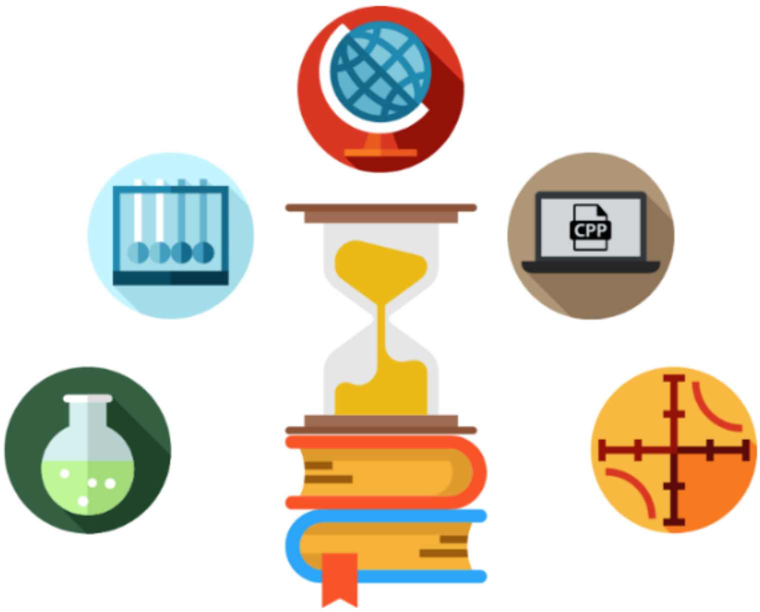
Fatorações e Produtos Notáveis

João Pedro de Almeida da Silva



1 Introdução

No ramo da álgebra, uma grande parte dos problemas demandam ideias espertas com incógnitas. Uma dessas ideias é a fatoração, que se resume a simplificar somatórios em produtos interessantes. Dentre tais produtos, vamos começar estudando alguns produtos notáveis.

2 Produtos notáveis

2.1 Quadrado da soma ou da diferença

- $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$
- $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$

Para provar todos os produtos que serão apresentados, basta fazer a propriedade distributiva da multiplicação.

Problema 1. Sejam a, b reais tais que $4a+b-ab+7 = a^2+ab+b^2+16-3(3-a)$. Determine os possíveis valores de $a+b$.

Solução.
Veja que a expressão é análoga a $4a+b-ab+7 = a^2+ab+b^2+16-9+3a$, basta fazer a distributiva em $-3(3-a)$. Assim, temos $4a+b-ab+7 = a^2+ab+b^2+7+3a$, o que implica $(4a-3a)+b+(7-7) = a^2+ab+ab+b^2$. Logo, o problema é se, e somente se $a+b = a^2+2ab+b^2$, mas sabemos que $a^2+2ab+b^2 = (a+b)^2$, então $a+b = (a+b)^2$, o que implica $a+b = 0$ ou $a+b = 1$ sendo os únicos valores possíveis para $a+b$.

Problema 2. (OCM) Prove que não existem inteiros positivos a e b tais que $\frac{a^2+a}{b^2+b}$=4.

Solução. Suponha que exista par (a, b) que resolva a equação. Temos então que $a^2+a = 4(b^2+b)$, então $a^2+a = 4b^2+4b$. Perceba que o lado direito da igualdade se assemelha bastante com o quadrado da soma $(2b+1)^2 = 4b^2+4b+1$, então seria interessante somar 1 em ambos os lados da igualdade, obtendo $a^2+a+1 = (2b+1)^2$. Assim, estamos afirmando que a^2+a+1 é um quadrado perfeito, o que não pode ser verdade, dado que $a^2 < a^2+a+1 < a^2+2a+1 = (a+1)^2$, ou seja, ele está entre dois quadrados consecutivos e é também um quadrado, absurdo! Logo, nossa suposição é falsa, fazendo com que não exista par (a, b) tal que $\frac{a^2+a}{b^2+b} = 4$.

2.2 Diferença de dois quadrados

- $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

Problema 3. Ache todos os pares (a,b) de inteiros positivos tais que $a^2 - b^2 = 116$.

Solução. Fazendo diferença de dois quadrados, temos $(a+b)(a-b) = 116$, que é um produto de dois números inteiros dando 116. Também, $(a+b) > (a-b)$, então basta realizar 3 casos:

1°) Se $a+b = 116$ e $a-b = 1$:

Somando as duas equações, descobrimos que $a+b+a-b = 117$, o que implica que $2a = 117$, $a = \frac{117}{2}$, que não é inteiro positivo, então tal caso não tem solução.

2°) Se $a+b = 58$ e $a-b = 2$:

Somando as duas equações, descobrimos que $a+b+a-b = 60$, então $2a = 60$, $a = 30$. Substituindo a, concluímos que $30 - b = 2$, então $b = 28$, encontrando apenas o par $(a,b) = (30,28)$ nesse 2° caso.

