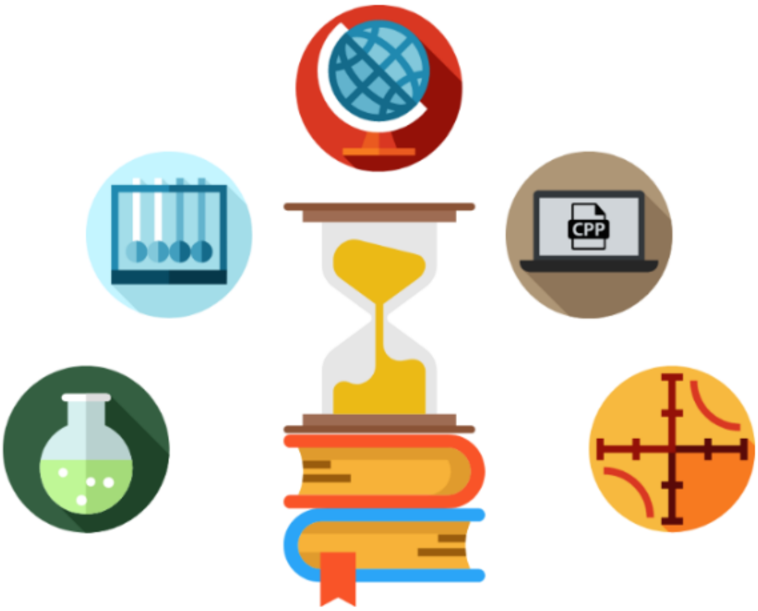
Desigualdade de Cauchy-Schwarz

Sofia Pinheiro



1 Introdução

A desigualdade de Cauchy-Schwarz é um dos resultados mais importantes e amplamente aplicados em diversas áreas da matemática, incluindo álgebra linear e análise funcional. Essa desigualdade é uma regra matemática que ajuda a entender como dois conjuntos de números ou grandezas estão relacionados.

2 Desigualdade de Cauchy-Schwarz

Sendo $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ números reais quaisquer, pode-se afirmar que:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)^2$$

sendo que a igualdade só ocorre se, e somente se:

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \cdots = \frac{b_n}{a_n}$$

Prova: Consideremos a seguinte função do 2º grau, para $x \in \mathbb{R}$:
$f(x) = \sum_{i=1}^{n} (a_i x - b_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i \left(x - \frac{b_i}{a_i}\right)^2$
Como a_i, b_i e x são números reais, temos que:

$$(a_i x - b_i)^2 \geq 0 \quad \forall\, 1 \leq i \leq n$$

Então, teremos que $\Delta \leq 0$,dessa forma, desenvolveremos a fórmula da função $f(x)$ no formato que nos permita calcular o Δ:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} (a_i x - b_i)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) x^2 - 2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right) x + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$

Lembrando que $\Delta \leq 0$, podemos concluir que:

$$\Delta = \left(\sum_{i=1}^{n} 2 a_i b_i\right)^2 - 4\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \leq 0$$

Colocando o 2 para fora do primeiro somatório e dividindo tudo por 4, temos que:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$

Ficando provada a desigualdade de Cauchy. A situação de igualdade de Cauchy ocorre quando $\Delta = 0$, isto é, quando $f(x) = 0$, que, pela definição de f como soma de quadrados, ocorre somente se todos os termos $(a_i x - b_i) = 0$. Em outras palavras, a igualdade só acontece se for possível existir um valor de x tal que:

$$x = \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \cdots = \frac{b_n}{a_n}$$

3 Lema de Titu

No contexto das desigualdades, é comum que certos resultados sejam conhecidos por meio de outros lemas. Em algumas situações, esses resultados recebem nomes específicos. No caso de Cauchy, frequentemente encontramos o chamado lema de Titu, também conhecido como lema T2, forma de Engel ou desigualdade de Sedrakyan. Esse lema nada mais é do que uma aplicação direta da desigualdade de Cauchy. Diante disso, apresentaremos e provaremos rapidamente esse lema.

