Marcação de ângulo - Parte 2

João Victor Silva dos Santos

1 Introdução

1.1 A técnica mais poderosa da Geometria Plana

Na parte 1 deste material, vimos que *Marcação de ângulo* é a técnica mais importante da geometria em olimpíadas, vimos algumas utilizações em problemas olímpicos, usando muita congruência para provar tudo e aprendendo ângulos em polígonos. Neste material vamos completar essa parte de marcação de ângulo, aprendendo ângulos na circunferência, alguns lemas e até um problema mostrando como usar trigonometria para descobrir um ângulo. Aproveitem o material!!

2 Ângulos na circunferência

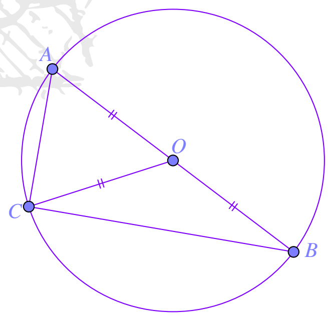
2.1 Ângulo central e inscrito

Apartir de agora, vamos entrar na parte da geometria que mais vai te ajudar a resolver problemas complicados: os ângulos em circunferência. Vamos explicar dois elementos básicos quando se trata de ângulos na circunferência: os ângulos centrais e os ângulos inscritos. Dado uma circunferência de centro O e tome A, B e C na circunferência, então o ângulo $\angle AOC$ é chamado de ângulo central e o ângulo ABC é o ângulo inscrito do arco $\widehat{AC}$ que não contém B.

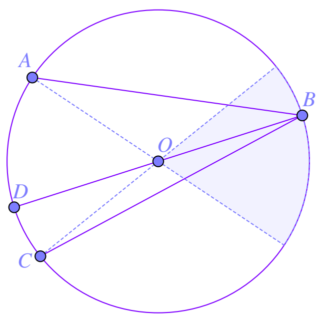
Teorema. O ângulo central é o dobro do ângulo inscrito.

Prova. A prova é dividida em 4 casos

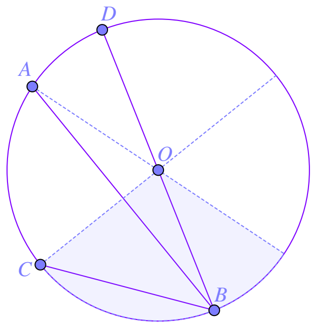
(1º caso) Os pontos A, O e B são colineares. Assim como $OB = OC$, então $\angle OBC = \angle OCB$ e pelo teorema do ângulo externo, $\angle AOC = \angle OBC + \angle OCB = 2\angle ABC$.



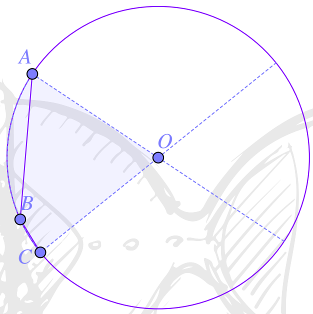
(2º caso) B está no semiplano diferente de A e de C em relação a CO e AO, respectivamente. Tome D para ser a segunda interseção de BO com a circunferência. Pelo primeiro caso, sabemos que $\angle AOD = 2\angle ABD$ e $\angle COD = 2\angle CBD$, assim, somando os dois, temos $\angle AOC = 2\angle ABC$.



(3º caso) B está no semiplano diferente de A em relação a CO mas está no mesmo semiplano que C em relação a AO. Tome D para ser a segunda interseção de BO com a circunferência, então pelo primeiro caso $\angle AOD = 2\angle ABD$ e $\angle COD = 2\angle CBD$, subtraindo a segunda da primeira, temos que $\angle AOC = 2\angle ABC$. Esse caso é analogo ao em que B está no semiplano diferente de C em relação a AO mas está no mesmo semiplano que A em relação a CO (só trocar A e C).



(4º caso) B está no mesmo semiplano que A e C em relação a CO e AO respectivamente. Esse caso é analogo ao segundo. ■

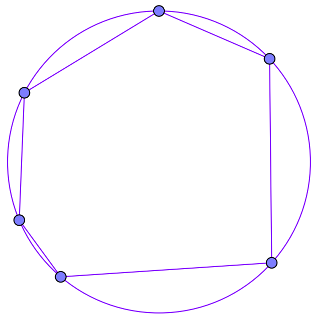
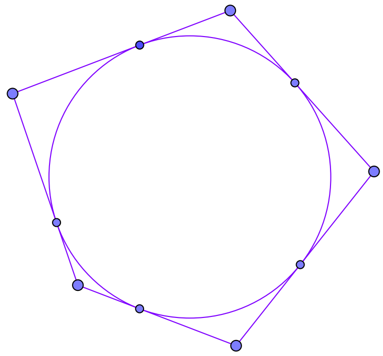


Dado isso, perceba que podemos variar B no arco maior e o ângulo vai continuar fixo, além disso, se tomar D no arco menor então vamos ter que $\angle ADC = \frac{\angle AOC}{2} = \frac{360-\angle COA}{2} = 180 - \angle ABC$, onde o primeiro ângulo central AOC é o relativo ao ângulo $\angle ADC$ e o segundo COA é relativo ao ângulo $\angle ABC$. Deste modo temos que se $ABCD$ é um quadrilátero dentro da circunferência, então a soma dos ângulos opostos é 180 e $\angle ABD = \angle ACD = \frac{\angle AOB}{2}$. Vimos que se um quadrilátero possui seus vértices na circunferência, ele satisfaz essas duas coisas, agora vamos provar que se um quadrilátero satisfaz alguma dessas duas propriedades, então seus vértices estão sobre uma mesma circunferência.

2.2 Quadriláteros cíclicos

Em geometria usamos muito sobre a inscrição e a circunscrição em um circulo. Dizemos que um polígono está circunscrito a uma circunferência se essa circunferência tangência todos os seus lados, se tal circunferência existe então **o polígono é circunscritível** e a circunferência é chamada de circunferência inscrita do polígono, ou seja, está de certo modo "dentro" do polígono.

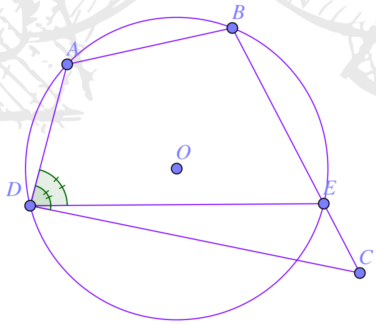
Dizemos ainda que um poligono está inscrito em um circulo se todos seus vértices estão sobre o circulo, nesse caso dizemos que **o polígono é incritível**, ou também chamado de **cíclico**, e a circunferência é a circunferência circunscrita do polígono, ou seja, a que está "fora" do polígono, e é esses que vamos trabalhar nesse material, ou melhor, com quadriláteros no lugar de um polígono qualquer. Abaixo temos um hexágono cíclico (6 pontos na circunferência) e um pentagono circumscritível (5 lados tangentes a uma circunferência).

Vale lembrar que todo 3 pontos definem uma circunferência, ou seja, dado 3 pontos quaisquer no plano e não colineares, existe uma única circunferência que passa por esses 3 pontos (para provar isso você pode provar a existência do circuncentro de um triângulo, pegando a interseção de duas mediatrizes e provando que está na terceira). Apartir de agora, você vai conhecer dois teoremas extremamentes potentes em geometria (provavelmente o que mais vai usar de forma direta), para finalmente aprender a manipular ângulos na circunferência.

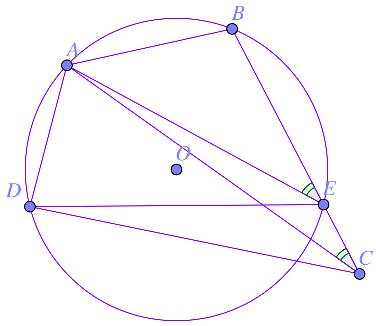
Teorema. Um quadrilátero é cíclico se, e somente se, a soma de seus ângulos opostos é 180.

