1.

a) Considere o número 9999...9899...9999, com 1011 dígitos 9 seguidos, então um dígito 8 e por fim mais 1012 dígitos 9 consecutivos. Evidentemente, ele é *abestado*, uma vez que ao invertê-lo obtemos 9999...9989...9999, que será maior que o nosso número original pois o 8 agora ocupará a 1013ª casa em vez da 1012ª, e as outras casas seguirão possuindo algarismos 9. Perceba que, caso exista um número *abestado* maior que ele, ele necessariamente terá apenas algarismos 9 entre a casa de índice 1 e de índice 1012, pois ele deve ser maior que o número que escolhemos inicialmente, e possuirá ao menos um dígito menor que 9 entre a casa de índice 1013 e a de índice 2024, pois se essa regra não for cumprida teremos o número 999...999, com 2024 algarismos 9, que não é *abestado* pois é igual ao seu inverso. Assim, note que um número que segue essas regras não será *abestado*, pois ao invertermos ele, teremos ao menos um dígito entre as casas de índice 1 e de índice 1012 que é menor que 9, e como o número inicial tinha todas as primeiras 1012 casas com algarismos 9 temos que ele será menor que o inicial. Logo nosso número é o maior número abestado de 2024 algarismos.

...

b) Temos três casos para os dígitos das unidades e das centenas dos números de três algarismos:

- **Caso 1:** "unidade" > "centena" $\longrightarrow$ o número invertido terá um dígito das centenas maior, logo ele será maior que o inicial. Dessa forma, o número será *abestado.*
- **Caso 2:** "unidade" = "centena" $\longrightarrow$ pela simetria, o inverso será o mesmo que o número original, logo ele não será abestado.
- **Caso 3:** "unidade" < "centena" $\longrightarrow$ o número será necessariamente maior que o seu inverso, pelo mesmo argumento que no caso 1.

Dessa forma, basta contarmos os números que satisfazem o caso 1. Para um dígito N nas unidades, teremos $N-1$ possibilidades de dígitos para as centenas, pois o número não pode começar com 0, e 10 possibilidades para as dezenas, logo o total será: $10\cdot 0+10\cdot 0+10\cdot 1+10\cdot 2+\cdots+10\cdot 8=360$ números.

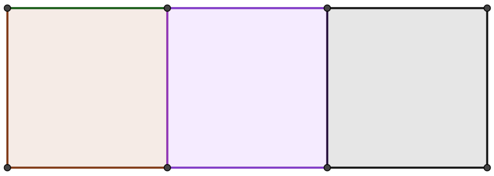
...

c) Perceba que, temos os mesmos três casos que no item b), só que dessa vez apenas o caso 1 impossibilita a existência de um número *abestado*, enquanto que um número no caso 2 pode ser *abestado*, caso seu dígito das centenas seja maior que o das dezenas, e um número do terceiro caso é necessariamente *abestado*. Podemos então contar esses números.

Para os do caso 3, temos, analogamente ao item b), que o a quantidade de números desse caso será $100\cdot 0+100\cdot 0+100\cdot 1+100\cdot 2+\cdots+100\cdot 8=3600$. Para os do caso 2, teremos que, como a unidade é igual a unidade de milhar, então a centena será maior que a dezena. Temos $0+1+2+\cdots+9=45$ possibilidades para isso ocorrer. Esse número será o mesmo em todos os casos pois depende apenas da centena e da dezena. Como temos 9 possibilidades para o par unidade-unidade de milhar, Teremos então que a quantidade total de termos será $45\cdot 9=405$. O total então será $405+3600=4005$.

2.

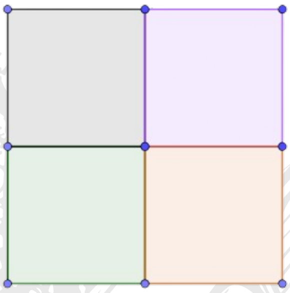
a) Observe o tabuleiro abaixo. Perceba que temos 3 maneiras de pintar a casa marrom, 2 de pintar a casa roxa e 2 de pintar a casa preta:



Pelo princípio multiplicativo, Neto pode pintar um tabuleiro 1×3 de $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ maneiras.

