1.

a) Para que Pietro não tenha ganho até o terceiro dia, é necessário que ele tenha perdido no primeiro, no segundo e no terceiro dia a probabilidade de que Pietro ganhe no primeiro dia é $\frac{1}{x}$. Logo, a probabilidade de que Pietro tenha perdido no primeiro dia é

$$1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

A probabilidade de que Pietro tenha perdido no primeiro dia é

$$1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

A probabilidade de que Pietro tenha perdido no primeiro dia é

$$1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

Desse modo, a probabilidade de que Pietro tenha perdido nos três primeiros dias é o produto das probabilidades, ou seja

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$$

b) Analogamente ao item a), agora até quinto dia, chegamos que a resposta é

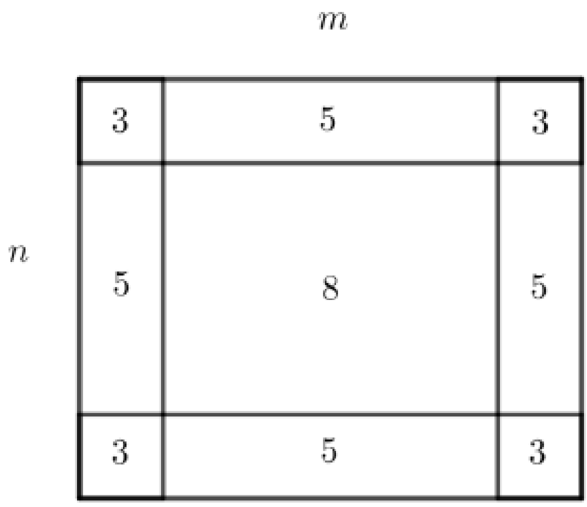
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{6}=\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{6}=\frac{1}{6}$$

c) Pensando indutivamente, a probabilidade de que Pietro não tenha ganho até o 2024º dia é igual a

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2023}{2024}\cdot\frac{2024}{2025}=\frac{1}{2025}$$

2.

a) Um competidor que sentou em um dos 4 cantos do salão deu 3 apertos de mão. Se um competidor sentou em algum dos 4 bordos, mas sem estar posicionado nos cantos, ele deu 5 apertos de mão. Finalmente, se um competidor sentou no interior do salão, ele deu 8 apertos de mão. A figura a seguir ilustra essas possibilidades:



b) Existem 4 pessoas que apertaram a mão de 3 pessoas, $2(n-2)+2(m-2)$ pessoas que apertaram a mão de 5 pessoas e $(n-2)(m-2)$ pessoas que apertaram a mão de 8 pessoas.

c) Multiplicando a quantidade de pessoas do item anterior pelos apertos de mão correspondentes, teremos contado cada um deles duas vezes, portanto:

$8 \cdot (n-2)(m-2) + 5 \cdot [2(n-2)+2(m-2)] + 3 \cdot 4 = 2 \cdot 1020 \therefore$

$8mn - 6n - 6m = 2036.$

Daí $m = (1018 + 3n) \div (4n-3)$

Para que m seja inteiro, $4n-3$ deve dividir $1018+3n$ e consequentemente $4n-3$ deve dividir $4(1018+3n) = 3(4n-3)+4081$. Como $4n-3$ divide $3(4n-3)$, segue que $4n-3$ divide $4081 = 7 \cdot 11 \cdot 53$. Os divisores de 4081 são 1, 7, 11, 53, 77, 371, 583 e 4081. Note que $4n-3$ deixa resto 1 na divisão por 4 e, dessa lista de divisores, os únicos que podem ser iguais a $4n-3$ são: 1, 53, 77 e 4081. Se

- $4n-3 = 1 \implies n = 1;$
- $4n-3 = 53 \implies n = 14;$
- $4n-3 = 77 \implies n = 20;$
- $4n-3 = 4081 \implies n = 1021.$

O primeiro e o quarto caso não são admissíveis, pois há mais de duas filas e em cada fila há mais de dois assentos. Assim $n = 14$ e $m = (1018 + 3 \cdot 14) \div (4 \cdot 14 - 3) = 20$ ou então $n = 20$ e $m = (1018 + 3 \cdot 20) \div (4 \cdot 20 - 3) = 14$. Portanto, estavam no salão $m \cdot n = 280$ competidores.