Lema: (Titu) Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números reais e $y_1, y_2, \ldots, y_n$ números reais positivos. Daí, podemos afirmar que:

$$\frac{x_1^2}{y_1} + \cdots + \frac{x_n^2}{y_n} \geq \frac{(x_1 + \cdots + x_n)^2}{y_1 + \cdots + y_n}$$

Prova:
A prova é simples e consiste na aplicação direta da desigualdade de Cauchy

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + \cdots + y_n^2) \geq (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + \cdots + x_ny_n)^2$$

Basta substituir $x_k = \frac{a_k}{\sqrt{b_k}}$ e $y_k = \sqrt{b_k}$ e a desigualdade torna-se

$$\left(\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \frac{a_3^2}{b_3} + \cdots + \frac{a_n^2}{b_n}\right)(b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n) \geq (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n)^2$$

Para finalizar, basta passar a soma de $(b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n)$ para o "outro lado"dividindo.

4 Exemplos

4.1 Prova de M.A. $\geq$ M.G.

Definição 2. Para $n > 1$ números reais positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, definimos sua:

(a) **Média aritmética** como o número $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$.

(b) **Média geométrica** como o número $\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$.

Provaremos que, para dois números reais positivos, a média aritmética é sempre maior ou igual à média geométrica, com igualdade ocorrendo se, e somente se, esses números forem iguais. A seguir, enunciaremos o caso geral como um resultado.

Teorema Dados $n > 1$ reais positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, temos

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n},$$

ocorrendo a igualdade se e somente se $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Para entender a dinâmica da prova do teorema acima, analisemos separadamente os casos $n = 3$ e $n = 4$, começando com o caso $n = 4$. Para tanto, dados reais positivos a, b, c, d, já sabemos que $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ e $\frac{c+d}{2} \geq \sqrt{cd}$. Então,

$$\frac{a+b+c+d}{4} = \frac{\frac{a+b}{2} + \frac{c+d}{2}}{2} \geq \frac{\sqrt{ab} + \sqrt{cd}}{2} \geq \sqrt[4]{abcd}.$$

Mostramos, acima, que $\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$. Escrevendo tal desigualdade com $\sqrt[3]{abc}$ no lugar de d, obtemos

$$\frac{a+b+c+\sqrt[3]{abc}}{4} \geq \sqrt[4]{abc \cdot \sqrt[3]{abc}} = \sqrt[4]{abc}.$$

Dessa forma, a desigualdade $a+b+c+\sqrt[3]{abc} \geq 4\sqrt[4]{abc}$, ou o que é o mesmo, $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt{abc}$.

Conforme veremos a seguir, a prova da versão geral da desigualdade entre as médias é uma adaptação dos argumentos utilizados para os dois casos acima.

Prova do Teorema Inicialmente, provaremos por indução a desigualdade desejada é verdadeira sempre que n for uma potência de 2, ocorrendo a igualdade se e só se todos os a_i são iguais. Para isso, teremos de verificar o caso em que $n = 2$, o qual já discutimos, formular a hipótese de indução (para $n = 2^j$, digamos) e aplicar o passo de indução (deduzindo o caso $n = 2^{j+1}$ a partir do caso $n = 2^j$). novamente se e só se todos os números forem iguais. Para estabelecer esse fato, considere os $2k$ reais positivos $a_1, a_2, \ldots, a_{2k}$. Então:

$$\frac{1}{2k}\sum_{j=1}^{2k} a_j = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} a_j + \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} a_{k+j}\right) \geq \frac{1}{2}\left(\sqrt[k]{a_1\cdots a_k} + \sqrt[k]{a_{k+1}\cdots a_{2k}}\right) \geq \sqrt[2k]{a_1\cdots a_k a_{k+1}\cdots a_{2k}} = \sqrt[2k]{a_1\cdots a_{2k}}.$$

Para haver igualdade, devemos ter igualdade em todas as passagens. Então, deve ser

$$\frac{a_1+\cdots+a_k}{k} = \sqrt[k]{a_1\cdots a_k}, \qquad \frac{a_{k+1}+\cdots+a_{2k}}{k} = \sqrt[k]{a_{k+1}\cdots a_{2k}}$$

e

$$\frac{\sqrt[k]{a_1\cdots a_k} + \sqrt[k]{a_{k+1}\cdots a_{2k}}}{2} = \sqrt[2k]{a_1\cdots a_k a_{k+1}\cdots a_{2k}}.$$