. . . .

b) Veja o tabuleiro:



Veja que a casa verde tem 3 maneiras de ser pintada, enquanto a preta tem 2 maneiras. Agora, assuma que foram usadas a cor X no verde e a cor Y no preto. Podemos colocar qualquer cor que não é X, porém, se a cor escolhida é diferente da cor Y, a casa roxa tem apenas uma opção. Agora, se a cor da casa marrom é Y, então podemos colocar 2 cores na casa roxa. Assim, dado as casas preta e verde escolhidas, temos 3 opções de escolha para as casas roxa e marrom. Logo, pelo princípio multiplicativo, a quantidade de maneiras que Neto pode colorir é $6 \times 3 = 18$.

. . . .

c) Dado o que provamos no item b), se temos uma configuração de cor (X, Y) para uma coluna 2×1 do tabuleiro, a próxima coluna tem 3 maneiras de ser pintada. Assim, como temos 5 colunas e a 1^{o} pode ser pintada de 6 formas, pelo princípio multiplicativo, Neto pode pintar o tabuleiro 2×5 de $6 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 486$ formas distintas.

3.

a) Temos três casos:

- **Caso 1:** $L > 0$

  Ao multiplicarmos um número positivo por outro número positivo o resultado sempre será positivo

- **Caso 2:** $L = 0$

  Temos $L^2 = 0^2 = 0$

- **Caso 3:** $L < 0$

  Chame L de $(-1) \cdot D$, em que D será positivo. Temos então que $L^2 = (-1)^2 \cdot D^2 = D^2$, que é positivo, pois, como $D > 0$, voltamos ao caso 1.

Assim, nos três casos o resultado de L^2 é positivo.

b) Temos:

$$W^2 + 2W + 2 > 0 \iff (W+1)^2 + 1 > 0$$

.

Como todo número real elevado ao quadrado é não negativo, essa desigualdade é sempre satisfeita.

c) Temos:

$$Y^2 + X^2 - XY + X = X(1+Y) \implies X^2 - 2XY + Y^2 = 0 \implies (X-Y)^2 = 0 \implies X - Y = 0 \implies X = Y$$

Daí, obtemos que, como $XY = 36$, então

$$X^2 = 36 \longrightarrow X = Y = \pm 6$$

d) Temos:

$$A^2 + 4B^2 - 2AB + 2A - 4B + A + 2 > A(2B+1) \implies (A-2B)^2 + 2(A-2B) + 2 > 0$$

Defina $R = A - 2B$. Temos então:
$R^2 + 2R + 2 > 0$
Que sabemos ser verdade pelo item b).

4.

a) Basta ver que $\angle AA_{n+1}B_n = 90°$ e $\angle AA_{n+2}B_{n+1} = 90°$, então essas retas são paralelas.

b) Perceba que pelo caso A.A. de semelhança, temos $\triangle A_nB_nB$ semelhante ao $\triangle A_{n+1}B_{n+1}B$, para todo n inteiro positivo. Além disso, a razão de semelhança entre $\triangle A_nB_nB$ e $\triangle A_{n+1}B_{n+1}B$ é igual para todo n, então basta calcular a razão $\dfrac{A_1B_1}{A_2B_2}$. Sendo x o lado A_1B_1, por trigonometria, temos $B_1A_2 = \dfrac{\sqrt{3}x}{2}$, então $A_2B_2 = \dfrac{3x}{4}$. Assim, substituindo, $\dfrac{A_1B_1}{A_2B_2} = \dfrac{x}{\frac{3x}{4}} = \dfrac{4}{3}$, concluindo que $\dfrac{A_8B_8}{A_9B_9} = \dfrac{4}{3}$.

c) De maneira análoga ao que foi dito no item b), as razões de semelhança nos triângulos são iguais, então, por Tales, também será igual para $\dfrac{A_nA_{n+1}}{A_{n+1}A_{n+2}}$, bastando calcular $\dfrac{AA_1}{A_1A_2}$. Chamando AA_1 de x, por trigonometria, temos $CA_1 = \sqrt{3}x$, então $A_1B_1 = \dfrac{3x}{2}$, fazendo com que $A_1A_2 = \dfrac{3x}{4}$. Substituindo, $\dfrac{AA_1}{A_1A_2} = \dfrac{A_nA_{n+1}}{A_{n+1}A_{n+2}} = \dfrac{x}{\frac{3x}{4}} = \dfrac{4}{3}$.

