Comentário OBF Experimental - Fase 3, Nível II

Autores: Arthur Uchoa, Gustavo Globig, Inácio Sampaio, Lucas Cavalcante, Mateus Freitas

Parte I - Temperatura, Termômetro e Capacidade Calorífica

A medição da temperatura de um corpo é sempre indireta. Um termômetro mede diretamente uma propriedade de um corpo ou subsistema que varia com a temperatura de forma conhecida. O subsistema gás do G/LVT (Parte I) simula a variação de volume V e temperatura T de uma porção de gás ideal mantido a pressão P constante. Em gases ideais, essas grandezas estão relacionadas pela equação de Clapeyron:

$$PV = nRT \Rightarrow T = \frac{P}{nR}V, \tag{1}$$

Onde n é o número de moles do gás e R é a constante dos gases perfeitos. Portanto, a temperatura T do subsistema gás varia linearmente com seu volume V. Logo, medições diretas de V podem ser usadas para construir uma escala termométrica.

A medição da temperatura exige que o termômetro (o gás) entre em equilíbrio térmico com o corpo cuja temperatura $T_{i,c}$ se deseja conhecer. Note que $T_{i,c}$ é a temperatura do corpo antes da medição, e o termômetro também possui uma temperatura inicial $T_{i,g}$, que, em geral, não é o foco de interesse. Quando o termômetro atinge o equilíbrio térmico com o corpo, há uma troca de calor entre ambos até que alcancem a mesma temperatura T_f, que é indicada no mostrador do termômetro. Em termômetros ideais, temos:

$$T_{i,c} = T_f. \tag{2}$$

Entretanto, um termômetro real possui uma capacidade calorífica não nula C_g, enquanto o corpo tem uma capacidade calorífica finita C_c. Portanto, em geral, a medição altera a temperatura do corpo. Durante a medição, o calor absorvido pelo termômetro é igual ao calor cedido pelo corpo:

$$C_g(T_f - T_{i,g}) = C_c(T_f - T_{i,c}). \tag{3}$$

Assim, a temperatura de interesse, medida por um termômetro real, é dada por:

$$T_{i,c} = T_f - \frac{C_g}{C_c}(T_f - T_{i,g}). \tag{4}$$

Note que um **termômetro real** se comporta como um ideal quando a capacidade calorífica do corpo é muito maior do que a do termômetro, ou seja, $C_c \gg C_g$ ou $\frac{C_g}{C_c} \to 0$.

Quando o gás está em interação com um corpo e seu volume parou de variar, o valor V_f medido pela régua é **uma medida indireta da temperatura** T_f.

Procedimento experimental para medir V_f

1. Leve o gás e a régua para a bancada. Se necessário, arraste e solte-os até que uma linha de ligação apareça entre ambos e a régua mostre a medida do volume V do gás.
2. Pressione o botão de simulação (certifique-se de que o cronômetro está marcando a passagem do tempo).

3. Leve apenas um dos corpos para a bancada. Arraste-o para perto o suficiente do gás para que uma linha de ligação apareça entre eles. Imediatamente, o volume do gás começará a variar (caso contrário, o gás e o corpo já estão à mesma temperatura).

4. Espere até que o volume do gás pare de variar. Anote o valor de V indicado na régua. Este é o valor de equilíbrio V_f, que é proporcional à temperatura de equilíbrio T_f do corpo.

5. Retire o corpo da bancada.

Questão 2 (10 pontos). Três corpos do G/LVT têm capacidades caloríficas grandes $C_G \approx 10^4 C_g$, dois têm capacidades caloríficas médias $C_M \approx 100C_g$, e um tem capacidade pequena $C_P \approx C_g$, onde C_g é a capacidade calorífica do gás.

O objetivo desta questão é determinar qual corpo possui capacidade calorífica pequena. Quanto menor a capacidade calorífica de um corpo, mais a medição de sua temperatura é afetada pela temperatura inicial do termômetro. No G/LVT, uma maneira de observar isso é medindo o volume de equilíbrio em diferentes sequências. Por exemplo, escolha três corpos X, Y e Z, cujos volumes de equilíbrio são, respectivamente, dados por $V_{f,X}$, $V_{f,Y}$ e $V_{f,Z}$. Então, (1) meça $V_{f,X}$ após medir $V_{f,Y}$; e (2) Meça $V_{f,X}$ após medir $V_{f,Z}$. Compare os valores de $V_{f,X}$ medidos das duas maneiras e tire suas conclusões.