Prova. Já provamos a volta, ou seja, se o quadrilátero é cíclico então a soma dos seus ângulos opostos é 180, agora iremos provar a ida, ou seja, se a soma for 180 então ele é cíclico. Suponha por absurdo que $ABCD$ tem $\hat{A}+\hat{C}=\hat{B}+\hat{D}=180$ e que ele não é cíclico, então tome E para ser a segunda interseção de (ABD) (circunferência que passa por A, B e D) com BC, então temos que $\angle BED = 180-\angle BAD = \angle BCD$ (pela volta), o que é um absurdo pois $\angle BCD = \angle BED + \angle CDE \Rightarrow \angle CDE = 0$ e $E = C$, absurdo! ■



Teorema. Um quadrilátero é cíclico se, e somente se, o ângulo entre um lado e uma diagonal é igual ao ângulo entre o lado oposto e a outra diagonal.

Prova. Já provamos a volta também, ou seja, se $ABCD$ é cíclico então $\angle ADB = \angle ACB$. Agora suponha que temos um quadrilátero tal que $\angle ADB = \angle ACB$ e ele não é cíclico, então tome E para ser BC interseção (ABD), então temos que $\angle ADB = \angle AEB = \angle ACB$, mas pelo teorema do ângulo externo, $\angle ACB = \angle AEB + \angle EAC \Rightarrow \angle EAC = 0$ e $E = C$, absurdo! ■

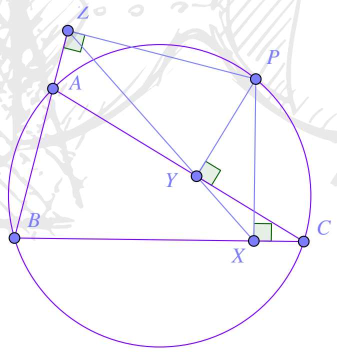


Apartir de agora, a força está com vocês, é importante que você tenha pegado bem essa parte pois vai ser um dos focos principais de todo o curso de geometria do AMPS. Inclusive, uma observação aqui é que não há maneiras convencionais para se provar que um polígono está em uma circunferência, geralmente quando é necessário, vamos pegando 3 pontos na circunferência e escolhemos um quarto para provar que também está nela, usando algum desses dois teoremas, assim provando um pentágono cíclico ou um n-ágono cíclico.

Vejamos alguns problemas para fixar mais essa ideia de ângulos na circunferência:

Exemplo 1. **(Reta de Simson)** Seja ABC um triângulo e P um ponto em (ABC). Seja X, Y e Z o pé das alturas de P em BC, CA e AB. Prove que os pontos X, Y e Z são colineares.

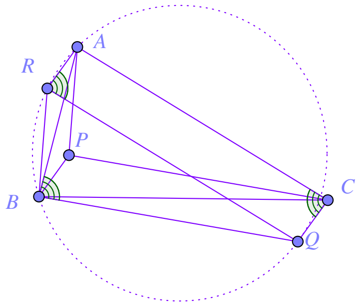
Solução.



Perceba que $\angle PYZ = \angle PAZ = 180 - \angle PAB = \angle PCB = \angle PCX = 180 - \angle PYX$, logo $\angle PYZ + \angle PYX = 180$, deste modo, X, Y e Z são colineares. ■

Exemplo 2. **(O primeiro lema da isogonalidade)** Seja ABC um triângulo e seja P um ponto no seu interior tal que $\angle ABP = \angle PCA$. Seja Q a reflexão de P pelo ponto médio de BC. Então $\angle BAP = \angle CAQ$

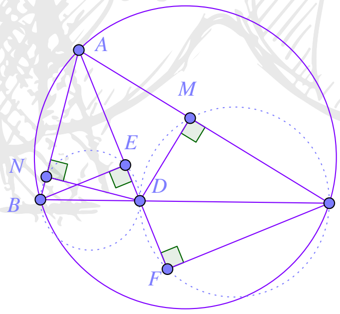
Solução. Essa questão geralmente é resolvida usando conta (coordenadas baricêntricas, por exemplo), porém existe uma solução um pouco "carteada" (cartear é geralmente usado quando é algo falso ou impreciso, do tipo dizer que alguém carteou um problema, mas nesse caso foi usado para implicar um ponto que foi tomado que não tem nenhuma motivação a princípio).



Tome R tal que $APBR$ é paralelogramo. Temos que $APBR$ e $PBQC$ são paralelogramos, então $RA = BP = CQ$ e $RA \parallel BP \parallel CQ$, assim $ARQC$ também é paralelogramo. Perceba que $\angle ACQ = \angle QBA$ pois $\angle PCQ = \angle QBP$ e $\angle ACP = \angle ABP$. Porém, $\angle ACQ = \angle QRA = \angle QBA$, logo $ARBQ$ é cíclico. Por fim, $\angle BAP = \angle ABR = \angle AQR = \angle CAQ$, logo AP e AQ são isogonais, ou seja, $\angle BAP = \angle CAQ$. ■

Exemplo 3. (Ibero 2002 Problema 4) Em um triângulo escaleno $\triangle ABC$, tome D no lado BC tal que AD é bissetriz de $\angle BAC$. Seja E e F, respectivamente, os pés das alturas de B e C em AD e seja M o ponto em AC tal que DM é perpendicular a AC. Prove que $\angle EMD = \angle DMF$.

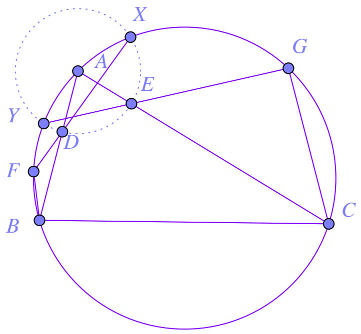
Solução. Essa foi a minha primeira questão da Ibero, e questão de internacional, que eu fiz. Apesar de ter feito com algumas dicas, lembro de ter ficado muito feliz de ter feito esse problema e impressionado como uma questão de uma internacional difícil, como a ibero, pode ser feito usando coisas simples, como marcação de ângulo. Se você quiser ter a mesma sensação que eu antes de ler a resposta, então tente um pouco esse problema.



A primeira coisa a se fazer é perceber que o problema é simétrico em B e C até pegar o M, em que o problema não pega seu analogo, então, o que vamos fazer é pegar o analogo dele. Tome N em AB tal que DN é perpendicular a AB. Note que $\angle DMC = \angle DFC = \angle DEB = \angle DNB$, logo $BE \parallel CF$ e $BNED$ e $CMDF$ são cíclicos. Pegar o N foi a primeira dica, a segunda foi perceber que M e N era simétricos em relação a AD, pois como $\angle DAM = \angle DAN$ e $\angle DNA = \angle DMA = 90$, então $\angle DNE = \angle DME$ (iremos ver essa ideia aparecendo varias vezes nesse material, você pode só perceber que os triângulos DME e DNE estão refletidos em AD, como se AD fosse um espelho que troca M por N). Agora, depois de perceber essas duas coisas, eu finalmente fiz o problema usando aquilo lá: marcação de ângulo. Temos então $\angle EMD = \angle DNE = \angle DHE = \angle CHE = \angle HC = \angle DCF = \angle DMF$, que era o que queriamos provar. ■

Exemplo 4. (IMO 2018 Problema 1) Seja Γ o circumcirculo de um triângulo acuntângulo $\triangle ABC$. Os pontos D e E estão no segmento AB e AC, respectivamente, tal que $AD = AE$. As mediatrizes de BD e CE intersectam os arcos menores AB e AC de Γ nos pontos F e G, respectivamente. Prove que as retas DE e FG são paralelas ou a mesma reta.

