

Simulado OBMEP 2024

Ampulheta do Saber

INSTRUÇÕES

1. A prova pode ser feita a lápis ou à caneta.
2. A duração da prova é de 3 horas.
3. A solução de cada questão deve ser escrita na página reservada para ela, de maneira organizada e legível. Evite escrever as soluções na folha de rascunho.
4. Na correção serão considerados todos os raciocínios que você apresentar. Tente resolver o maior número possível de itens de todas as questões, principalmente o item (a) de cada questão.
5. Respostas sem justificativa não serão consideradas na correção.
6. Não é permitido:
 - a) usar instrumentos de desenho, calculadoras ou qualquer fonte de consulta;
 - b) comunicar-se com outras pessoas, além do aplicador de provas;
 - c) usar quaisquer aparelhos eletrônicos (celulares, tablets, relógios com calculadora, etc.);

O não cumprimento dessas regras resultará em sua desclassificação.

Boa prova!

1. Dizemos que um número inteiro positivo n é *abestado* se ao lermos ele da direita para a esquerda obtivermos um inteiro maior que n . Por exemplo, 2009 é *abestado* porque 9002 é maior que 2009, por outro lado, 2010 não é *abestado* pois 0102, que é o número 102, é menor que 2010 e 3443 não é *abestado* pois quando lido da direita para a esquerda é exatamente igual ao original. Sabendo disso, responda aos seguintes itens:

a) Qual o maior número *abestado* de 2024 algarismos?

b) Quantos números *abestados* de três algarismos existem?



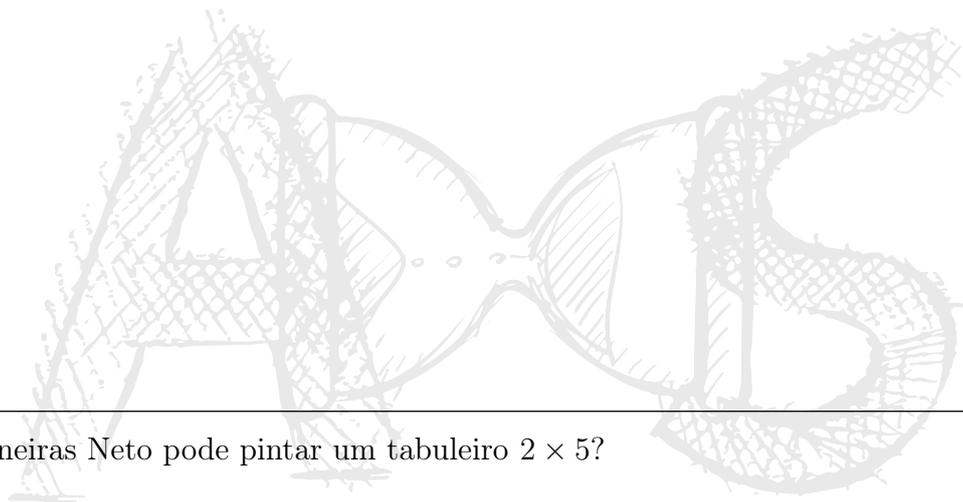
c) Quantos números *abestados* de quatro algarismos existem?

2. Neto tem 3 lápis de cor, um azul, um vermelho e um preto. No seu tempo livre, ele brinca de colorir tabuleiros de lados inteiros positivos separados em quadradinhos 1×1 , com suas 3 cores, de modo que 2 quadradinhos adjacentes têm cores distintas.

a) De quantas maneiras Neto pode pintar um tabuleiro 1×3

b) De quantas maneiras Neto pode pintar um tabuleiro 2×2 ?

c) De quantas maneiras Neto pode pintar um tabuleiro 2×5 ?



3. Um dia, Joãozinho, um garoto muito esperto, entrou em sua sala de aula para estudar. Quando olhou para a lousa, notou que haviam várias questões não resolvidas na lousa. Muito curioso, Joãozinho decidiu tentar resolvê-las. Após muitas tentativas, ele resolveu todas, exceto 4 delas, as quais ele, sabendo que você é muito inteligente, pediu por sua ajuda para fazê-las. Dessa forma, ajude Joãozinho a resolver essas 4 perguntas. Os enunciados eram os seguintes:

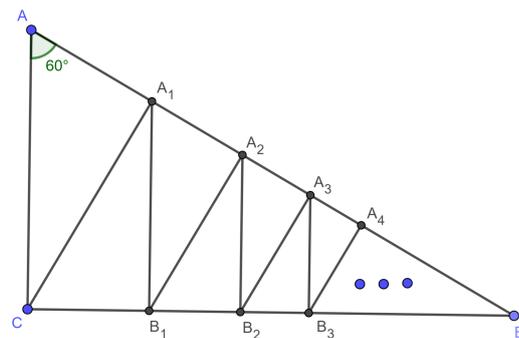
a) Mostre que, para todo número real L , temos $L^2 \geq 0$

b) Prove que, para qualquer número real W , temos $W^2 + 2W + 2 > 0$.

c) Ache o(s) valor(es) de X e Y que satisfazem ambas as equações $Y^2 + X^2 - XY + X = X(1 + Y)$ e $XY = 36$.