Digite a letra que identifica o corpo de menor capacidade calorífica. Justifique sua resposta na resolução completa da questão (imagem a ser enviada). Use medidas realizadas de V_f em sua argumentação.

Solução - Questão 2.

Uma informação importante de se comentar é que a expressão dada pelo enunciado está errada. E o correto seria:

$$T_{i,c} = T_f + \left(\frac{C_g}{C_c}\right)(T_f - T_{i,g})$$

No entanto, esse erro não impactaria na resolução das questões de 2 a 5, pois essa expressão seria necessária apenas na questão 5, mas que, por ser pedida uma razão, a diferença de sinal iria se cancelar e o resultado numérico seria correto. Agora, começaremos a resolução da parte I.

Para realizarmos esta e as próximas questões, é necessário relembrarmos e analisarmos com atenção a fórmula apresentada logo nas instruções da prova, lembrando que o corpo de estudo é posto em contato com um termômetro (isto é, o gás cujo volume varia e pode ser medido pelo simulador):

$$T_f = T_{i,c} - \left(\frac{C_g}{C_c}\right)(T_f - T_{i,g})$$

onde $T_{i,c}$ é a medida original do corpo (que é o objeto de estudo), $T_{i,g}$ é a medida original do termômetro antes de entrar em contato com o corpo, e T_f é a temperatura final, isto é, quando o termômetro e o corpo já estão em equilíbrio térmico. C_g é a capacidade calorífica do termômetro e C_c é a capacidade calorífica do corpo objeto de estudo.

Ora, note que, para uma situação ideal, $C_c \gg C_g$, logo $T_f \approx T_{i,c}$, o que representaria um termômetro perfeito. É necessário compreender que o objetivo do termômetro é exclusivamente medir a temperatura do corpo; logo, quanto maior for sua capacidade em relação à capacidade térmica do corpo, menos exatidão sua medida terá e mais esse valor variará com diferentes valores de temperatura inicial.

Findada esta introdução, note que o que iremos fazer é modificar a temperatura inicial do termômetro e analisar o quanto isso influenciará na medida final. Como a pressão é constante para o nosso gás, que é utilizado como termômetro, então, usando conceitos básicos de gases ideais:

$$pV = nRT, \quad \text{logo} \quad V \propto T$$

Pelo simulador, conseguimos medir o volume; logo, temos uma medida indireta da temperatura. As variações no volume serão proporcionais às variações na temperatura, e poderemos trabalhar de agora em diante com este conceito.

Quando se faz uma medição, por exemplo, do corpo A, a temperatura do gás irá ficar em equilíbrio com o corpo A, mudando em relação à sua temperatura inicial, a menos que o corpo tenha temperatura inicial igual ao do gás (nesse caso, o volume não varia em nada. Em pelo menos algumas provas, havia um corpo que tinha temperatura exatamente igual ao do gás). Se for realizada uma medição com outro corpo, tomemos o corpo B, após ter sido feita a medição do corpo A, a temperatura inicial do termômetro será diferente, de forma que isso impactará na temperatura final. Conforme o próprio enunciado diz, **quanto menor for a capacidade, maior será o impacto na temperatura, logo será maior sua variação** - e é desta forma que buscaremos identificar o corpo com a menor capacidade calorífica.

A grande dificuldade apresentada nessa questão é que temos vários termos desconhecidos e a necessidade de comparar as capacidades caloríficas dos diferentes corpos, pois não sabemos: a) a temperatura inicial de cada um; b) a capacidade calorífica do termômetro; e c) a capacidade calorífica dos corpos (isso é óbvio). Logo, uma boa maneira de resolver esse problema é realizar muitas medições em sequência, conforme explicado no parágrafo anterior, para fazer uma análise completa da situação.

As provas tinham valores e características dos corpos variadas no sistema anticola. Então, iremos considerar os valores do simulador disponibilizado no site atualmente.