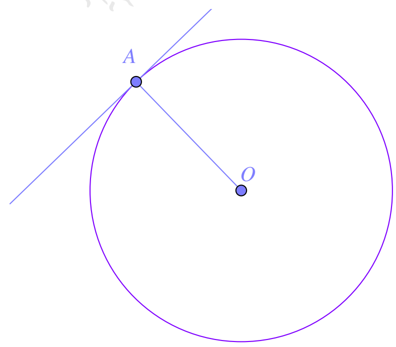
Solução.



Incialmente, vamos querer usar nosso teorema das retas paralelas, certo? Então para conseguir marcar melhor o ângulo externo de $\angle FDE$ e $\angle GED$, tome X e Y em Γ tal que X está em FD e Y em GE. Basta $\angle YED = \angle YGF$. Perceba que como $\angle ADX = \angle FDB = \angle FBD = \angle FBA = \angle FXA = \angle DXA$, então $AD = AX$, analogamente $AE = AY$, porém $AD = AE$, logo $XYDE$ é cíclico (essa é outra maneira de provar que 4 pontos são concíclicos, provar que existe um ponto equidistante desses 4). Assim, $\angle YED = \angle YXD = \angle YXF = \angle YGF$, portanto $DE \parallel FG$. ■

2.3 Tangentes

Já pensou o que aconteceria com uma reta AB com A e B na circunferência e se aproximando? Basicamente, no final resultaria em uma tangente, uma reta que intersecta a circunferência em apenas um ponto, o ponto de tangência. Aqui vamos usar a definição de que a tangente é uma reta que corta a circunferência em apenas um ponto. Vamos provar alguns lemas para você se encontrar mais próximos das tangentes:



Lema. Toda reta perpendicular a um raio na sua extremidade, é uma reta tangente a circunferência.

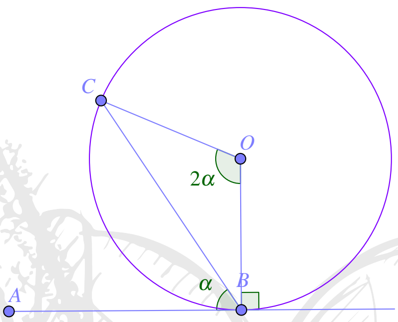
Prova. Inicialmente, traduzindo o lema, se você pegar qualquer ponto na circunferência (ponto na extremidade do raio), digamos o ponto A, então ao traçar a perpendicular por esse ponto ao raio AO (sendo O o centro da circunferência), essa reta vai ser a tangente. Bem, suponha que não seja, como ela já intersecta a circunferência no ponto A, vai haver um ponto B na circunferência também, com $B \neq A$, porém como $OA = OB$ e $\angle OAB = 90$, então $\angle OBA = 90$ e $\angle AOB = 0 \Rightarrow A = B$, absurdo!

Então a reta deve ser tangente. ■

Lema. Toda tangente a circunferência é perpendicular ao raio no ponto de tangência.

Prova. Esse é tipo, a volta do lema anterior, que basicamente faz uma bijeção entre cada ponto na circunferência e cada reta tangente. Tome A o ponto de tangencia, perceba que a distância de O até qualquer ponto na reta tangente diferente de A, é maior que o raio, pois todo ponto está fora da circunferência, assim OA é a menor distência de O até a tangente, assim OA é perpendicular a tangente no ponto de tangencia. ■

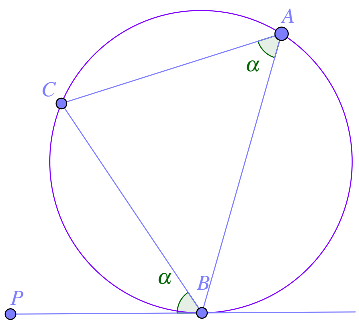
Definimos um ângulo de segmento para ser um ângulo que tem seu vértice na circunferência, um lado é tangente e o outro é secante, que nem temos na figura.



Lema. O ângulo de segmento é metade do ângulo central correspondente.

Prova. Temos que $\angle ABC = 90 - \angle OBC$, porém $\angle OBC = \angle OCB = \frac{180-\angle BOC}{2} = 90 - \frac{\angle BOC}{2} \Rightarrow \angle ABC = 90 - 90 + \frac{\angle BOC}{2} \Rightarrow \angle ABC = \frac{\angle BOC}{2}$ que era o que queriamos provar. ■

Lema. Se temos que $\angle PBC = \angle BAC$, então PB é tangente a circunferência (ABC).



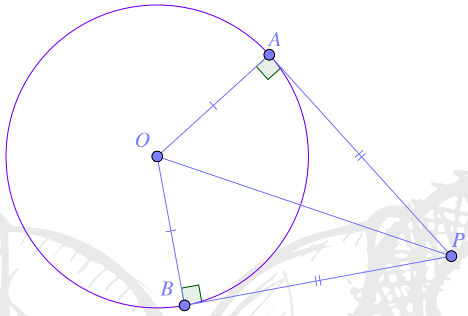
Prova. Essa é uma variação e aplicação do lema anterior que é geralmente usada. Tome o círculo que passa por B, por C e é tangente a PB (esse circulo existe, basta definir o centro para ser a interseção da mediatriz de BC com a perpendicular de B a PB), logo, pelo lema anterior, o lugar geometrico dos pontos X tal que $\angle PBC = \angle BXC$ é nessa circunferência (pois $\angle PBC$ é um ângulo fixo, e os pontos são os da circunferência por quadrilátero cíclico), pois esses ângulos medem a metade do ângulo central. Assim, como A satisfaz isso, temos que A está na circunferência tangente a PB, logo

PB é tangente a (ABC). ■

Perceba que para cada ponto fora do circulo, temos que duas retas tangentes passa por ele, ou melhor, podemos traçar duas tangentes por ele. Vamos agora usar essas ideias e algumas que aprendemos com triângulo para provar um teorema muito bom: O teorema do bico.

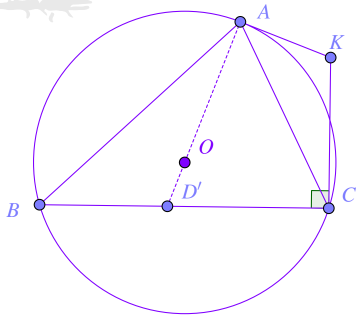
Teorema do Bico. Dado uma circunferência (O) (circunferência de centro O), seja um ponto P externo a circunferência, se PA e PB são tangentes com A e B na circunferência, então $PA = PB$.

Prova. Sabemos que $PA \perp AO$ e $PB \perp BO$, então temos que $\triangle PAO \equiv \triangle PBO$ por cateto-hipotenusa, dado que $\angle PAO = 90 = \angle PBO$, $OA = OB$ e $PO = PO$, assim $PA = PB$ e além disso, PO é mediatriz de AB, dado que tanto P quanto O estão na mediatriz de AB. ■



Exemplo 5. Seja ABC um triângulo acutângulo de centro O, e tome K para ser um ponto tal que KA é tangente a (ABC) e $\angle KCB = 90$. O ponto D está em BC tal que $KD \parallel AB$. Prove que a reta DO passa por A.

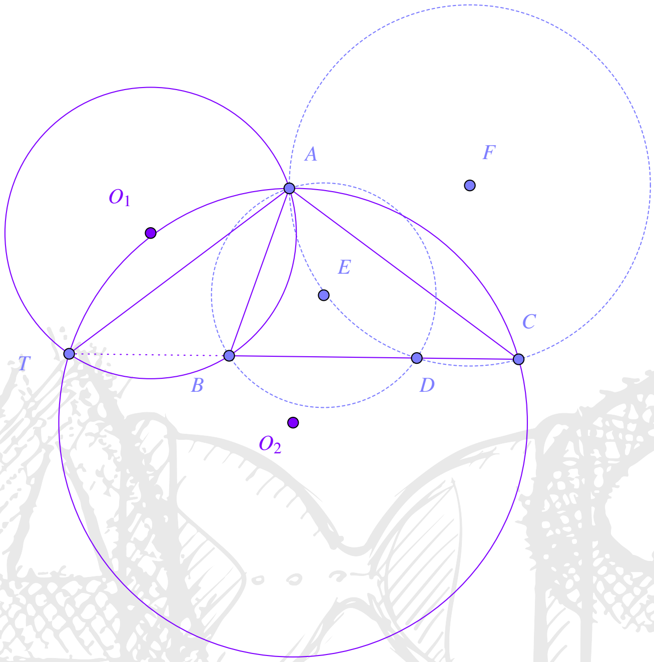
Solução.