3.

a) Mônica começa digitando o número 7.

$$7 \to 7^2 = 49 \to 49 - 5 = 44$$

Desse modo, o resultado final é 44.

b) Se um inteiro positivo x deixa resto 4 quando dividido por 5, isso quer dizer que x é da forma

$$x = 5k + 4$$

onde k é um inteiro não negativo. Elevando os dois lados ao quadrado, chegamos em

$$x^2 = (5q+4)^2 =$$

$$= 25q^2 + 2 \cdot 5q \cdot 4 + 4^2$$

$$= 5(5q^2 + 8q) + 16$$

$$= 5(5q^2 + 8q + 3) + 1$$

o que quer dizer que x^2 deixa resto 1 quando dividido por 5.

c) A resposta é não. Primeiramente, note que $9 = 5\cdot 1+4$ deixa resto 4 quando dividido por 5; enquanto $7 = 5 \cdot 1 + 2$ deixa resto 2 quando dividido por 5.

Agora, a ideia é mostrar que o resto do número escrito na calculadora sempre é 4 ou 1. De fato, primeiramente note que subtrair 5 não muda o resto por 5. Logo, apenas precisamos nos preocupar quando Mônica aperta a tecla $\square$.

Se ela aperta $\square$ quando o número deixa resto 4, pelo item b), obteremos um número que deixa resto 1. Agora, se o nmero deixa resto 1, o número que vai aparecer depois deve deixar resto 1. De fato, se x deixa resto 1, podemos escreve-lo como $5k+1$ para algum k inteiro não negativo. Logo, o número a seguir vai ser

$$x^2 = (5k+1)^2 =$$

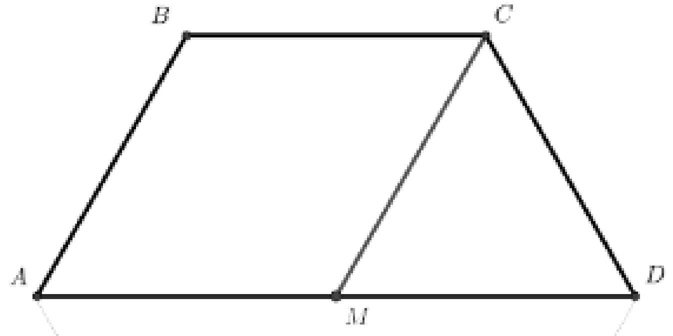
$$25k^2 + 10k + 1 =$$

$$5(5k^2 + 2) + 1$$

e portanto continua a deixar resto 1. Assim, de fato, o número escrito na calculadora sempre vai deixar resto 1 ou 4 e logo é impossível obter o 7.

4.

a) Inicialmente, verificaremos que $ABCD$ é metade de um hexágono regular. Seja M o ponto médio de AD. Como BC e AM são iguais e paralelos, $ABCM$ é um paralelogramo. Além disso, como $AM = AB = BC$, segue que $CM = AB = CD = DM$. Assim, CDM é um triângulo equilátero. De modo semelhante, podemos obter $BM = CM = CD$. Daí os triângulos ABM, BCM e CDM são congruentes e a circunferência de centro M e raio CM passa por A, B, C e D. Logo $\angle BAD = 60°$ e $\angle ABC = 180° - \angle BAM = 120°$



De $AB = BC$ segue que $\angle BAC = \angle BCA = \angle CAD$. Assim, $\angle BAC = \angle CAD = 30°$. Como $FH \perp AE$, temos $\triangle AFH$ equilátero. Além disso, $\angle ACD = \angle DBA = 90°$. Portanto, $EH \parallel CD$. Como os triângulos $\triangle BEC$ e $\triangle AED$ são semelhantes, temos $\dfrac{AH}{HD} = \dfrac{AE}{EC} = \frac{10}{5} = 2$.

. . . .

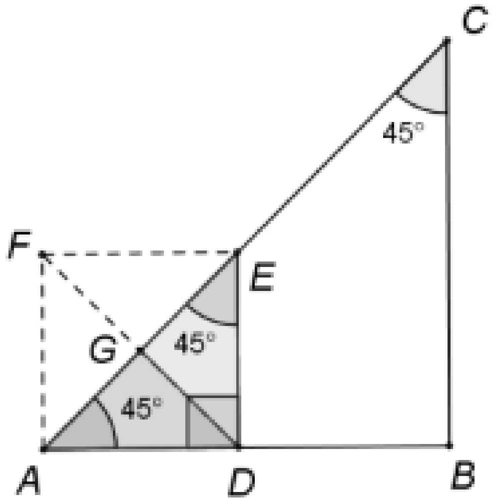
b) No triângulo retângulo AEH, temos $AE = AH \cdot \cos 30° = \dfrac{20}{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{10\sqrt{3}}{3}$.