Primeiramente, faremos uma tabela com os valores de volumes do gás para diferentes volumes iniciais, os quais representam o equilíbrio de um dos corpos com o temômetro. Ou seja, na tabela abaixo, será mostrado o valor do volume de equilibrío de cada corpo ao se iniciar o experimento com um dos outros corpos disponíveis. Nessa tabela, a primeira linha horizontal indica o corpo que é utilizado primeiro para se atingir o equilíbro, e a primeira coluna indica o corpo que foi utilizado em seguida:

	$A \pm 0,0002$	$B \pm 0,0002$	$C \pm 0,0002$	$D \pm 0,0002$	$E \pm 0,0002$	$F \pm 0,0002$
A	$0,7987$	$0,7987$	$0,7987$	$0,7987$	$0,7987$	$0,7987$
B	$0,5847$	$0,5847$	$0,5847$	$0,5847$	$0,5847$	$0,5847$
C	$0,6702$	$0,6667$	$0,6667$	$0,6685$	$0,6679$	$0,6678$
D	$0,6980$	$0,6962$	$0,6969$	$0,6962$	$0,6968$	$0,6968$
E	$0,7550$	$0,6577$	$0,6950$	$0,7084$	$0,6577$	$0,6893$
F	$0,6542$	$0,6541$	$0,6542$	$0,6541$	$0,6541$	$0,6541$

Agora, iremos fazer uma tabela no mesmo formato da anterior, mas com a variação da temperatura de equilíbrio do corpo em relação à sua temperatura como primeiro corpo:

	$A \pm 0,0002$	$B \pm 0,0002$	$C \pm 0,0002$	$D \pm 0,0002$	$E \pm 0,0002$	$F \pm 0,0002$
A	0	0	0	0	0	0
B	0	0	0	0	0	0
C	$3,5 \cdot 10^{-3}$	0	0	$1,8 \cdot 10^{-3}$	$1,2 \cdot 10^{-3}$	$1,1 \cdot 10^{-3}$
D	$1,8 \cdot 10^{-3}$	0	$7 \cdot 10^{-4}$	0	$6 \cdot 10^{-4}$	$6 \cdot 10^{-4}$
E	$9,7 \cdot 10^{-2}$	0	$3,7 \cdot 10^{-2}$	$5,1 \cdot 10^{-2}$	0	$3,2 \cdot 10^{-2}$
F	$1 \cdot 10^{-4}$	0	$1 \cdot 10^{-4}$	0	0	0

Pela tabela, podemos analisar que o corpo E tem variações de ordem de grandeza -1, significativamente superior em relação a outros corpos. Portanto, ele é o corpo com **menor capacidade calorífica**.

Questão 3 (10 pontos). Pressione o botão recomeçar do app. Nesta questão, seu objetivo é determinar os três corpos de maior capacidade calorífica e os valores de V_f (volumes de equilíbrio do gás) associados às temperaturas iniciais destes três corpos. Os corpos de A a F possuem um número de identificação I_d, dados de acordo com a tabela.

	A	B	C	D	E	F	G
I_d	1	2	4	8	16	32	64

(a) Digite os valores de V_f dos três corpos de maior capacidade calorífica, em sequência crescente, separados por pontos e vírgulas, sem unidades de medida (neste formato: 11,2; 22,4; 44,8;).
(b) Digite a soma dos números de identificação I_d dos três corpos de maior capacidade calorífica. (Digite 7 caso sejam os corpos A, B e C, etc).
Justifique suas respostas na resolução completa da questão (imagem a ser enviada). Use medidas realizadas de V_f em sua argumentação.