Esse problema usa uma tecnica muito legal chamada ponto fantasma. Moralmente o que vamos fazer é pegar outro ponto e provar que é o mesmo ponto (é um ponto fantasma, ele tá ali mas ele não existe). Para isso, tome D' a interseção de AO com BC, vamos provar $D = D'$. Como AK é tangente, então $90 = \angle OAK = \angle D'AK = \angle D'CK$, logo $D'AKC$ é cíclico e $\angle CBA = \angle CAK = \angle CD'K$, logo $D'K \parallel BA$ e o único ponto em BC que satisfaz isso é o D, logo $D = D'$ e DO passa por A. ■

Exemplo 6. (OBM 2024 Nível 3 Problema 4) Seja ABC um triângulo acutângulo e escaleno. Seja D um ponto no interior do segmento BC tal que D é diferente do pé da altura por A. As retas tangentes por A e B à circunferência circunscrita ao triângulo ABD se encontram em O_1 e as retas tangentes por A e C à circunferência circunscrita ao triângulo ACD se encontram em O_2. Mostre que a circunferência de centro O_1 que passa por A, a circunferência de centro O_2 que passa por A e a reta BC têm um ponto em comum.

Solução.



Tome T o encontro das circunferências centradas em O_1 e O_2 que passam por A e seja E e F os centros de ADB e ADC, respectivamente. Suponha sem perda de generalidade que $AB < AC$, então se $\angle ATB = \alpha$, então $\angle AO_1B = 2\alpha \Rightarrow \angle O_1BA = \angle O_1AB = 90 - \alpha \Rightarrow \angle BAE = \alpha$ pois O_1A é tangente a (ABD), logo como $\angle EAB = \angle EBA = \alpha \Rightarrow \angle AEB = 180 - 2\alpha$ e $\angle ADB = 90 - \alpha \Rightarrow \angle AFC = 180 - 2\alpha$, assim $\angle FAC = \angle FCA = \alpha$, porém $\angle FAC$ é ângulo de segmento, assim $\angle ATC = \alpha = \angle ATB$. Portanto, T, B e C são colineares. ■

3 Um pouco de trigonometria

Alerta!! Essa seção vai requer um pouco de conhecimentos de trigonometria, se você ainda não sabe, prossiga para a proxima seção e volte aqui futuramente. Bem, se você quiser encarar, nessa seção vamos comentar um pouco que você consegue sim usar trigonometria para marcar ângulo, ou melhor, igualdade de ângulo, por exemplo, se você concluir que dois senos são iguais e os ângulos deles estão no intervalo $[0, 90]$, então você sabe que o ângulos de dentro deles são iguais. Por exemplo, provar a volta dos teoremas das bissetrizes (interna e externa), que se existe um ponto D na reta BC do triângulo ABC tal que $\frac{DB}{AB} = \frac{DC}{AC}$, então D é o pé da bissetriz interna ou externa.

Você pode fazer duas leis do senos no triângulo $\triangle DAB$ e $\triangle DAC$ e temos $\frac{\sin \angle DAB}{\sin \angle ADB} = \frac{DB}{AB}$ e $\frac{\sin \angle DAC}{\sin \angle ADC} = \frac{DC}{AC}$ e como $\sin \angle ADB = \sin \angle ADC \neq 0$, pois $0 < ADC, ADB < 180$, então $\sin \angle DAB = \sin \angle DAC$ e como $0 < \angle DAB, \angle DAC < 180$, então $\angle DAB = \angle DAC$ (bissetriz interna) ou $\angle DAB = 180 - \angle DAC$ (bissetriz externa).

Também podemos usar uma técnica muito poderosa para marcar ângulos, em que não é necessário fazer tantos casos, podemos usar o **truque das cotangentes**, ou melhor, o que usamos na prova disso.

3.1 Truque das cotangentes

Truque das cotangentes. Seja $0 \leq a, b, c, d \leq 180$ com $a+b=c+d$ e $\text{sen}(a+b) \neq 0$, então

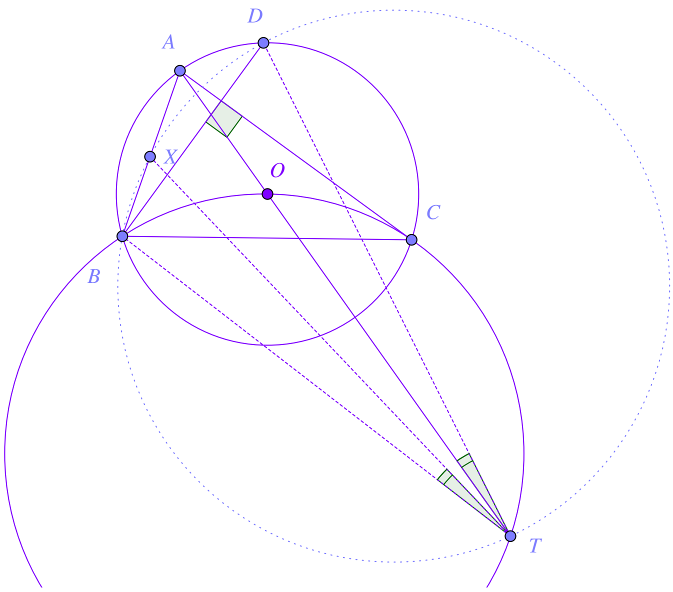
$$\frac{\text{sen } a}{\text{sen } b} = \frac{\text{sen } c}{\text{sen } d} \iff a = c \text{ e } b = d$$

Prova. A volta é imediata, agora suponha $a+b=c+d=k$, então $\frac{\text{sen } a}{\text{sen } b} = \frac{\text{sen } c}{\text{sen } d} \Rightarrow \frac{\text{sen } (k-b)}{\text{sen } b} = \frac{\text{sen } (k-d)}{\text{sen } d} \Rightarrow \frac{\text{sen } k \cdot \cos b - \text{sen } b \cdot \cos k}{\text{sen } b} = \frac{\text{sen } k \cdot \cos d - \text{sen } d \cdot \cos k}{\text{sen } d} \Rightarrow \text{sen } k \cdot \text{cotg } b = \text{sen } k \cdot \text{cotg } d$, onde $\text{cotg } x = \frac{\cos x}{\text{sen } x}$. Agora, como $\text{sen } (a+b) = \text{sen } k \neq 0$, então $\text{cotg } b = \text{cotg } d$, e agora vem a chave, que como cotg é injetiva em $[0, 180]$, então $b = d$ e consequentemente $a = c$. ■

A ideia da injetividade da cotangente é muito forte, por exemplo, se você quer provar dois ângulos iguais, mas você só sabe calcular os senos, os cossenos e sabe que é menor que 180, então basta provar que a cotangente desses dois ângulos são iguais, e você geralmente sabe calcular cotangentes de ângulos esquisitos porém calculáveis. Vamos resolver uma questão que caiu recentemente no teste IMO de 2024 do Brasil e que foi o G5 da shortlist de 2023.

Exemplo 7. (G5 IMO Shortlist 2023) Seja ABC um triângulo com circunferência circunscrita ω e circuncentro O. Os pontos $D \neq B$ e $E \neq C$ estão sobre ω tal que $BD \perp AC$ e $CE \perp AB$. As retas CO e AB se intersectam em X e as retas BO e AC se intersectam em Y. Prove que as circunferências circunscritas aos triângulos BXD e CYE tem um ponto de interseção sobre a reta AO.