3°) Se $a+b = 29$ e $a-b = 4$:

Somando as duas equações, descobrimos que $a+b+a-b = 33$, o que implica que $2a = 33$, $a = \frac{33}{2}$, que não é inteiro positivo, então tal caso não tem solução.

Logo, finalizamos o problema com o par $(a,b) = (30,28)$.

Problema 4. (TM²/2024) Os números reais não nulos a,b,c são tais que $a^2 - bc = b^2 - ac = c^2 - ab = a^3 + b^3 + c^3$. Calcule os valores que $a+b+c$ assume.

Solução. Suponha que algum termo é distinto dos outros. S.P.G., faça $a \neq b$. Igualando a primeira equação dada, ficamos com $a^2 - bc = b^2 - ac$, então $a^2 - b^2 = bc - ac$. Fazendo diferença da dois quadrados, temos $(a+b)(a-b) = c(b-a) = -c(a-b)$, e como $a \neq b$, $a - b \neq 0$, então $a+b = -c$, $a+b+c = 0$.

Agora, suponha que todos os termos são iguais. Temos que $a^2 - bc = a^2 - a^2$, então $a^2 - bc = 0$. Como $a^2 - bc = a^3 + b^3 + c^3$, ficamos com $a^3 + b^3 + c^3 = 0$, onde $a = b = c$, então $3a^3 = 0$, o que ocorre apenas se $a = 0$, que não pode ocorrer, pois a,b,c são reais não nulos.

Assim, concluímos que o único valor para $a+b+c$ é 0.

2.3 Fatorações envolvendo cubo

- $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
- $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
- $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a+b)^3$
- $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a-b)^3$

Problema 5. Prove que se $a+b+c=0$, então $a^3+b^3+c^3=3abc$.

Solução. Como $a+b+c=0$, $a+b=-c$, então $(a+b)^3=(-c)^3$. Logo, temos $a^3+b^3+3ab(a+b)=-c^3$, mas $a+b=-c$, então $a^3+b^3+c^3=-3ab(a+b)=-3ab(-c)=3abc$, como queríamos.

Problema 6. Sejam a, b reais não nulos tais que $a^3+28b^3+3ab(a+b)=0$. Ache os possíveis valores de $\frac{a}{b}$.

Solução. Perceba que $a^3+3ab(a+b)+b^3+27b^3=(a+b)^3+(3b)^3=0$, então fatorando mais uma vez, $(a+4b)[(a+b)^2-3b(a+b)+9b^2]=0$. Assim, como tal produto resultou em 0, é preciso considerar 2 casos:

1°) Se $a+4b=0$:
Temos $a=-4b$, então $\frac{a}{b}=-4$.

2°) Se $(a+b)^2-3b(a+b)+9b^2=0$:
Perceba que temos uma equação do 2° grau em $a+b$, então fazendo bháskara, temos $a+b=\frac{3b\pm\sqrt{9b^2-36b^2}}{2}$, então $a=\frac{3b\pm\sqrt{-27b^2}}{2}$, que não pertence aos reais.

Portanto, os valores que $\frac{a}{b}$ pode assumir é -4.

2.4 Fatorações envolvendo potências à n-ésima

- $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$
- $a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \ldots - ab^{n-2} + b^{n-1})$

Uma observação importante é que a segunda fatoração só funciona para n ímpar, enquanto a primeira funciona para qualquer n inteiro positivo.

Problema 7. Prove que 125 divide $28^n - 3^n$ se, e somente se 5 divide n.

Solução. Temos que $28^n - 3^n = 25(28^{n-1} + \ldots + 3^{n-1})$. Olhando $(28^{n-1} + \ldots + 3^{n-1})$ no mód. 5, perceba que $(28^{n-1} + \ldots + 3^{n-1}) \cong 3^{n-1}n$ (mód. 5), então isso só é divisível por 5 se, e somente se 5 divive n. Assim, como $28^n - 3^n = 25(28^{n-1} + \ldots + 3^{n-1})$, concluímos que 25 sempre divide $28^n - 3^n$, mas 125 só divide se 5 divide n.

2.5 Outros produtos notáveis

- $xy + kx + ky + k^2 = (x+k)(y+k)$, com k sendo um inteiro conhecido
- $ky + kx - xy - k^2 = (k-x)(y-k)$, com k sendo um inteiro conhecido
- $a^4 + 4b^4 = (a^2 + 2ab + 2b^2)(a^2 - 2ab + 2b^2)$
- $a^4 + a^2 + 1 = (a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1)$

Problema 8. Determine os pares de inteiros positivos (m,n) que são soluções da equação $\frac{4}{m} + \frac{2}{n} = 1$.

Solução. O problema é se, e somente se $4n + 2m = mn$. Podemos somar -8 de ambos os lados para fatorar como $(m-4)(2-n) = -8$, e assim, como m,n são inteiros positivos, temos um produto de dois inteiros dando -8. Portanto, realizando alguns casos, concluímos que os possíveis pares $(m,n) = (12,3); (8,4); (6,6); (5,10)$.

