente, a força centrífuga supera as forças elásticas, e a força resultante não é restauradora, promovendo o deslocamento.

Em outras palavras, há um equilíbrio instável da massa em $x = 0$. Portanto, com qualquer perturbação, a massa tende a se desviar mais e mais do centro, no sentido da perturbação, até atingir as paredes do disco, onde é finalmente impedida por forças normais, ficando colada em uma das extremidades para todo o sempre.

Questão 8. Sondas espaciais movidas a velas solares utilizam a pressão (força por unidade de área) da luz solar para propulsão. Quando um fóton (partícula de luz) colide com um objeto ele exerce uma pequena força sobre ele. Em uma vela solar, os milhares de bilhões de fótons que formam o feixe de luz colidem com a superfície refletora da vela, empurrando-a.

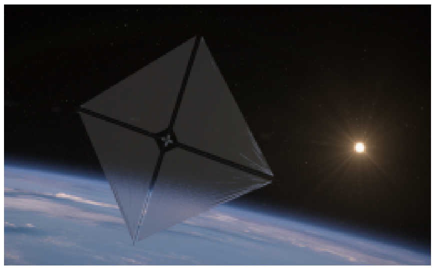


Figura: www.nasa.gov/general/nasa-next-generation-solar-sail-boom-technology-ready-for-launch.

Quando um feixe de intensidade de I (energia por unidade de tempo por unidade de área) incide perpendicularmente em uma vela perfeitamente refletora de área A a força de radiação F_r é dada por

$$F_r = \frac{2IA}{c}$$

onde c é a velocidade da luz no vácuo.

Considere uma sonda impulsionada por uma vela solar de área $A = 80\,\mathrm{m}^2$, de superfície perfeitamente refletora, orientada perpendicularmente aos raios solares em uma região do espaço na qual a intensidade deles é $I = 1400\,\mathrm{J/(s \cdot m^2)}$. Determine:

a) A taxa de variação da energia cinética da sonda quando sua velocidade é $v = 1000\,\mathrm{km/h}$.

b) Considerando que a propulsão a vela solar é análoga à propulsão a vela de um barco, quais são os análogos na propulsão do barco a vela ao (i) feixe de luz e (ii) aos fótons?

c) Como a orientação da vela influencia sobre a força de radiação exercida sobre ela. Em qual orientação a força é máxima? Em qual é mínima? Faça diagramas.

Solução - Q8 - N2 Maui

a) A potência P é a taxa de variação da energia:

$$P = F_r \cdot v,$$

onde F_r pode ser substituido pela expressão dada no enunciado e $v = 1000\,\text{km/h} = 278\,\text{m/s}$. Logo:

$$P = \frac{2IA}{c} \cdot v = \frac{2 \cdot 1400 \cdot 80}{3 \times 10^8} \cdot 278$$

$$\boxed{P \approx 207,5\,\text{W}}$$

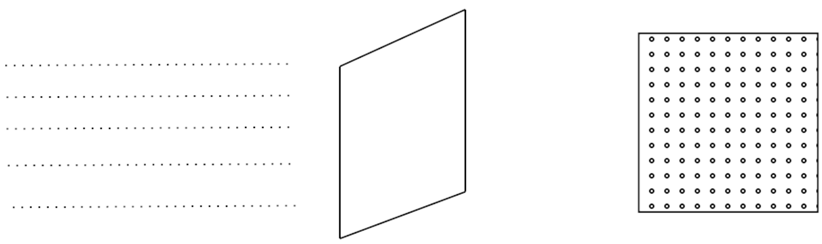
b) No caso de um barco a vela, os análogos são:

Feixe de luz: vento (fluxo de ar)

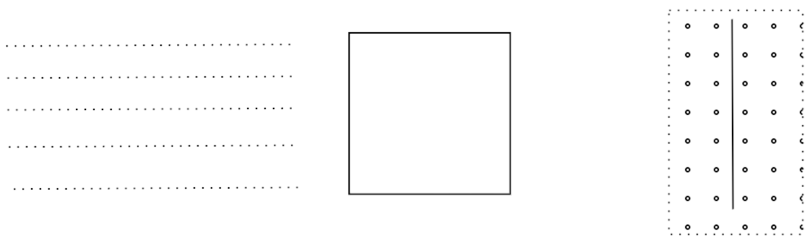
Fótons: moléculas de ar que colidem com a vela

c) A força de radiação é máxima quando a vela está orientada perpendicularmente ao feixe de luz, pois a componente do momento transferido é maior. Ela é mínima (ou zero) quando a vela está paralela ao feixe de luz, pois, nesse caso, não há transferência efetiva de momento na direção desejada. Essas situações estão representadas a seguir, o diagrama da esquerda é a vista lateral, enquanto a direita a vista frontal de cada situação.