Solução de Enzo Holanda Sampaio.



Inicialmente, defina o raio de ω para ser $\frac{1}{2}$ e $\hat{A}=\alpha$, $\hat{B}=\beta$ e $\hat{C}=\theta$ para facilitar a conta. Inicialmente, dado uma figura boa com régua e comparso, é conjecturavel que o ponto de interseção vai ser o encontro de (BOC) com AO, deste modo, chame esse ponto de T, assim, basta provar $TDXB$ cíclico (o outro é analogo). Note que é se e somente se $\angle XBD=\angle XTD$, porém $\angle XBD=90-\alpha$ e como $\angle BOC=2\alpha \Rightarrow \angle BCO=\angle CBO=90-\alpha$, logo basta $\angle BTO=\angle DTX$, ou seja, basta $\angle BTX=m=\angle DTA=n$ e isso acaba o problema. Agora que a parte de marcação de ângulo foi feita, para provar a igualdade de dois ângulos, iremos usar cotangentes. Então, como cotangentes é injetiva em $[0,180]$, basta $\text{cotg } m=\text{cotg } n$, daí apartir daqui é só fazer conta.

Por ceviana qualquer no $\triangle ABC$ e ceviana CX temos $\frac{AX}{AB}=\frac{AC}{CB}\cdot\frac{\text{sen }(90-\beta)}{\text{sen }(90-\alpha)} \iff \frac{AX}{XB}=\frac{\text{sen }\beta\cos\beta}{\text{sen }\alpha\text{sen }\alpha}(01)$, por ceviana qualquer no $\triangle ABT$ e ceviana XT temos $\frac{AX}{XB}=\frac{AT}{TB}\cdot\frac{\text{sen }([90-\alpha]-m)}{\text{sen } m}(02)$. Igualando (01) e (02): $\frac{\text{sen }\beta\cos\beta}{\text{sen }\alpha\text{sen }\alpha}=\frac{AT}{TB}\cdot\frac{\text{sen }([90-\alpha]-m)}{\text{sen } m}$, porém por lei dos senos no $\triangle ATB$, $\frac{AT}{TB}=\frac{\text{sen }(\alpha+\theta)}{\cos\theta}=\frac{\text{sen }\beta}{\cos\theta}$, logo $\frac{\text{sen }\beta\cos\beta\cos\theta}{\text{sen }\alpha\cos\alpha\text{sen }\beta}=\frac{\text{sen }(90-\alpha)\cos m}{\text{sen } m}-\frac{\text{sen } m\cos(90-\alpha)}{\text{sen } m} \iff \frac{\text{sen }\beta\cdot\cos\theta}{\text{sen }\alpha\cdot\cos\alpha}+\text{sen }\alpha=\cos\alpha\cdot\text{cotg } m \iff$ $\boxed{\text{cotg } m=\frac{\frac{\text{sen }\beta\cdot\cos\theta}{\text{sen }\alpha\cdot\cos\alpha}+\text{sen }\alpha}{\cos\alpha}}$.

Por lei dos senos no $\triangle ADT$: $\frac{AT}{AD}=\frac{\text{sen }(\alpha+n)}{\text{sen } n} \iff \frac{AT}{\cos\alpha}=\frac{\text{sen }\alpha\cdot\cos n}{\text{sen } n}+\frac{\text{sen } n\cdot\cos\alpha}{\text{sen } n} \iff \frac{AT}{\cos\alpha}=\text{cotg } n\cdot\text{sen }\alpha+\cos\alpha \iff \boxed{\text{cotg } n=\frac{\frac{AT}{\cos\alpha}-\cos\alpha}{\text{sen }\alpha}}$. Porém, note que por lei dos senos no $\triangle ABT$: $\frac{AT}{AB}=\frac{\text{sen }(\alpha+\theta)}{\text{sen }(90-\alpha)} \Rightarrow \boxed{AT=\frac{\text{sen }\beta\cdot\text{sen }\theta}{\cos\alpha}}$, substituindo, temos que $\boxed{\text{cotg } n=\frac{\frac{\text{sen }\beta\cdot\text{sen }\theta}{\cos^2\alpha}-\cos\alpha}{\text{sen }\alpha}}$.

Agora, por fim, basta igualar as duas cotangentes e provar que é verdade. Basta

$$\frac{\frac{\text{sen }\beta\cdot\cos\theta}{\text{sen }\alpha\cdot\cos\alpha}+\text{sen }\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{\text{sen }\beta\cdot\text{sen }\theta}{\cos^2\alpha}-\cos\alpha}{\text{sen }\alpha} \iff$$
$$\frac{\cos\beta\cdot\cos\theta}{\cos\alpha}+\text{sen}^2\,\alpha=\frac{\text{sen }\beta\cdot\text{sen }\theta}{\cos\alpha}-\cos^2\alpha \iff$$
$$1+\frac{\cos\beta\cdot\cos\theta}{\cos\alpha}=\frac{\text{sen }\beta\cdot\text{sen }\theta}{\cos\alpha} \iff$$
$$\cos\alpha=-\cos(\beta+\theta)=\text{sen }\beta\cdot\text{sen }\theta-\cos\beta\cdot\cos\theta$$

que é verdade. Assim temos $m=n$ e $DXBT$ cíclico. ■

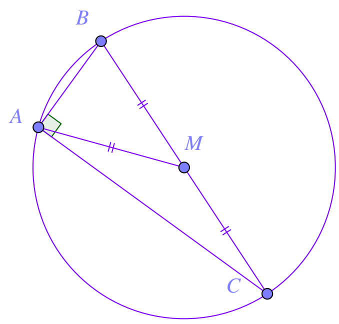
Ah, uma pequena observação é que na solução tivemos muito senos e cossenos de α, β e θ dividindo e cortando, e como o triângulo é acutângulo, temos $\cos\alpha$, $\cos\beta$ e $\cos\theta$ diferentes de 0 e como α, β e θ estão entre 0 e 180, então $\text{sen }\alpha$, $\text{sen }\beta$ e $\text{sen }\theta$ também são diferentes de 0. É só uma observação para ver que está certa sim a conta e não teve nenhum problema. Bem, a ideia desse problema é literalmente marcar ângulo, chegar que eles precisam ser iguais e pensar em cotangentes para provar dois ângulos iguais, depois é só fazer conta que ele saí. Ai está um exemplo de uma questão que sai com trigonometria e você usa muito a ideia de ângulos que você quer que sejam iguais.

4 Lemas úteis

Nessa nossa última seção, vou passar alguns lemas, truques e sacadas que vai ajudar muito principalmente na resolução de problemas, alguns deles são mais úteis que outros, mas todos tem uma valiosa lição, por isso, tente provar cada um dos lemas antes de ler a prova, você vai colocar em prática tudo que vimos até aqui. Vamos usar essa parte varias vezes durante os materiais futuros, assumindo que vocês leram tudo e aprenderam esses lemas.

Lema. Um triângulo $\triangle ABC$ é retângulo em A, ou seja, $\angle BAC = 90$, se e somente se seu circuncentro está em BC. De modo geral, se M é ponto médio da hipotenusa BC de um triângulo $\triangle ABC$, então $MA = MB = MC$.

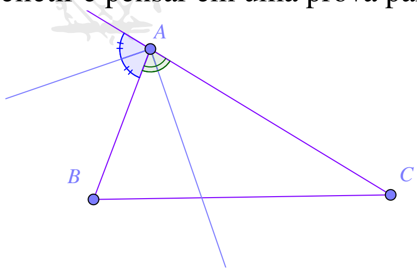
Prova.