Problema 9. Determine os pares de inteiros tais que a soma e o produto são iguais.

Solução. Queremos achar a,b tais que $a + b = ab$, ou seja, tais que $ab + 1 - a - b = 1$, que pela fatoração, é $(a-1)(b-1) = 1$. O produto só igual a 1 se $a-1$ e $b-1$ são $(1,1)$ ou $(-1,-1)$. Fazendo esses dois casos, concluímos com os pares ordenados $(a,b) = (2,2); (0,0)$.

Problema 10. Para $n > 1$, prove que $n^4 + 4^n$ é composto.

Solução. Se n é par, temos $n = 2k$, então precisamos mostrar que $16k^4 + 4^n$ é composto, o que é verdade, pois esse número é claramente maior que 4, dado que $4^{2k} > 4$, e o 4 divide tal número.

Para n sendo ímpar, $n = 2k+1$, basta fazer a fatoração $a^4 + 4b^4$, pois temos $n^4 + 4(2^k)^4$. Como esse número está sendo formado como multiplicação de dois outros inteiros maiores que 1, ele é composto.

2.6 Exercícios

Resolveremos agora alguns exercícios de fatoração, pois muitos problemas não cobram fatorações que são conhecidas, mas sim ideias espertas para fatorar a partir das fatorações estudadas anteriormente.

Problema 11. Fatore:
a) a^2-4a+3;
b) a^2-4a-5;
c) a^3+a^2-a-1;
d) $a^9b-a^3b^7$;
e) $a^2-4ab+4b^2+a-2b-2$;
f) $ab^2-bc-abc+c^2$;
g) $ab-3a-2b+6$;
h) $a^4+2a^2+4ab-4b^2+4b^4$;
i) $a^2+b^2-c^2-d^2+2ab-2cd$;
j) $a^{4k}+a^{2k}+1$.

3 Fatoração com divisão de polinômios

Dado um polinômio P(x)=$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x^1+a_0$ com suas raízes sendo $x_1,x_2,\ldots,x_n$, sabemos, pelo teorema fundamental da álgebra, que é possível fatorá-lo como $a_n(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$. Com isso, podemos utilizar esse fato para auxiliar nas fatorações.

Por exemplo, se o exercício e), $a^2-4ab+4b^2+a-2b-2$, fosse $a^2-4ab+4b^2+a-2b-1$, teríamos uma dificuldade para encontrar alguma maneira esperta de fatorar, pois com o 2, temos $(a-2b)^2+(a-2b)-2$, que pode ser feito uma diferença de quadrados inteligente, $(a-2b)^2-1+(a-2b)-1$=$(a-2b-1)(a-2b+1)+(a-2b-1)=(a-2b-1)(a-2b+2)$. Porém, trocando o 2 por 1, fica bem mais difícil de fatorar assim. Agora, sabendo que podemos fatorar a partir das raízes do polinômio, fatorar $a^2-4ab+4b^2+a-2b-1$ é bem simples, basta fazer Bháskara para descobrir as raízes de x^2+x-1, que são $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$, concluindo que $a^2-4ab+4b^2+a-2b-1=(a-2b-\frac{-1-\sqrt{5}}{2})(a-2b-\frac{-1+\sqrt{5}}{2})$.

4 Problemas propostos

Problema 1. Seja x um real tal que $x+\frac{1}{x}=5$. Calcule $x^4+\frac{1}{x^4}$.

Problema 2. (OCM) Determine todos os reais x,y,z satisfazendo a igualdade $3x^2+y^2+z^2=2xy+2xz$.

Problema 3. Encontre os inteiros n para os quais $4n^4 + 1$ é primo.

Problema 4. Sejam a, b reais tais que $a^3 - 3a^2 + 5a = 1$ e $b^3 - 3b^2 + 5b = 5$.
Calcule o valor de a+b.

Problema 5. (OBM/2010) Sejam a, b, c reais tais que a é diferente de b e $a^2(b+c) = b^2(a+c) = 2010$. Calcule $c^2(a+b)$.

Problema 6. (OBM/2006) Encotre todos os pares ordenados (x, y) de inteiros tais que
$x^3 - y^3 = 3(x^2 - y^2)$.

Problema 7. (SL IMO/2013) Prove que existem infinitos inteiros positivos n tais que o maior divisor primo de $n^4 + n^2 + 1$ é igual ao maior de $(n+1)^4 + (n+1)^2 + 1$.

Problema 8. Calcule o valor de:
$N = \frac{(10^4+324)(22^4+324)(34^4+324)...(2026^4+324)}{(4^4+324)(16^4+324)(28^4+324)...(2020^4+324)}$.

Bibliografia.
1. Polos olímpicos de treinamento intensivo
(POTI)

2. Art of problem solving
(AOPS)

3. Fatorações- 25° Semana Olímpica/Kellem Corrêa

4. Problemas malemolentes em álgebra- 27° Semana Olímpica/Davi Lopes