Caso de máximo:

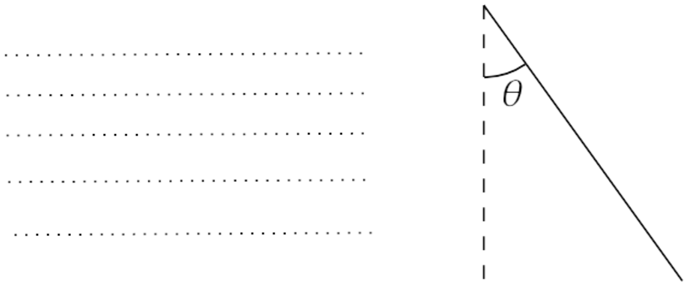


Caso de mínimo:



Explicação Detalhada sobre a Influência do Ângulo entre o Feixe e a Vela na Força

A força de radiação exercida sobre a vela solar depende diretamente da área efetiva que é atingida pelo feixe de luz. Esta área efetiva é a componente da área total da vela que está orientada perpendicularmente ao feixe de fótons. Na imagem abaixo, a área efetiva está representada como a região tracejada:



Como ilustrado na imagem, podemos concluir que a área efetiva A_{ef} é dada por:

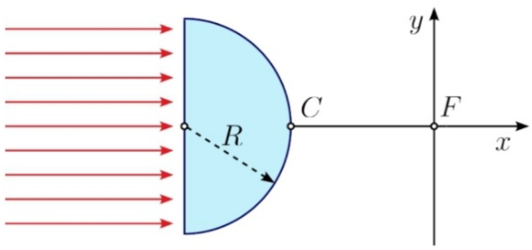
$$A_{\text{ef}} = A\cos\theta,$$

onde A é a área total da vela e θ é o ângulo entre a normal à superfície da vela e a direção do feixe de luz.

A expressão mostra que a força de radiação depende de quanto da área total da vela está efetivamente interceptando o feixe de fótons. Isso significa que a força é maximizada quando $\cos\theta = 1$, ou seja, quando $\theta = 0°$ (feixe perpendicular à vela). Nesse caso, toda a área da vela é atingida diretamente pelo feixe, resultando na máxima força de radiação possível.

Por outro lado, a força é minimizada quando $\cos\theta = 0$, o que ocorre para $\theta = 90°$. Nessa situação, o feixe de luz incide paralelamente à superfície da vela e não exerce nenhuma pressão efetiva sobre ela. Essa variação angular é fundamental para entender como a orientação da vela influencia sua propulsão, conforme destacado na solução da questão.

Questão 9. Um feixe de luz monocromática incide perpendicularmente na superfície de um prisma semicilíndrico de raio $R = 4,00$ cm conforme a figura. O prisma está imerso no ar e é feito de um material de índice de refração $n = 1,40$. No ponto F em frente ao prisma, que é o ponto focal do feixe de luz, é colocado um anteparo opaco. Desprezando as reflexões internas no prisma a partir da $2^{\underline{a}}$ ordem, determine:



a) A distância entre os pontos F e C.

b) O maior valor da coordenada y no anteparo que é iluminada pelo feixe.

Dentre todas as questões da prova, essa é a mais polêmica. É necessário fazer diversas ressalvas antes de mostrarmos a solução proposta pelo nosso time.

O principal problema aqui é conceitual. O enunciado cita o ponto focal desse prisma e, para que os raios sejam focalizados em um só ponto, a aproximação paraxial, relativa à pequenos ângulos de incidência no dipotro esférico deveria funcionar. A figura, no entanto, mostra toda a seção do prisma sendo iluminada pelo feixe, o que não concorda com essa aproximação, fazendo com que essa abordagem não funcione e os raios não sejam focalizados todos em um só ponto.