Para as duas primeiras igualdades, devemos ter por hipótese que $a_1 = \cdots = a_k$ e $a_{k+1} = \cdots = a_{2k}$. Por fim, a última igualdade ocorre se e somente se $\sqrt[k]{a_1\cdots a_k} = \sqrt[k]{a_{k+1}\cdots a_{2k}}$, e esta condição, juntamente com as duas anteriores, implica que devemos ter $a_1 = \cdots = a_{2k}$. É também evidente que, se os números forem todos iguais, então a igualdade ocorre. Logo, por indução temos a desigualdade é verdadeira, com a condição para a igualdade dada no enunciado, sempre que n for uma potência de 2.

Agora, vamos mostrar que a desigualdade vale para todo n natural maior que 1 em geral, ocorrendo a igualdade se e somente se os números forem todos iguais. Para tanto, seja $n > 1$ natural e considere o maior k natural tal que $n \geq 2^k > n$. Aplicando a desigualdade entre as médias aos n números $a_1, a_2, \ldots, a_n$, juntamente com $2^k - n$ cópias do número $a = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$ (totalizando no $(2^k - n) = 2^k$ números), obtemos

$$\frac{a_1+\cdots+a_n+a+\cdots+a}{2^k} \geq \sqrt[2^k]{a_1 a_2\cdots a_n \cdot a^{2^k-n}} = \sqrt[2^k]{a_1 a_2 \cdots a_n} = a.$$

A partir daí, obtemos $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq 2^k a$, ou, ainda,

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}.$$

Para haver igualdade, segue da primeira parte que $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = a = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$. Em particular, todos os números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ devem ser iguais. Finalmente, é fácil ver que se esses números forem todos iguais, então haverá igualdade.

4.2 Prova de M.Q. ≥ M.A.

A relação entre diferentes tipos de médias é uma parte fundamental da matemática, especialmente no estudo das desigualdades. Uma das desigualdades clássicas é a que afirma que a média quadrática (M.Q.) de um conjunto de números é sempre maior ou igual à sua média aritmética (M.A.). Esse resultado pode ser demonstrado de diversas maneiras, sendo uma das abordagens mais elegantes a utilização da desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Prova: Basta aplicar $b_i = 1$, para todo $1 \leq i \leq n$. (com igualdade ocorrendo, portanto, se todos forem iguais) na desigualdade de Cauchy, dividir por n^2 e tirar raiz:

$$\left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right) \cdot \left(\frac{1+1+\cdots+1}{n}\right)^2 \geq (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

4.3 Utilidade em Triângulos Retângulos

Seja c o comprimento da hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos medem a e b. Prove que $a + b \leq c\sqrt{2}$.

Solução. A partir da prova de M.Q ≥ M.A, utilizaremos $n = 2$, tendo

$$\frac{a^2 + b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2.$$

Daí

$$\frac{c^2}{2} \geq \frac{(a+b)^2}{4} \Rightarrow a + b \leq c\sqrt{2}.$$

5 Problemas

Problema 1: Seja a, b, c números reais positivos. Prove que

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca.$$

Problema 2: Sejam a, b, c, d números reais positivos. Mostre que

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d} \geq \frac{64}{a+b+c+d}.$$

Problema 3: Sejam a, b, c os lados de um triângulo. Mostre que

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

(Romênia) Problema 4: Prove que

$$\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} \geq a + b + c,$$

quaisquer que sejam a, b, c reais positivos.

(IMO/1995) Problema 5: Sejam a, b e c reais positivos tais que $abc = 1$. Prove que:

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

6 Bibliografia

6.1 Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo (POTI)

6.2 Algebra do Zero ao IME ITA Cone Sul EGMO - Armando Barbosa

6.3 Tópicos de Matemática (IME-ITA-Olimpíadas) - Carlos A. Gomes e José Maria Gomes.