1.

a) Como o lado do quadrado é igual ao lado de cada triângulo equilátero, temos que o perímetro da figura será: $8 \cdot 1 = 8\ cm$.

....

b) Subtraindo o perímetro de $ADOMB$ pelo o de NMB chegamos que $26 - 12 = DA + AB \implies DA + AB = 14$, logo o perímetro será: $2(DA + AB) = 2 \cdot 14 = 18\ cm$.

....

c) Somando o perímetro de todos os triângulos os quais os lados estão contidos em $ABCDE$ termos o perímetro de $ABCDE$ adicionado do perímetro do pentágono de perímetro 25. Logo o perímetro de $ABCDE$ será $11 + 11 + 14 + 15 + 12 - 25 = 38\ cm$

2.

a) Note que se A tivesse ganhado todas, ele ficaria com 12, e se tivesse perdido alguma, a sua nota máximo seria $3 + 3 + 3 + 1 = 10$, logo ele empatou alguma e para ganhar 9 pontos, ele ganhou todo o resto. Assim A ganhou 3, empatou uma e não perdeu nenhuma.

....

b) Não é possível, pois como A não perdeu nenhuma e não ganhou todas, então ele não pode ser o time que ganhou todas e esse time deveria ter ganhado de A.

....

c) Vimos que A empatou apenas com um, que deve ser o D, logo A ganhou de B, C e E. Como C ganhou de B e B não empatou com E, se B tivesse perdido de E, então sua pontuação seria no máximo $1 + 1 + 1 + 3 = 6$ e o mínimo de C seria $1 + 3 + 2 + 1 = 7$, absurdo! Logo B ganhou de E.

....

d) Vimos que A empatou apenas com um, que deve ser o D, logo A ganhou de B, C e E. Como C ganhou de B e B não empatou com E, se B tivesse perdido de E, então sua pontuação seria no máximo $1 + 1 + 1 + 3 = 6$ e o mínimo de C seria $1 + 3 + 2 + 1 = 7$, absurdo! Logo B ganhou de E.

3.

a) São eles: 23567, 23568, 23569, 23578, 23579, 23589.

....

b) Escreva os algarismos de 1 a 9 em ordem crescente: $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$ e escolha 4 números para serem deletados. Note que teremos uma sequência válida com 5 algarismos. Portanto teremos $\frac{9!}{4!5!} = 126$ senhas.

....

c) Vamos primeiro analisar quantas senhas começam com o número um. Para isso mantenha fixo o 1 e elimine 3 algarismos da lista $(2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$. Teremos $\frac{8!}{5! \cdot 3!} = 56$. Número de senhas que começam com 2: elimine 3 números da lista $(3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$ o que nos resta com $\frac{7!}{3! \cdot 4!} = 35$. Portanto o número 34567 estará na posição 92, com isso 34568 estará em 93 e o número procurado que estará na posição 94 será o 34569.

4.

a) Se o número anterior for par, então $\dfrac{x^2}{4} = 7 \implies x^2 = 4 \cdot 7 = 28$, o que não pode acontecer pois 28 não é quadrado. Se o número anterior for impar, então $\dfrac{x^2-1}{4} = 7 \implies x^2 - 1 = 28 \implies x^2 = 29$, o que não pode acontecer pois 29 não é quadrado. Logo nunca pode aparecer o 7.

. . . .