O que acontece aqui é um caso real de aberração óptica, quando lidamos com elementos ópticos não gaussianos, um assunto que requer artifícios físicos e matemáticos muito além do escopo da OBF.

Dito isso, iremos apresentar algumas abordagens possíveis, deixando claro, no entanto, que todas elas possuem problemas conceituais. a) A solução proposta pelo time do AMPS+OB irá ignorar a figura e considerar que a aproximação paraxial funciona.

Aqui teremos o foco de um dioptro esférico, que segue a ssguinte equação:

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_1 - n_2}{R}$$

Onde $n_1 = 1,4$ e $n_2 = 1$. O ponto focal desse sistema corresponde ao local em que os raios provenientes do infinito ($p \to \infty$) convergem.

A solução proposta pelo time do AMPS+OB irá ignorar a figura e considerar que a aproximação paraxial funciona.

Usando esse limite e fazendo $q = f$ encontramos:

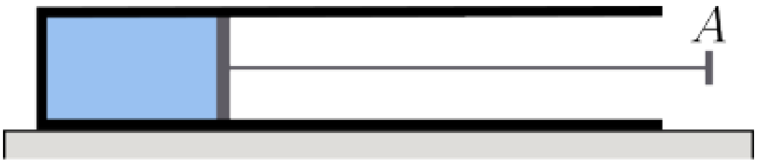
$$f = \frac{R}{1,4 - 1} \implies \boxed{f = 10 \text{ cm}}$$

b) Esse item é mais controverso do que o anterior, uma vez que a abordagem considerando a aproximação paraxial chegaria ao fato que o y em questão é zero.

O que, na realidade, não faz sentido. Outra abordagem seria considerar o raio que incide na superfície do prisma pelo ângulo limite, saindo tangente pelo cilindro. O ângulo do arco em que esse raio incide seria 45° que não concorda com a aproximação paraxial.

Então, esse item será deixado em branco nesse gabarito, uma vez que entendemos que não foram fornecidas as condições físicas ou definições suficientes para a resolução do problema.

Questão 10. Uma porção de volume V_0 de gás monoatômico ideal está confinada em uma câmara de um cilindro ao qual está acoplado a um pistão móvel, conforme a figura. As paredes do cilindro são condutoras de calor e a superfície externa do êmbolo do pistão está em contato com a atmosfera. O sistema está apoiado em uma mesa horizontal e está em equilíbrio termodinâmico com a atmosfera de pressão p_0. Em determinado momento, uma força externa $\vec{F}$ é aplicada no ponto A do pistão e faz com que o gás se expanda muito lentamente até atingir o triplo do volume inicial. Determine o trabalho realizado por $\vec{F}$.



Solução - Questão 10.

Processos quasi-estáticos são caracterizados pelo equilíbrio dinâmico dos componentes do sistema, o pistão não acelera, a força resultante sobre ele é nula. Além disso, o problema nos diz que as paredes do cilindro que contém o gás podem trocar calor com o exterior, mantendo assim, também o equilíbrio térmico. Logo, a respeito do processo, pode-se afirmar duas condições:

- O processo é isotérmico, a temperatura é constante, e por consequência a energia interna também o é.
- A força resultante no pistão é nula.

Da primeira condição, podemos escrever a pressão p em função do volume ocupado V, sendo n o número de mols, que também é constante:

$$pV = nRT = p_0V_0$$

$$\boxed{p = \frac{p_0V_0}{V}}$$

Da segunda condição, podemos escrever:

$$|\vec{F}| - p_0A + pA = 0$$

Logo,

$$\boxed{|\vec{F}| = p_0A\left(1 - \frac{V_0}{V}\right)}$$

Daí podemos escrever o trabalho da força $\vec{F}$. Lembrando que estamos calculando apenas o seu módulo, podemos perceber que ela deve ser contrária à força de pressão atmosférica, que é em todos os momentos maior que a força exercida pelo gás nas paredes do pistão. Logo, é na mesma direção do aumento de volume.