. . . .

c) Como as diagonais de $AFCH$ são perpendiculares, temos $[AFCH] = \dfrac{AC \cdot FH}{2}$. Pelo Teorema de Pitágoras, segue que $AC = \sqrt{AD^2 - CD^2} = \sqrt{100 - 25} = 5\sqrt{3}$. Outra forma de obter o comprimento desse segmento é calcular $AC = AD \cdot \cos 30° = 5\sqrt{3}$, então $[AFCH] = \dfrac{AC \cdot FH}{2} = \dfrac{AC \cdot AH}{2} = \dfrac{5\sqrt{3} \cdot \frac{20}{3}}{2} = \dfrac{50\sqrt{3}}{3}$

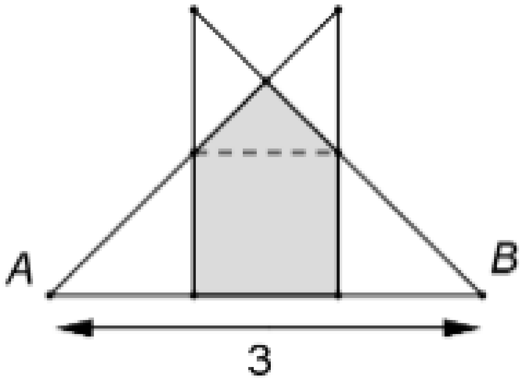
5.

Observação: O argumento geral para a resolução desta questão está ilustrado abaixo. O triângulo ABC é um dos triângulos resultantes do corte do quadrado, e D é um ponto qualquer no lado AB. Fazendo DE perpendicular a AB, o triângulo ADE também é retângulo de lados iguais, e sua área é igual a metade da área do quadrado $ADEF$; a área do triângulo ADG é então igual a $\dfrac{1}{4}$ da área do quadrado $ADEF$.



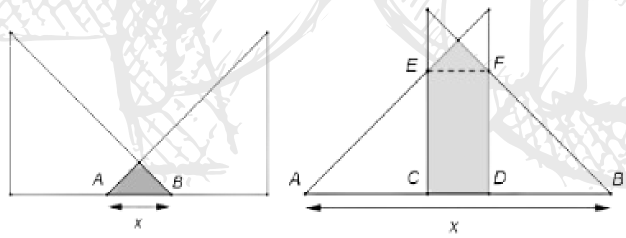
a) Quando $x = 1$, a figura formada pela sobreposição dos triângulos maiores é um triângulo menor, indicado em cinza na figura abaixo. A observação acima mostra que sua área é a quarta parte da área de um quadrado de lado 1, isto é, $f(1) = \dfrac{1}{4}$

Quando $x = 3$, a figura formada pela sobreposição dos dois triângulos é um pentágono, como na figura abaixo. Como os triângulos têm catetos de medida 2 e $AB = 3$, vemos que os catetos se sobrepõem em um segmento de medida 1. Logo, o pentágono é a união de um quadrado de lado 1 e um triângulo idêntico ao que consideramos no início desta questão. Logo, $f(3) = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$



....

b) Para valores de x tais que $0 \leq x \leq 2$, a figura formada pela sobreposição dos triângulos é o triângulo em cinza à esquerda na figura abaixo, donde $f(x) = \frac{x^2}{4}$ para $0 \leq x \leq 2$, conforme a observação inicial. Quando $2 < x \leq 4$, a figura formada pela sobreposição dos triângulos é um pentágono, como ilustrado abaixo.



