OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS

Somando novos talentos para o Brasil

**Nível 3**
Ensino Médio

**2ª Fase - 19 de outubro de 2024**

# Simulado OBMEP 2024

**Ampulheta do Saber**

---

## INSTRUÇÕES

1. A prova pode ser feita a lápis ou à caneta.
2. A duração da prova é de 3 horas.
3. A solução de cada questão deve ser escrita na página reservada para ela, de maneira organizada e legível. Evite escrever as soluções na folha de rascunho.
4. Na correção serão considerados todosos raciocínios que você apresentar. Tenter esolver o maior número possível de itens de todas as questões, principalmente o item (a) de cada questão.
5. Respostas sem justificativa não serão consideradas na correção.
6. Não é permitido:

   a) usar instrumentos de desenho, calculadoras ou qualquer fonte de consulta;

   b) comunicar-se com outras pessoas, além do aplicador de provas;

   c) usar quaisquer aparelhos eletrônicos (celulares, tablets, relógios com calculadora, etc.);

O não cumprimento dessas regras resultará em sua desclassificação.

Boa prova!

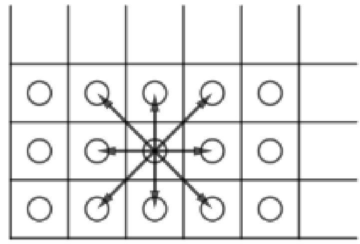
**1.** A partir de hoje, o grande apostador Carlo Pietro decidiu frequentar cassinos diariamente. No primeiro dia, ele apostará em um jogo cuja probabilidade de ganhar é igual a $\frac{1}{2}$. Nos segundo, terceiro e quarto dias, ele apostará em jogos diferentes cujas probabilidades de vitória são, respectivamente, iguais $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ e assim por diante nos dias que se seguirem.

a) Qual é a probabilidade de que ele não tenha ganhado até o terceiro dia?

b) Qual é a probabilidade de que ele não tenha ganhado até o quinto dia?

c) Qual é a probabilidade de que ele não tenha ganhado até o 2024º dia?

**2.** Em uma competição, os competidores ocupam todos os lugares de um salão retangular onde os assentos estão organizados em filas e colunas de tal modo que há mais de duas filas e em cada fila há mais de dois assentos. Em um dado momento, esses competidores recebem a ordem de cumprimentarem com um aperto de mão apenas os seus vizinhos diretos no salão, isto é, quem está na sua esquerda, direita, na frente, atrás e em diagonal.



a) Quais são as possíveis quantidades de apertos de mão que cada competidor do salão pode ter dado?

b) Para cada uma das quantidades $x$ descritas no item anterior, calcule quantos competidores deram $x$ apertos de mão.

c) Determine o número de competidores que estavam no salão.

**3.** Uma calculadora do país de Cincolândia tem apenas os algarismos de 0 a 9 e dois botões $\square$ e $\triangle$. O botão $\square$ eleva ao quadrado o número que está no visor da calculadora. O botão $\triangle$ subtrai 5 do número que está no visor da calculadora.

a) Mônica digita o número 7 e depois aperta $\square$ e, em seguida, aperta o botão $\triangle$. Qual o resultado mostrado pela calculadora?

---

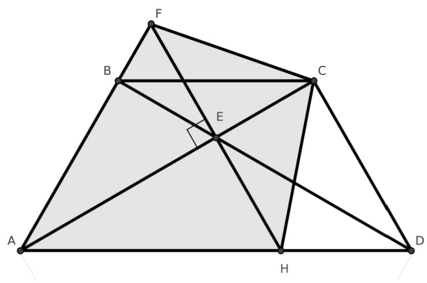
b) Mostre que se um número natural $x$ deixa resto 4 quando dividido por 5, então o número $x^2$ deixa resto 1 quando dividido por 5.

---

c) Na calculadora de Cincolândia, é possível digitar o número 9 e depois chegar ao resultado 7 apertando os botões $\square$ ou $\triangle$ de maneira adequada?

---

**4.** Considere o trapézio $ABCD$ de bases $BC$ e $AD$ de modo que $AB = BC = CD = 5$ e $AD = 10$. Seja $E$ o ponto de interseção das diagonais $AC$ e $BD$. A reta perpendicular a $AC$ traçada por $E$ intersecta o prolongamento de $AB$ em $F$ e a base $AD$ em $H$.




a) Determine o comprimento de $AH$.

b) Determine o comprimento de $AE$.

c) Encontre a área do quadrilátero $AFCH$.

**5.** Dois triângulos retângulos isósceles com catetos de medida 2 são posicionados como mostra a Figura1. A seguir, o triângulo da esquerda é deslocado para a direita. Nas Figas 2 e 3, $x$ indica a distância entreos vértices$A$ e $B$ dos dois trianguos.

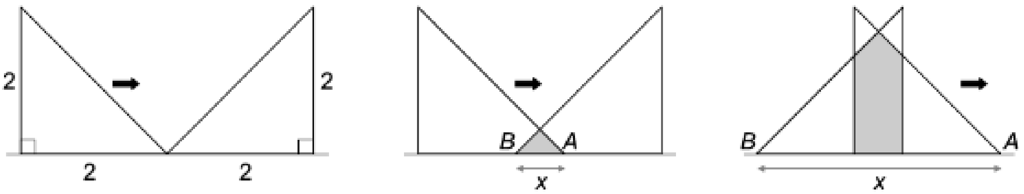
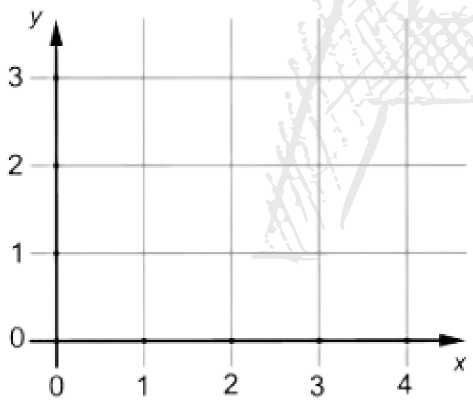



Figura 1 Figura 2 Figura 3

a) Calcule $f(1)$ e $f(3)$.

b) Encontre as expressões de $f$ nos intervalos $[0, 2]$ e $[2, 4]$ e esboçe o seu gráfico.




c) Qual é a área máxima da região comum aos triângulos?

**6.** Dizemos que uma tripla de inteiros $(x, y, z)$ é do tipo *bacana* se $x, y$ e $z$ são inteiros positivos, com $y \geq 2$, e $x^2 - 3y^2 = z^2 - 3$.

a) Encontre uma tripla $(x, y, z)$ do tipo *bacana* com $x = 5$ e $x = 7$.

b) Mostre que para todo $x \geq 5$ e ímpar existem pelo menos duas triplas distintas $(x_1, y_1, z_1)$ e $(x_2, y_2, z_2)$ do tipo *bacana*.

c) Encontre alguma tripla do tipo bacana com $x$ par.