

Simulado OBMEP 2024

Ampulheta do Saber

INSTRUÇÕES

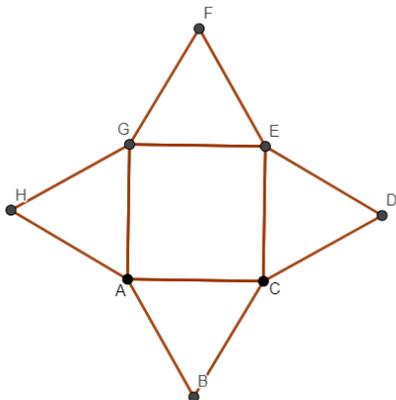
1. A prova pode ser feita a lápis ou à caneta.
2. A duração da prova é de 3 horas.
3. A solução de cada questão deve ser escrita na página reservada para ela, de maneira organizada e legível. Evite escrever as soluções na folha de rascunho.
4. Na correção serão considerados todos os raciocínios que você apresentar. Tente resolver o maior número possível de itens de todas as questões, principalmente o item (a) de cada questão.
5. Respostas sem justificativa não serão consideradas na correção.
6. Não é permitido:
 - a) usar instrumentos de desenho, calculadoras ou qualquer fonte de consulta;
 - b) comunicar-se com outras pessoas, além do aplicador de provas;
 - c) usar quaisquer aparelhos eletrônicos (celulares, tablets, relógios com calculadora, etc.);

O não cumprimento dessas regras resultará em sua desclassificação.

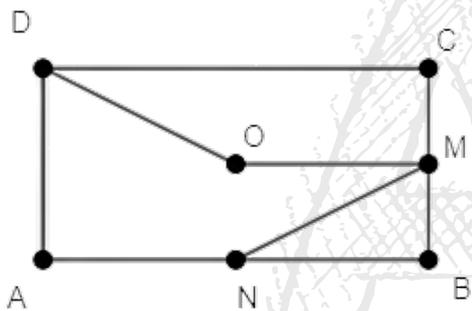
Boa prova!

1. João gosta de construir figuras geométricas exóticas para calcular perímetros.

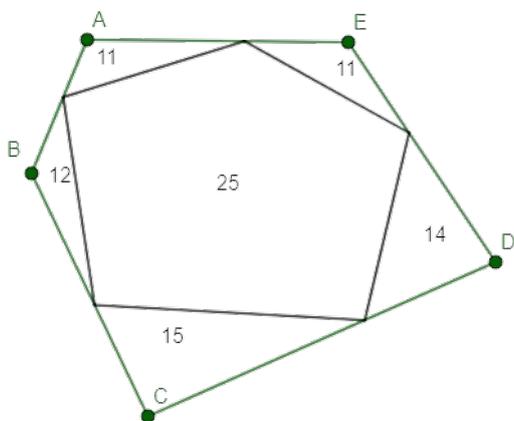
a) Calcule o perímetro da figura abaixo $ABCDEFGH$ a seguir sabendo que $AGEC$ é um quadrado de lado 1 cm e os triângulos ABC , CDE , EFG , GHA são equiláteros.



b) Calcule o perímetro do retângulo abaixo $ABCD$, sabendo que se O é o seu centro, M ponto médio de BC , N o ponto médio de AB , e que o perímetro de NMB é 12 cm e o de $ADOMB$ é 26 cm .



c) Ache o perímetro de $ABCDE$ abaixo, sabendo que o perímetro (em cm) de cada parte está indicado na figura.



2. Em um campeonato existia 5 times: time A , time B , time C , time D e time E . Todo mundo jogou com cada um exatamente uma vez, quem ganhava levava mais 3 pontos e quem perdia ganhava apenas um, em caso de empate, cada time levava 2 pontos. Se sabe que o time A saiu com 11 pontos.

a) Quantas partidas A ganhou, perdeu ou empatou?

b) É possível um time ter ganhado todas as partidas?