Temos então $AC + CD = 2 = BD + CD$, donde

$$4 = AC + BD + CD + CD = x + CD,$$

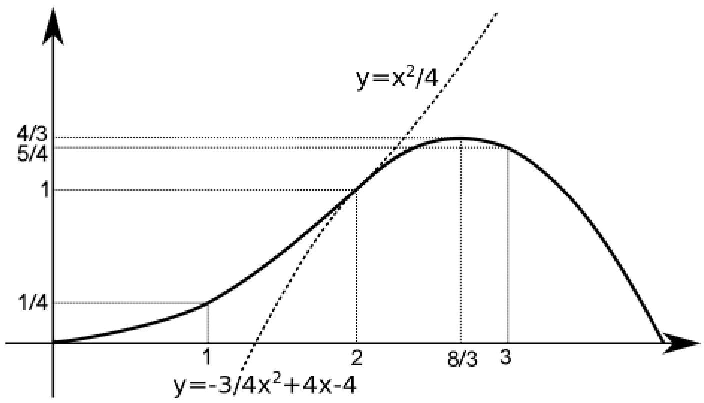
ou seja, $CD = 4 - x$; logo $AC = BD = 2 - (4 - x) = x - 2$. Vemos assim que o pentágono pode ser decomposto em um retângulo $CDFE$ de base $4 - x$ e altura $CE = AC = x - 2$ e um triângulo retângulo isósceles de hipotenusa $4 - x$. // Então, para $2 < x \leq 4$, temos que

$$f(x) = (4 - x)(x - 2) + \frac{(4 - x)^2}{4} - \frac{3}{4}x^2 + 4x - 4$$

Em resumo, temos

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{4}, \text{ se } 0 \leq x \leq 2 \\ -\frac{3}{4}x^2 + 4x - 4, \text{ se } 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

O gráfico de f está esboçado a seguir; nele marcamos os valores calculados no item anterior, bem como outros valores importantes para a resolução do item c).



c) A observação direta do gráfico mostra que o valor máximo da função no intervalo $[0,2]$ é $f(2) = 1$. Resta analisar a função no intervalo $[2,4]$. Esquecendo por um momento que estamos neste intervalo, vamos considerar a função quadrática $g(x) = -\dfrac{3}{4}x^2 + 4x - 4$ definida para todo número real x; ela é da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ com $a = -\dfrac{3}{4}$, $b = 4$ e $c = -4$. Como $a < 0$, ela assume um valor máximo para $x = -\dfrac{b}{2a} = \frac{8}{3}$ e seu valor neste ponto é $-\dfrac{\Delta}{4a} = \dfrac{4}{3}$ .Uma vez que $\dfrac{8}{3}$ pertence ao intervalo $[2,4]$, segue que o máximo de f neste intervalo é $\dfrac{4}{3}$, e como $\dfrac{4}{3} > 1$ concluímos que este é o valor máximo de f no intervalo $[0,4]$.

6.

a) Para $x = 5$ e $x = 7$, temos alguns exemplos de triplas do tipo bacana:

$(x, y, z) = (5, 2, 4), (5, 3, 1), (7, 3, 5)$ e $(7, 4, 2)$.

b) Os casos particulares do item anterior permitem conjecturar as seguintes triplas para x ímpar: $(x, y, z) = (2n + 1, n, n + 2)$ e $(x, y, z) = (2n + 1, n + 1, n - 1)$.

Para verificar que elas satisfazem a equação, perceba que: $(2n + 1)^2 - 3n^2 = n^2 + 4n + 1 = (n + 2)^2 - 3$. e $(2n + 1)^2 - 3(n + 1)^2 = n^2 - 2n - 2 = (n - 1)^2 - 3$.

c) Considerando a fatoração $(x - z)(x + z) = 3(y - 1)(y + 1)$, podemos concluir que $x - z$ e $x + z$ são divisores do membro direito da equação. Como x é a média aritmética desses dois divisores, isso permite definir uma busca ordenada de possíveis soluções da equação com x par. Escolhendo $y = 4$, podemos analisar os possíveis pares de divisores positivos de $3 \cdot 3 \cdot 5$:

$(3, 3 \cdot 5), (3 \cdot 3, 5)$ e $(1, 3 \cdot 3 \cdot 5)$.

Como $x - z < x + z$, temos os casos:

$$\begin{cases} x - z = 3 \\ x + z = 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - z = 5 \\ x + z = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - z = 1 \\ x + z = 45 \end{cases}$$

Não existem valores pares para x nesse caso. A mesma análise para $y = 7$ também mostra que não existem soluções nesse caso. Se $y = 9$, a tripla$(x, y, z) = (16, 9, 4)$ é uma solução do tipo bacana com x par.