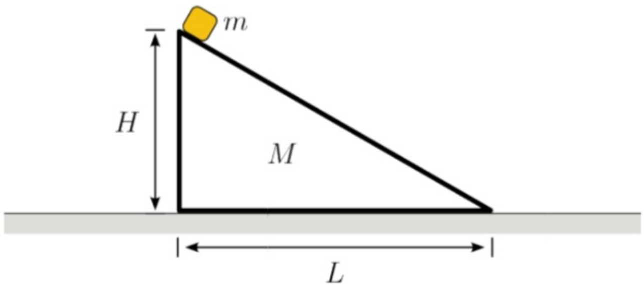
Para calcular o trabalho, devemos invocar resultados advindos do cálculo integral, que é o trabalho da isoterma, que tem a forma $\int \frac{dV}{V}$, que vale $\ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$. Assim, o trabalho total é o de uma isobárica "expandindo" e o de uma isotérmica "sofrendo compressão":

$$W = p_0 \Delta V - p_0 V_0 \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$$

$$W = 2p_0 V_0 - p_0 V_0 \ln\left(\frac{3V_0}{V_0}\right)$$

$$\boxed{W = 2p_0 V_0 - p_0 V_0 \ln(3)}$$

Questão 11. Uma cunha de massa $M = 300g$, $H = 30$ cm e $L = 40$ cm está em repouso apoiada em uma superfície horizontal fixa. Em determinado instante, um pequeno bloco de massa m = 100 g é apoiado e abandonado com velocidade nula no ponto mais alto da cunha, veja a figura. Considere que todas as superfícies em contato são perfeitamente lisas, ou seja, tanto o bloco sobre a cunha quanto a cunha sobre a superfície horizontal deslizam sem a ação de forças de atrito. No instante imediatamente anterior ao bloco atingir a superfície horizontal, determine (em relação ao referencial fixo):



a) O deslocamento da cunha.

b) A intensidade da velocidade do bloco

Solução - Questão 7.

a) Percebe-se que o sistema se trata de um sistema isolado de forças externas na horizontal. De modo que o centro de massa não se desloca na horizontal. Por isso, podemos escrever:

$$MD_x = md_x$$

Além disso, podemos analisar o movimento no referencial da cunha. Nesse referencial, o movimento da caixa é paralelo ao plano. Assim, podemos escrever:

$$\tan(\theta) = \frac{D_y}{d_x + D_x}$$

Substituindo:

$$\tan(\theta) = \frac{D_y}{\frac{D_x \cdot M}{m} + D_x}$$

Como d_y é simplesmente a altura H, substituindo os valores conhecidos:

$$\tan(\theta) = \frac{30}{40} = \frac{3}{4} \implies \frac{3}{4} = \frac{D_y}{\frac{D_x \cdot 300}{100} + D + x} \implies \frac{3}{4} = \frac{D_y}{4\,D_x} \implies 3\,D_x = D_y = H$$

Como $H = 30cm$

$$\boxed{3D_x = 30 \implies D_x = 10cm}$$

b) Percebe-se que o sistema se trata de um sistema isolado de forças externas na horizontal. De modo que o centro de massa não se desloca. Pela mesma explicação, o momento se conserva na horiznotal, de expressão também vale para a velocidade, de modo que . Semelhantemente, também vale para as velocidades:

$$MV_x = mv_x$$

Podemos recorrer novamente à análise do referencial da cunha. Como o movimentos se dá paralelo ao plano, temos que:

$$\tan(\theta) = \frac{3}{4} = \frac{v_{yrel}}{v_{xrel}} = \frac{v_y}{V_x + v_x}$$

Usando a equação da conservação do momento com essa e fazendo as contas, chegamos na conclusão que $v_x = v_y = 3V_x$ Por fim, podemos conservar a energia total do sistema e, assim achar a velocidade.

$$\frac{mv_y^2}{2} + \frac{mv_x^2}{2} + \frac{MV_x^2}{2} = mgH$$

Substituindo os valores e fazendo as contas, chegamos que $v_x = v_y = 1,12$ m/s. Logo:

$$\boxed{v_{tot} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{2}v_x = 1,6}$$