Já vimos esse problema na primeira parte, mas vou colocar aqui novamente porque ele é bem importante e é bom aprender, porém, desta vez vamos provar usando ângulo central e inscrito. Para a Ida ($\Rightarrow$) se o circuncentro está em BC, chame ele de O, logo $\angle BOC = 180$, então $\angle BAC = 90$ pois é metade do ângulo central. E para a Volta ($\Leftarrow$) tome O o circuncentro de ABC, como $\angle BAC = 90$, então $\angle BOC = 180$ pois o ângulo central é o dobro do inscrito. Deste modo B, O e C são colineares. ■

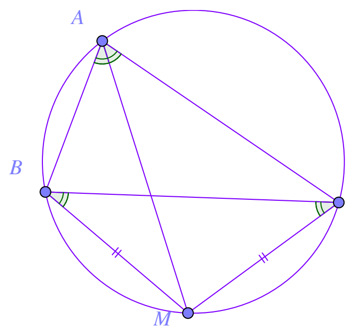
Lema. A bissetriz interna e a bissetriz externa de um mesmo ângulo são perpendiculares.

Prova. Fica a cargo do leitor refletir e pensar em uma prova para isso.



Lema. A bissetriz de A toca no ponto médio do arco BC.

Prova.



Tome M para ser a interseção da bissetriz interna por A com a circunferência, dado que $ABMC$ é cíclico, então $\angle MAB = \angle MCB$ e $\angle MAC = \angle MBC$, porém $\angle MAB = \angle MCB$, pois M está na bissetriz. Assim $\angle MBC = \angle MCB \Rightarrow M$ é ponto médio do arco BC que não contem A. ■

Tente provar que a interseção da bissetriz externa com a circunferência é o ponto médio do arco BC que contêm A usando esse mesmo raciocinio, ou seja, bissetriz interna intersecta no ponto médio do arco que não contêm A e a bissetriz externa intersecta no ponto médio do arco que contêm A.

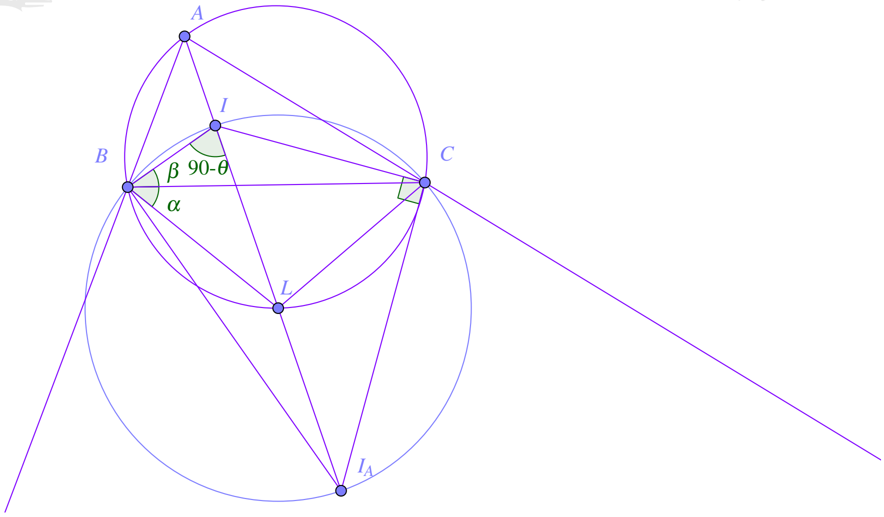
Teorema do Incentro/Ex-incentro. Seja I o encontro das bissetrizes internas de um triângulo $\triangle ABC$, esse ponto é chamado de **incentro** do triângulo. Seja L a interseção de AI com (ABC), com $L \neq A$. Seja I_A a reflexão de I por L, esse ponto é o **ex-incentro de** A. Então

- Os pontos I, B, C e I_A estão em um mesmo circulo de diametro II_A e centro L.
- As retas BI_A e CI_A são bissetrizes externas do $\triangle ABC$.

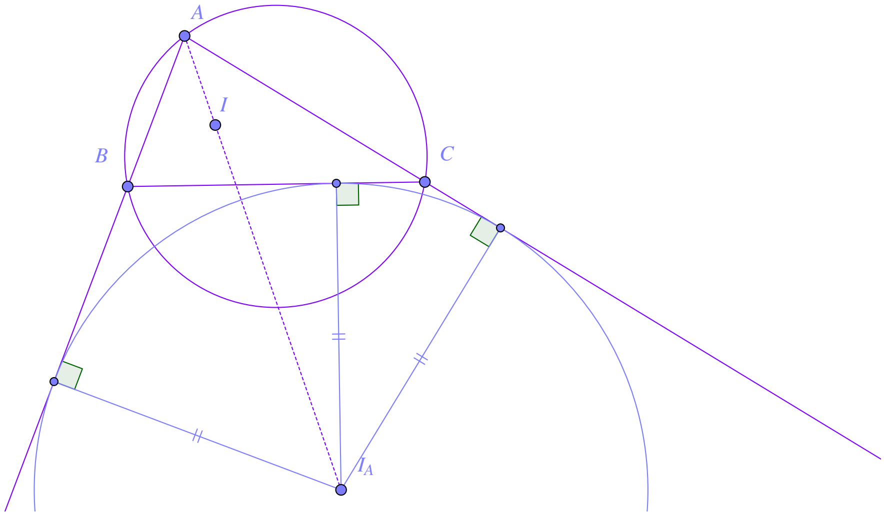
Prova. Vamos primeiro so recapitular do porque o incentro existe: Em um triângulo, um ponto está na bissetriz se e somente se a distância dele para os lados são iguais, então se I for o encontro da bissetriz de $\hat{A}$ e $\hat{B}$, então a distância de I até AC é igual a distância dele até AB e a distância até AB é a mesma até BC, logo a distância dele até BC e AC é a mesma, então está na bissetriz de $\hat{C}$ também.

Agora, vamos provar $LI = LB$, isso prova a primeira parte pois, analogamente, $LC = LI$ (isso também prova nosso lema anterior, pois L é o ponto médio do arco), e $LI = LI_A$. Note que se $\hat{A} = 2\alpha$, $\hat{B} = 2\beta$ e $\hat{C} = 2\theta$, com $\alpha + \beta + \theta = 90$, então $\angle LBI = \alpha + \beta = 90 - \theta$ pois $\angle LBC = \angle LAC = \alpha$ e como $\angle BLI = \angle BLA = \angle BCA = 2\theta$, assim $\angle LIB = 180 - (90 - \theta) - (2\theta) = 90 - \theta = \angle LBI$, logo $LB = LI$ e a primeira parte tá feita.

Agora, como II_A é diametro, $\angle I_ABI = 90$ e $\angle I_ABC = 90 - \beta$, pois $\angle IBC = \beta$, logo BI_A é bissetriz externa pois $\angle I_ABC$ é metade do ângulo externo de $\hat{B}$ e analogamente para CI_A. ■



Um funfact sobre o ex-incentro é que, como ele está na bissetriz externa de B e de C, a distância dele até AB é igual a distância dele até BC, que por sua vez é igual a distância dele até AC, logo existe um circulo com centro em I_A que tangência AB e CA externamente e BC internamente (internamente e externamente eu digo dentro e fora do segmento), esse circulo é chamado de **ex-incirculo de** A. Você define os ex-incentros e ex-incirculos de B e C de forma analoga.



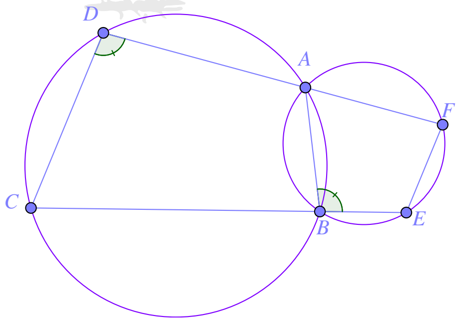
Lema. Seja I o incentro de um triângulo $\triangle ABC$, então $\angle BIC = 90 + \frac{\hat{A}}{2}$.