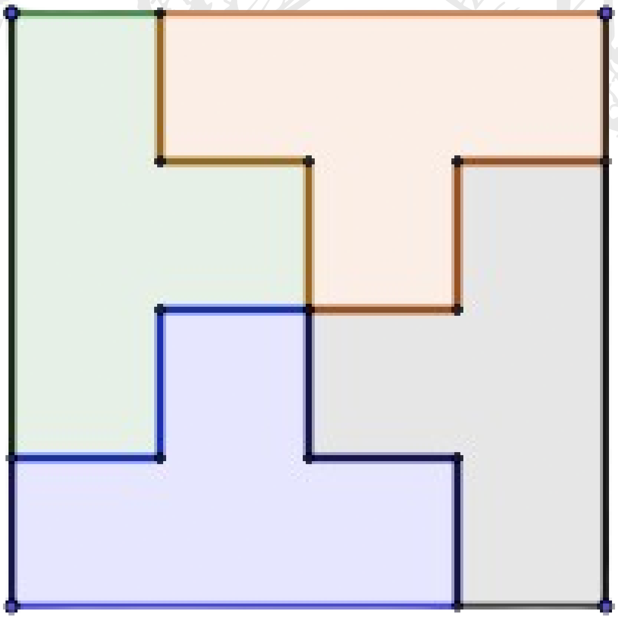
b) Temos que $\dfrac{x^2-1}{4}$ ou $\dfrac{x^2}{4}$ é 20, logo $x^2 - 1$ ou x^2 é 80, como 80 não é quadrado, mas 81 é, então $x^2 - 1 = 80 \implies x = 9$. Então Maurício clicou duas vezes e apareceu 9, assim existiu y tal que $\dfrac{y^2-1}{4}$ ou $\dfrac{y^2}{4}$ é 9, logo $y^2 - 1$ ou y^2 é 36, como 36 é quadrado e 37 não é, então $y^2 = 36 \implies y = 6$. Assim Maurício clicou a tecla e apareceu 6, então $\dfrac{z^2-1}{4}$ ou $\dfrac{z^2}{4}$ é 6, assim $z^2 - 1$ ou z^2 é 24, como 24 não é quadrado mas 25 é, então $z^2 - 1 = 24 \implies z = 5$. Logo 5 foi o número digitado, ele clicou (★) e apareceu 6, depois 9 e por último, 20.

. . . .

c) Note que basta que 4 divida x^2 quando x é par e $x^2 - 1$ quando x é impar. Se x é par, então $x = 2n$, com n sendo natural, logo $x^2 = 4n^2$, assim $\dfrac{x^2}{4} = \dfrac{4n^2}{4} = n^2$, que é um número natural. Se x é impar, então $x = 2n+1$, com n um número natural, logo $\dfrac{x^2-1}{4} = \dfrac{4n^2+4n+1-1}{4} = n^2 + n$, que é natural. Então o resultado é sempre natural.

5.

a) Segue um exemplo:



. . . .

b) Sim, é possível. basta dividir o tabuleiro em $\dfrac{2024^2}{16}$ tabuleiros 4×4, visto que cada lado é múltiplo de quatro, e então preenchê-los conforme o item a).

. . . .

c) Não, é impossível. Note que o tabuleiro possui $2022 \cdot 2023$ casas e cada tetraminó possui quatro. Como 4 não divide $2022 \cdot 2023$, é impossível preencher.

6.

a) Não existe, pois ao somar 3 ou subtrair 3, o resto do digito na divisão por 3 continua o mesmo, então apenas os digitos 1, 4 e 7 podem estar em um mesmo número que o 1.

....

b) Não existe, pois pelo critério de divisibilidade de 3, basta a soma dos 2024 digitos ser múltiplo de 3, e como todos os digitos deixam resto 1, basta $1 + 1 + \cdots + 1 = 2024$ ser múltiplo de 3, o que é falso, pois $2 + 0 + 2 + 4 = 8$ não é múltiplo de 3.

....

c) Se os números forem da forma $\overline{(X+3)X}$ e $\overline{(Y-3)Y}$, então $X + Y \geq 10$, caso contrário $\overline{(X+3)X} + \overline{(Y-3)Y}$ ia ser $\overline{(X+Y)(X+Y)}$, que não é tridiferente.

Então o número ficaria $\overline{1(X+Y-10+1)(X+Y-10)}$, mas $(X + Y - 9) - (X + Y - 10) = 1$ e não 3, então tem que ser $\overline{(X+3)X}$ e $\overline{(Y+3)Y}$ ou $\overline{(X-3)X}$ e $\overline{(Y-3)Y}$.

....

d) Pelo item anterior, ambos são crescentes ou decrescentes.

Se for o primeiro caso, temos $X, Y \leq 6$, se $4 \leq X + Y \leq 9 \Rightarrow \underbrace{(X+Y)}_{\text{unidade}} - \underbrace{(X+Y+6-10)}_{\text{dezena}} = 4$, absurdo e se $12 \geq X + Y \geq 10 \Rightarrow \underbrace{(X+Y+6-10+1)}_{\text{dezena}} - \underbrace{(X+Y-10)}_{\text{unidade}} = 7$, absurdo! Já no segundo caso, temos $X + Y \geq 15$ para que o maior valor da dezena $X + Y - 6 + 1$ seja pelo menos 10. Logo temos $\underbrace{(X+Y-10)}_{\text{unidade}} - \underbrace{(X+Y-6-10+1)}_{\text{dezena}} = 5$, absurdo!