Questão 12. Uma estação de rádio que opera na frequência de 75 MHz está localizada no limite da região urbana de uma cidade. A estação possui uma antena de potência P_0 que envia o sinal isotropicamente. Com o objetivo de evitar o desperdício de energia enviando o sinal para a zona rural a oeste, os proprietários da estação de rádio decidem direcionar o sinal para leste onde reside seu público. Sabendo que este efeito pode ser obtido por interferência entre sinais, eles decidem instalar uma segunda antena a uma distância $d \geq 10$ m a oeste da primeira (a distância mínima é uma exigência técnica de instalação). Após instaladas, cada antena opera com potência P e o sinal da segunda antena em relação à primeira é emitido com uma diferença de fase ϕ. Suponha uma região perfeitamente plana. Determine:

a) A razão de P/P_0 para que o sinal na nova configuração chegue na região urbana com a mesma intensidade de antes.

b) A menor distância de instalação d entre as antenas.

c) O menor valor de $|\phi|$ em graus. O sinal da segunda antena deve estar atrasado, em fase ou adiantado em relação à primeira?

Solução - Questão 12

a) Na região urbana irá ocorrer uma interferência construtiva entre as ondas vindas de cada uma das antenas. Nesse tipo de interferência, as amplitudes A individuais de cada uma das ondas se somam, originando uma onda de amplitude $2A$.

É importante pensar nisso, já que a potência P depende da amplitude da seguinte forma:

$$P \propto A^2 \implies P = cA^2$$

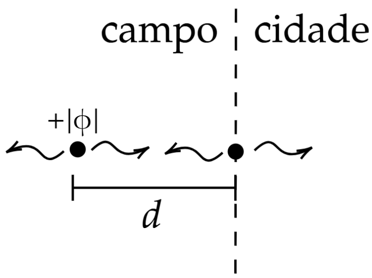
Sendo c uma constante. Portanto, a potência resultante da soma das duas ondas é:

$$P_{res} = 4cA^2 \implies P_0 = 4P$$

Uma vez que queremos $P_{res} = P_0$. O que leva à:

$$\boxed{\frac{P}{P_0} = \frac{1}{4}}$$

b)/c) Vamos resolver esses dois itens juntos, pois eles se relacionam. Veja o esquema abaixo:



Antes de tudo, você deve entender que a fase ϕ é positiva, uma vez que o sinal de rádio deve chegar sincronizado na cidade, e a antena que sai do campo demora mais tempo para chegar. Isso já responde a um questionamento feito no final. Com isso, vamos equacionar as diferenças de fase para que haja interferência construtiva na cidade e destrutiva no campo ($k = \frac{2\pi}{\lambda}$):

$$|\phi| + kd = m_1 2\pi$$
$$|\phi| - kd = \left(m_2 + \frac{1}{2}\right) 2\pi$$

Onde a primeira equação representa a interferência construtiva na cidade e a segunda a destrutiva no campo. A partir disso, obtemos:

$$|\phi| = \frac{\pi}{2} + \pi(m_1 + m_2)$$

$$d = \frac{\lambda}{2}\left(m_1 - m_2 - \frac{1}{2}\right)$$

O comprimento de onda λ pode ser calculado a partir de $\lambda f = 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$, que resulta em $\lambda = 4\,\mathrm{m}$. Portanto:

$$d = (2(m_1 - m_2) - 1)\,\mathrm{m}$$

Uma vez que $m_1 - m_2$ é inteiro, o menor d maior ou igual a 10 que podemos encontrar é $d = 11\,\mathrm{m}$, quando $m_1 - m_2 = 6$. Note que não é possível conseguirmos o próprio 10, uma vez que $2(m_1 - m_2) - 1$ sempre será ímpar, já que é um número par menos 1. Com isso:

$$\boxed{d = 11\,\mathrm{m}}$$

Já para $|\phi|$, devemos analisar $m_1 + m_2$ para $m_1 - m_2 = 6$. Note que $m_1 + m_2$ é um número inteiro e par, uma vez que $m_1 - m_2$ é par. Com isso, ele assume valores $\{\dots, -2, 0, 2, \dots\}$, sendo que um teste rápido desses valores nos mostra que, se ele for menor que zero, então $|\phi| < 0$, o que é um absurdo, levando ao menor valor possível para $|\phi|$ quando $m_1 = -m_2 = 3$ e então:

$$\boxed{|\phi| = \frac{\pi}{2} = 90^\circ}$$