Prova. Esse lema é bem bom, principalmente quando você quiser marcar ângulos com o incentro rapidamente. Note que $\angle BIC = 180 - \angle IBC - \angle ICB = 180 - \frac{\hat{B}}{2} - \frac{\hat{C}}{2} = 180 - (90 - \frac{\hat{A}}{2}) = 90 + \frac{\hat{A}}{2}$. ■

O seguinte teorema é muito parecido com o teorema do ângulo externo pois basicamente serve para ajudar você a ver as coisas, nesse caso, ver ciclicidade ou paralelismo.

Teorema de Reim. Se $ABCD$ e $ABEF$ forem cíclicos, com C, B e E colineares, assim como D, A e F, então DC é paralelo a EF.

Prova.



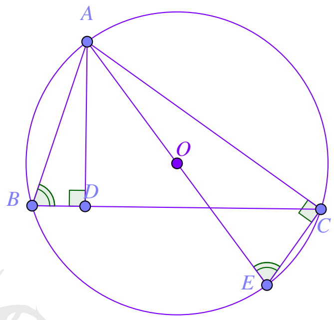
A prova disso é muito simples, temos que $\angle CDF = \angle CDA = 180 - \angle ABC = \angle ABE = 180 - \angle AFE = 180 - \angle DFE$, assim como $\angle CDF + \angle DFE = 180$, então DC é paralelo a EF. ■

Perceba que está não é nenhuma congruência ou ideia mirabolante (do tipo, nada que você não conseguiria ver facilmente marcando ângulo) porém ajuda muito a mexer com paralelismo dentro de uma circunferência. Podemos generalizar esse argumento para vários círculos com pontos sobre uma mesma reta.

Dizemos que duas retas a e c são **antiparalelas** em relação a duas retas b e d se o quadrilátero formado pela interseção delas, é cíclico (ou seja, $a \cap b$, $c \cap b$, $a \cap d$ e $c \cap d$ estão sobre a mesma circunferência). Defina por r a reta que passa por A, D e F e defina s a reta que passa por C, B e E, então temos que as retas AB e CD são antiparalelas em relação a r e s, além disso AB e EF também são antiparalelas em relação a r e s, então o que reim diz é que a antiparalela da antiparalela de alguma reta, é paralela a essa mesma reta. Além disso, temos que ao variar a antiparalela de a, as interseções ainda serão cíclicas.

Lema. Seja H e O o ortocentro (encontro das alturas) e o circuncentro do triângulo ABC, respectivamente, então $\angle BAH = \angle CAO$.

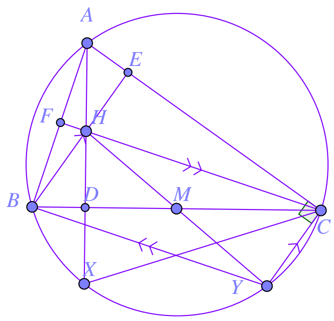
Prova.



Seja D o pé da altura de A e E a antípoda de A na circunferência (ABC). Note que $\angle ABD = \angle ABC = \angle AEC$ e $\angle ADB = 90 = \angle ACE$, assim os triângulos $\triangle ABD$ e $\triangle AEC$ são semelhantes e $\angle BAH = \angle BAD = \angle EAC = \angle OAC$, que era o que queriamos provar. ■

Lema. Seja H o ortocentro do triângulo $\triangle ABC$ e M o ponto médio de BC. Tome X o reflexo de H por BC e Y o reflexo de H por M, então tanto X quanto Y vão ter que estar em (ABC), e ainda mais, Y é antípoda de A.

Prova.



Inicialmente, vamos ver algumas definições para exclarecimento: A reflexão de um ponto P por uma reta r é um ponto P' tal que r é mediatriz de PP' (você pode traçar a altura de P até a reta e depois refletir por esse pé da altura), a reflexão de um ponto P por um ponto Q é um ponto P' tal que Q é ponto médio de PP', por fim, a antípoda de um ponto P em uma circunferência, é o ponto diametralmente oposto a P, ou seja, a segunda interseção da reta que liga P ao centro da circunferência com ela mesma.

Agora, tome D, E e F os pés das alturas de A, B e C, respectivamente. Note que como BC é mediatriz de HX, então $\angle BXA = \angle BXH = \angle BHX = \angle BHD = 90 - \angle HBD = 90 - \angle EBC = \angle BCE = \angle BCA$, logo como $\angle BXA = \angle BCA$, então X está em (ABC).

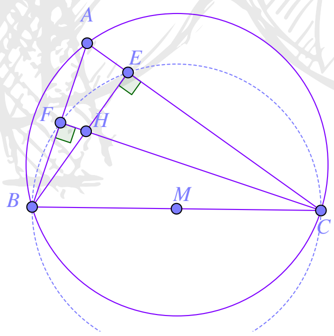
Note que como M é ponto médio de BC e de HY, então $BHCY$ é um paralelogramo, e como BH é perpendicular a AC, então CY é perpendicular a AC pois $BH \parallel CY$, logo $\angle YCA = 90$ e analogamente, $\angle YBA = 90$, como $\angle YCA + \angle YBA = 180$, temos que Y está em (ABC) e como $\angle YCA = 90$, então Y é antípoda de A. ■

Lema. Um trapézio é isósceles se, e somete se, ele for cíclico.

Prova. Ida ($\Rightarrow$) tome $ABCD$ um trapézio cíclico com AB paralelo a CD, note que $\angle ABC = 180 - \angle BCD$ pelo paralelismo, porém $\angle ABC = 180 - \angle ADC$, logo $\angle ADC = \angle BCD$ e $\angle ABC = \angle BAD$. Perceba do porque essas condições de ângulo são suficientes para o trapézio ser isósceles, ou seja, $AD = BC$ (uma das formas é prolongando AD e BC até se encontrarem e formarem dois triângulos isósceles, ou você pode tentar baixar a altura que nem fizemos no último lema de quadrilateros na parte 1). Volta ($\Leftarrow$) tome $ABCD$ agora para ser um trapézio isósceles, como provamos no material anterior que $\angle BCD = \angle ADC$, então $\angle ABC = 180 - \angle BCD = 180 - \angle ADC$, logo $ABCD$ é cíclico. ■

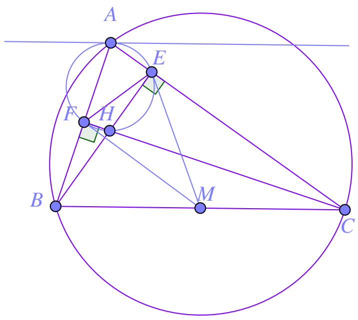
Lema. Seja E e F os pés das alturas de B e C em AC e AB, respectivamente. Temos que E, F, B e C são concíclicos com o centro sendo o ponto médio de BC.

Prova. Tente provar esse lema também, uma dica: use o primeiro lema útil.



Lema. Defina E e F os pés das alturas de B e C, respectivamente. Defina também M o ponto médio de BC. Então, ME, MF e a paralela por A a BC são tangentes a (AEF).

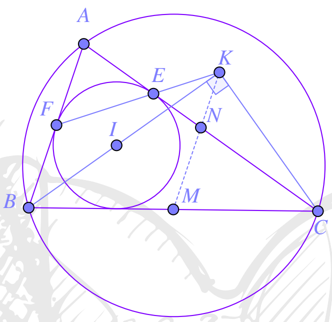
Prova.