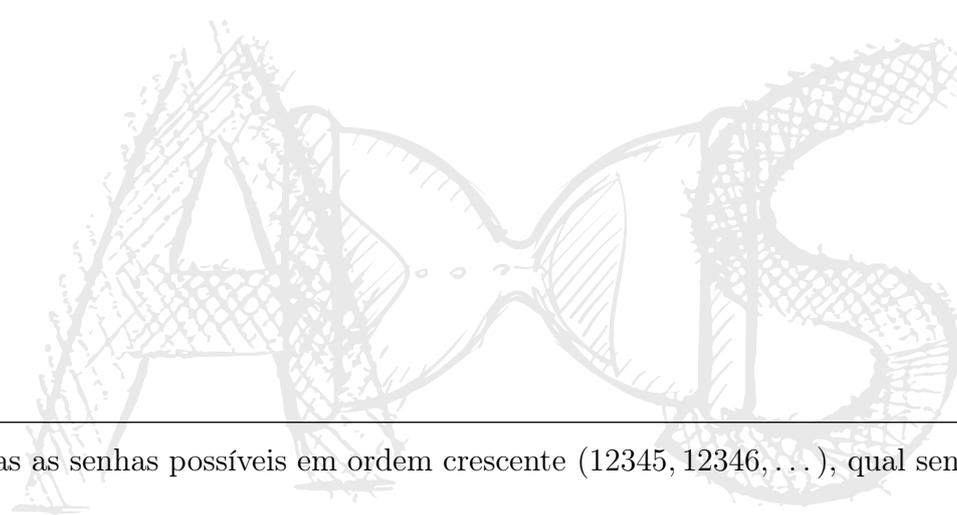
c) No final do campeonato, A teve a maior nota, seguido de B e C com notas finais iguais e depois D e por fim E . Sabendo que D empatou com A , C ganhou de B e E empatou apenas com C e D , qual foi o resultado da partida entre B e E ?

d) Qual foi o resultado das partidas de D com B e C ?

3. Banano quer criar uma senha para seu celular. Para isso, ele decide seguir o seguinte padrão: a senha deve conter 5 algarismos diferentes de zero, e os algarismos devem estar em ordem estritamente crescente da esquerda pra direita.

a) Escreva todas as senhas que começam com 235__.

b) Quantas senhas Banano pode criar seguindo a regra?



c) Colocando todas as senhas possíveis em ordem crescente (12345, 12346, ...), qual senha ocuparia a 94ª posição da lista?

4. Na calculadora de Maurício, existe uma tecla chamada “estrela”, cujo o símbolo é (★). Ao clicar na tecla, ela faz a seguinte operação: dado um número natural x na tela, ela muda o número na tela para

- $\frac{x^2}{4}$ se x for par;
- $\frac{x^2 - 1}{4}$ se x for ímpar.

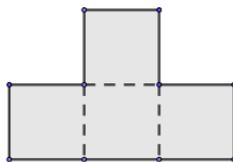
Por exemplo, se Maurício digitar o número 11 na calculadora, ao clicar a tecla (★), o número que vai aparecer é 30, pois $\frac{11^2 - 1}{4} = 120 \div 4 = 30$, e se ele clicar novamente, o número que vai aparecer é 225, uma vez que $\frac{30^2}{4} = 900 \div 4 = 225$.

a) Mostre que é impossível clicar na tecla (★) e aparecer o 7.

b) Maurício digitou um número, clicou na tecla (★) três vezes e apareceu o número 20. Qual foi o número digitado por Maurício?

c) Explique porque se x é um número natural na tela, então ao clicar (★), o número que aparecer também é natural.

5. Fulano gosta de cobrir tabuleiros utilizando peças tipo tetraminó abaixo:



a) Mostre um jeito de preencher um tabuleiro 4×4 com cópias do tetraminó (rotacionar a peça é permitido).

b) É possível preencher um tabuleiro 2024×2024 com cópias do tetraminó? Justifique.



c) É possível cobrir um tabuleiro 2022×2023 com cópias do tetraminó? Justifique.

6. Um número tridiferente de dois dígitos é crescente se o algarismo da unidade é maior que o da dezena e é decrescente se o algarismo da dezena é maior que o da unidade. Por exemplo, 47 e 58 são crescentes mas 63 e 74 são decrescentes.

a) Existe um número tridiferente que começa com 1 e termina com 8?

b) Existe um número tridiferente de 2024 dígitos que termina com 7 e é múltiplo de 3?

c) Mostre que é impossível somar um número tridiferente crescente com um decrescente e obter um número tridiferente. (Obs.: Note que os números que vão ser somados possuem dois dígitos)

d) Mostre que é impossível somar dois números tridiferentes de dois dígitos e obter um número tridiferente de três dígitos.