5.

a) Iremos fazer o processo inverso para descobrir qual número gerou o 135 e seus anteriores também. Temos: 135-67-33-16. Como 16 é par, não é possível fazer o processo inverso com ele. Assim, os $n's$ tal que A_n tem 135 são: 135, 67, 33 e 16.

....

b) Fixe um quadrado perfeito x^2. Se fizermos o processo inverso, paramos quando um número é par, pois subtraíndo 1 dele, não é possível dividir por 2. Assim, se x é par, só A_{x^2} terá x^2 aparecendo, existindo apenas um n. Se x é ímpar, temos que x^2 deixa resto 1 na divisão por 4 (para ver, basta fazer as 2 possibilidades de restos de ímpares por 4 e elevar ao quadrado), então $x^2 - \dfrac{x^2-1}{2}$, e garantimos que $\dfrac{x^2-1}{2}$ é par, pois 4 divide x^2-1, dado o resto de x^2 por 4. Assim, para x par, existe apenas um n, enquanto para x ímpar, existe dois $n's$, garantindo o que queremos provar.

....

c) Perceba que existe um n "gerador" das sequências, ou seja, dado um sequência A_t, ela gera A_n se A_n está contida em A_t e ninguém gera A_t. Pegue o t que gera K. Inicialmente, veja que t é par ou igual a 1, pois caso contrário, poderíamos escolher $\dfrac{t-1}{2}$ como gerador. Assim, temos que $A_t = (t, 2t+1, 4t+3, 8t+7, ...)$, então se K está nesse conjunto, $K = 2^it + 2^i - 1$, onde a quantidade de conjuntos que tem o K são todos os anteriores da sequência e o próprio A_k, ou seja, queremos descobrir $i+1$ em função de K. Colocando 2^i em evidência, $K = 2^it + 2^i - 1 \implies K+1 = 2^i(t+1)$. Basta ver agora que, se $t = 1$, $K+1$ é potência de 2, onde $i+1$ é o expoente do 2 de $K+1$, implicando que sabemos todas os conjuntos que tem K quando $t = 1$. Se t é par, basta ver que $t+1$ é ímpar, então para descobrir $i+1$ basta pegar $K+1$, ver o maior expoente do 2 que divide ele e somar 1, tendo nossa resposta esperada.

6.

a) Perceba que não podemos ter duas torres na mesma coluna, pois uma atacará a outra. Dessa forma, como temos apenas 8 colunas, o máximo que podemos ter serão 8 torres. Veja que é possível termos 8 torres, basta colocarmos elas ao longo da mesma diagonal principal do tabuleiro, então elas não se atacarão. Assim, 8 é o maior número de torres que podemos ter em um tabuleiro de xadrez sem que duas se ataquem.

....

b) Analogamente ao item anterior, não podemos ter dois bispos na mesma diagonal. Note que no tabuleiro temos trinta diagonais, sendo elas quinze da esquerda para a direita e de cima para baixo e quinze da direita para a esquerda de cima para baixo. No entanto, podemos descartar duas dessas diagonais, pois dentre as quatro diagonais de uma casa do tabuleiro, quando um bispo elimina uma dessas diagonais ele necessariamente também eliminará a diagonal do canto oposto, logo na realidade temos apenas vinte e oito diagonais "efetivas". como cada bispo elimina duas delas, teremos no máximo $\dfrac{28}{2} = 14$ bispos. Um exemplo com essa quantidade será se colocarmos bispos em todas as casas da linha A (na notação do xadrez) e nas casas H2, H3, H4, H5, H6 e H7. Assim, 14 é o maior número de bispos que podemos ter em um tabuleiro de xadrez sem que dois se ataquem.

c) Considere um quadrante de tamanho 4×2 do tabuleiro. Note que, ao colocarmos um cavalo nesse quadrante, ele necessariamente ataca uma casa do mesmo quadrante, eliminando assim duas casas, uma por ocupá-la e uma por atacá-la. Portanto, podemos no máximo posicionar $\dfrac{8}{2} = 4$ cavalos por quadrante. Como o tabuleiro pode ser dividido em oito desses quadrantes sem sobreposição, com cada quadrante podendo conter no máximo 4 cavalos, podemos ter no máximo $4 \cdot 8 = 32$ cavalos. Um exemplo com essa quantidade de cavalos é se colocarmos todos os cavalos em casas da mesma cor, uma vez que um cavalo só ataca casas de cor diferente da cor da casa em que ele se encontra, logo não haverão dois cavalos se atacando.