Esse aqui é um lema um pouco mais sofisticado, então defina H o ortocentro e D o pé da altura de A. Perceba que H está em (AEF) pois $\angle HEA = \angle HFA = 90$. Inicialmente vamos provar $\angle MEF = \angle EAF$, pois pelo lema do ângulo de segmento, temos ME tangente e analogamente, MF tangente a (AEF). Note que, usando o lema anterior, $90 - \hat{A} = \angle ABE = \angle FBE = \frac{1}{2}\angle FME = 90 - \angle MEF$, logo $\angle MEF = \angle EAF = \hat{A}$. Assim ME e MF são tangentes a (AEF), e como $\angle HEA = \angle HFA = 90$, o centro de (AEF) é o ponto médio de AH, chame de N, e como $AN \perp BC$, então AN é perpendicular a paralela a BC por A, que assim deve ser tangente. ■

Lema da Camisa / Lema do Iran. (Não me pergunte do porque no Brasil é conhecido como lema da camisa) O incírculo, de centro I, de um triângulo $\triangle ABC$ é tangente a BC, CA e AB em D, E e F, respectivamente. Seja M e N os pontos médios de BC e AC, respectivamente. A reta BI toca EF em K. Então $BK \perp CK$ e K está em MN.

Prova.



Esse aqui é outro lema bem complicado, não muito útil e raramente usado, porém, é legal aprender e tentar provar por marcação de ângulo. Note que se $\hat{A} = 2\alpha$, $\hat{B} = 2\beta$, então $\hat{C} = 180 - 2\alpha - 2\beta$. Como $AE = AF$ pelo teorema do bico e $\angle EAF = 2\alpha$, então $\angle AEF = \angle AFE = 90 - \alpha$ e $\angle BFK = 90 + \alpha$. Como $\angle FBK = \beta$, então $\angle BKF = \angle IKE = 180 - (90 + \alpha + \beta) = 90 - \alpha - \beta = \angle ICE$, assim $EKCI$ é cíclico e como $\angle CEI = 90$, então $\angle CKI = \angle CKB = 90$. Agora note que $MB = MC = MK$ e $\angle MKB = \angle MBK = \angle KBA = \beta$, logo $MK \parallel AB$, assim K está na base média de AB. ■

Além de todos esses lemas, existe muitooo resultado legal que conseguimos usando esses lemas e marcação de ângulo, porém, essas são as mais legais, que eu achei mais úteis e que praticam bem o que vimos até aqui.

5 Problemas

Por último, chegamos na parte mais importante do nosso material: os problemas propostos. Pensem em muitos dos problemas, tentem aplicar os lemas aqui ensinados, use problemas anteriores e ideias aqui mostradas para fazer os problemas. Os problemas não usam apenas ideia desse material, usa algumas ideias mostradas anteriormente também.

Espero que tenham gostado do material, aproveitem muito e qualquer dúvida ou observação, podem me mandar um e-mail: joaovssantos1003@gmail.com. Fiquem agora com os problemas propostos :)

Problema 1. (3º Teste Cone Sul 2023 Problema 1) Um quadrilátero $ABCD$ está inscrito em um círculo e o comprimento do lado AD é igual a soma dos comprimentos dos lados AB e CD. Prove que as bissetrizes dos ângulos $\angle ABC$ e $\angle BCD$ se intersectam em um ponto sobre o lado AD.

Problema 2. (G1 IMO Shortlist 2010) Seja ABC um triângulo acutângulo com D, E e F os pés das alturas em BC, CA e AB, respectivamente. Um dos pontos de interseção da reta EF com o circuncírculo de (ABC) é P. As retas BP e DF se intersectam em Q. Prove que $AP = AQ$.

Problema 3. (Atenção, esse problema pode ser usado como lema) Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo tal que suas diagonais AC e BD são perpendiculares. Seja P a interseção de AC e BD e seja M o ponto médio de AB. Mostre que o quadrilátero $ABCD$ é cíclico se, e somente se, as retas PM e CD são perpendiculares.

Problema 4. (OBM 2016 Nível 2 Problema 4) Considere um triângulo escaleno ABC com $AB < AC < BC$. A mediatriz do lado AB corta o lado BC no ponto K e o prolongamento de AC no ponto U. A mediatriz do lado AC corta o lado BC no ponto O e o prolongamento do lado AB no ponto G. Prove que o quadrilátero $GOKU$ é cíclico, ou seja, que seus quatro vértices estão em uma mesma circunferência.

Problema 5. Em um quadrilátero cíclico $ABCD$, sejam I_1 e I_2 os incentros de ABC e DBC, respectivamente. Mostre que I_1I_2BC é cíclico.

Problema 6. Seja ABC um triângnulo acutângulo inscrito em uma circunferência Ω. Seja X o ponto médio do arco BC não contendo A e defina Y e Z de forma analoga. Prove que o ortocentro de XYZ é o incentro I do triângulo ABC.

Problema 7. Seja $\triangle ABC$ um triângulo acutângulo com circuncírculo ω e circuncentro O. A perpendicular de A a BC intersecta ω em D e E, respectivamente. Seja F um ponto no segmento AE, tal que $2 \cdot FD = AE$. Seja M o ponto médio de BC e H o ortocentro de ABC.

a. Prove que $AH = 2OM$.

b. Prove $EMOF$ cíclico.

Problema 8. (IMO 2006 Problema 1) Seja ABC um triângulo com centro I. Um ponto P no interior do triângulo satisfaz $\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB$. Mostre que $AP \geq AI$, e que a igualdade acontece se e só se $P = I$.

Problema 9. (China Girl's Mathematical Olympiad 2012 Dia 2 Problema 1) (Atenção, esse problema também pode ser facilmente usado como lema) Seja $\triangle ABC$ um triângulo cujo incentro é I. O incírculo de ABC é tangente a AB e AC em D e E, respectivamente. Seja N o centro de (BCI). Mostre que $\angle NDB = \angle NEC$.

Problema 10. (USAJMO 2011 Problema 5) Os pontos A, B, C, D e E pertencem a uma circunferência ω e seja P um ponto fora dela. Os pontos são dados de forma que PB e PD são tangentes a ω. P, A e C são colineares e $DE \parallel AC$. Mostre que BE corta AC em seu ponto médio.

Problema 11. Seja Q o ponto médio do lado AB de um quadrilátero cíclico $ABCD$ e S a interseção de suas diagonais. Sejam P e R as projeções ortogonais de S sobre AD e BC, respectivamente. Prove que $PQ = QR$.

Problema 12. (OBM 2020 Nível 2 Problema 1) Seja ABC um triângulo acutângulo, e D um ponto sobre BC tal que AD é perpendicular a BC. A bissetriz do ângulo $\angle DAC$ intesecta o segmento DC em E. Seja F o ponto sobre a reta AE tal que BF é perpendicular a AE. Se $\angle BAE = 45$, calcule a medida do ângulo $\angle BFC$.

Problema 13. (G1 IMO Shortlist 2015) Seja ABC um triângulo acutângulo com ortocentro H. Seja G o ponto tal que o quadrilátero $ABGH$ é um paralelogramo. Seja I o ponto na reta GH tal que AC bissecta HI. Suponha que a reta AC intersecta o circuncírculo de GCI em C e J. Prove que $IJ = AH$.

Problema 14. (Hong Kong 1998 Problema 1) Seja $PQRS$ um quadrilátero cíclico onde $\angle PSR = 90$. Tome H e K como os pés das perpendiculares de Q aos lados PR e RS. Mostre que HK corta SQ em dois segmentos iguais.

Problema 15. (Canadá 1997 Problema 4) O ponto O é situado dentro do paralelogramo $ABCD$ tal que $\angle AOB + \angle COD = 180°$. Prove que $\angle OBC = \angle ODC$.

Problema 16. (IMO 2000 Problema 1) Dois circulos G_1 e G_2 intersectam em dois pontos M e N. Seja AB a reta tangente a esses dois círculos em A e B, respectivamente, tal que AB está mais próximo de M do que de N. Seja CD a reta paralela a AB e passando pelo ponto M, com C em G_1 e D em G_2. As retas AC e BD se encontram em E; as retas AN e CD se encontram em P; as retas BN e CD se encontram em Q. Mostre que $EP = EQ$.