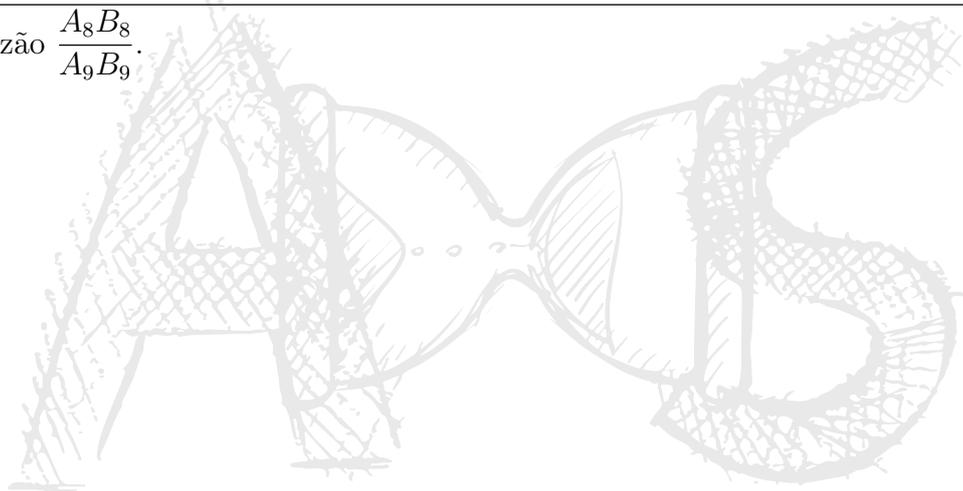
d) Prove que, para quaisquer números reais A e B , temos $A^2 + 4B^2 - 2AB + 2A - 4B + A + 2 > A(2B + 1)$.

4. A figura ao lado mostra um triângulo retângulo em C e $\angle CAB = 60^\circ$. A figura pega A_1 sendo pé da altura de C em AB e B_1 sendo pé da altura de A_1 em BC . Para cada A_n , a figura os define como pé da altura de B_{n-1} em AB , enquanto B_n o pé de A_n em BC .



a) Prove que $B_n A_{n+1}$ é paralelo a $B_{n+1} A_{n+2}$.

b) Determine a razão $\frac{A_8 B_8}{A_9 B_9}$.

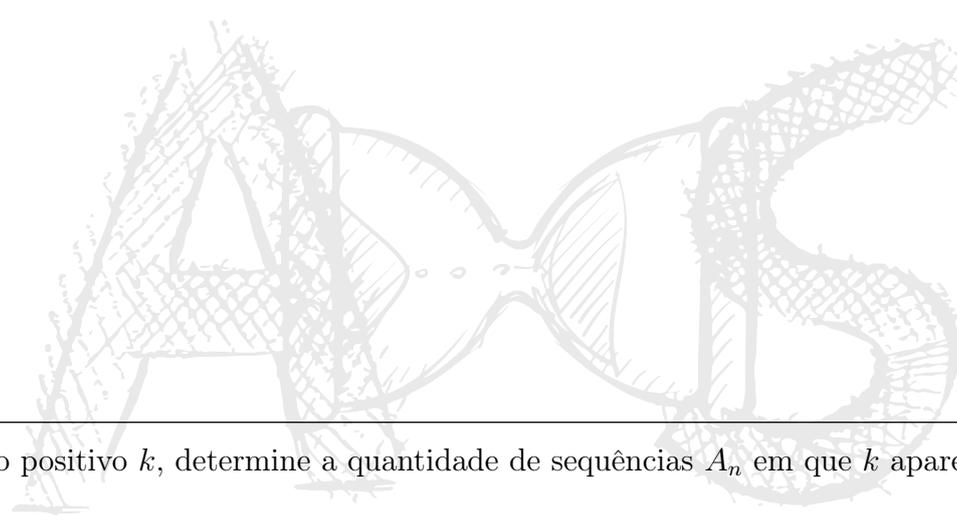


c) Determine a razão $\frac{A_n A_{n+1}}{A_{n+1} A_{n+2}}$.

5. Alessandro cria uma sequência de números a partir de um inteiro positivo inicial. Sendo n tal inteiro, a cada passo Alessandro escolhe o próximo termo sendo duas vezes o n , mais 1. A sequência que começa com um termo n é chamada de A_n . Um exemplo de sequência é a $A_5 = (5, 11, 23, 47, 95, \dots)$.

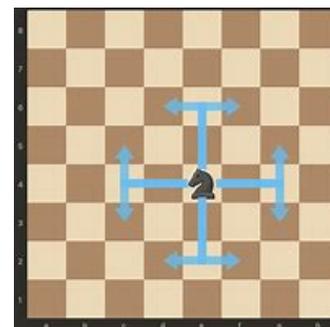
a) Para quais n 's escolhidos o 135 aparece em A_n ?

b) Prove que existe no máximo dois n 's tal que, dado um quadrado perfeito x^2 , x^2 está em A_n



c) Para um inteiro positivo k , determine a quantidade de sequências A_n em que k aparece.

6. No jogo de xadrez, que ocorre em um tabuleiro 8×8 , existem várias peças. Entre elas, temos a torre, que se move ao longo das linhas e colunas do tabuleiro. Outra peça importante é o bispo, que se move ao longo das diagonais do tabuleiro. Por fim, a última peça que será trabalhada nessa questão é o cavalo, que se move traçando um caminho em formato de um “L” com três casas de largura e duas de altura, com esse “L” podendo ser rotacionado, como na figura ao lado, que mostra todos os possíveis movimentos do cavalo.



Maria, uma entusiasta do xadrez, estava pensando sobre quantas peças do mesmo tipo ela conseguiria colocar no tabuleiro sem que duas se ataquem (duas peças se atacam se uma pode se movimentar para a posição em que a outra está). Dessa forma, ajude Maria, respondendo as seguintes perguntas:

a) Qual o maior número de torres que é possível colocar no tabuleiro sem que duas se ataquem?

b) Qual o maior número de bispos que é possível posicionar no tabuleiro sem que dois se ataquem?

c) Qual o maior número de cavalos que é possível posicionar no tabuleiro sem que dois se ataquem?