Solução - Questão 3. Analisando a tabela da questão anterior, e seguindo a mesma lógica de que quanto menor a capacidade, maior são as alterações de medição de temperatura - e, quanto maior a capacidade, menores são as alterações de temperatura, ficam em evidência os corpos A, B e F. No caso de A e B, não foi possível medir, dentro das limitações do instrumento utilizado, qualquer variação, enquanto a variação de F é menor que o erro do instrumento. Logo, ainda mais quando vendo com as variações dos corpos C e D, sempre na ordem de grandeza -3, fica claro que A, B e F são os corpos com as maiores capacidades caloríficas. E seus valores de V_f são:

$$\boxed{V_{f,A} = 0,7987 \text{ L}}$$

$$\boxed{V_{f,B} = 0,5847 \text{ L}}$$

$$\boxed{V_{f,F} = 0,6541 \text{ L}}$$

Questão 4. Questão 4 (10 pontos). Pressione o botão recomeçar do app. Considere novamente os três corpos de maior capacidade calorífica da questão anterior e identifique suas temperaturas por $T_1 < T_2 < T_3$. Sabendo que $T_1 = 273\,\text{K}$ e $T_3 = 373\,\text{K}$, determine T_2 em Kelvin.

(a) Digite a letra de identificação do corpo que tem a temperatura T_2.
(b) Digite o valor de T_2 em Kelvin.
Justifique suas respostas na resolução completa da questão (imagem a ser enviada).

Solução - Questão 4. Retomando a expressão apontada logo na Questão 2:

$$pV = nRT_{i,c},$$

e, como, segundo o enunciado desta questão

$$C_c \approx C_g \times 10^4$$

onde fica claro que C_g é muito menor que C_c, logo $\frac{C_g}{C_c} \approx 0$. Usando essa aproximação razoável na expressão apresentada na introdução à parte I da prova:

$$T_f = T_{i,c} + \left(\frac{C_g}{C_c}\right)(T_f - T_{i,g}) \approx T_{i,c}$$

Ou seja, a temperatura medida é aproximanete igual à temperatura final. Isso é equivalente a dizer que o gás se comporta praticamente como um termômetro ideal. Desta forma:

$$pV = nRT_{i,c} = nRT_f$$

E poderemos agora relacionar a temperatura do corpo que será igual a do gás, isto é, a temperatura a ser medida (já que o termômetro é aproximadamente ideal) com o volume medido. Como já sabemos que:

$$V \propto T$$

Teremos que:

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} = \frac{V_3}{T_3} = \text{cte}$$

Como a temperatura é diretamente proporcional ao volume, logo o corpo cuja medida de volume é menor será o de $T_1 = 273\,\text{K}$ e o de maior será o de $T_2 = 373\,\text{K}$, que são, respectivamente, os corpos B e A. Matematicamente, teremos que:

$$\boxed{T_2 = \frac{V_2 T_1}{V_1} = \frac{V_2 T_3}{V_3} = 305,47 \pm 0,12\ \text{K}}$$

Onde o erro da temperatura foi encontrado pela expressão da propagação do erro para a divisão:

$$\boxed{\left(\frac{\sigma_{T_2}}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_{V_1}}{V_1}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{V_2}}{V_2}\right)^2}$$

Questão 5 (15 pontos). Sejam $C_{M,1} < C_{M,2}$ as capacidades caloríficas dos dois corpos com capacidades caloríficas classificadas como médias. Determine o valor da razão $\frac{C_{M,2}}{C_{M,1}}$. Há mais de uma maneira de fazer isso? Todas são igualmente precisas?

Digite o valor de $\frac{C_{M,2}}{C_{M,1}}$.
Justifique sua resposta na resolução completa da questão (imagem a ser enviada).

Solução - Questão 5.

Como já sabemos os objetos que possuem maior capacidade e menor, os objetos que estão no meio são o C e o D. Para calcular a razão entre suas capacidades caloríficas, será necessário utilizar a expressão para a temperatura inicial de um corpo dada no enunciado:

$$T_{i,c} = T_f + \left(\frac{C_g}{C_c}\right)(T_f - T_{i,g})$$

Existem duas formas principais de se pensar em como encontrar $\dfrac{C_{M_2}}{C_{M_1}}$. A primeira, seria analisando a temperatura final do corpo com capacidade média após o termomêtro entrar em contato com um corpo antes e, como a temperatura inicial do corpo é constante para o mesmo corpo, pode-se subtrair as expressões, resultando em uma expressão que depende apenas de variáveis que possuimos. Na resolução, iremos utilizar os corpos A e B. Ao entrar em contato com o corpo A, a temperatura inicial do corpo C será:

$$T_{i,c} = T_{f,CA} + \left(\frac{C_g}{C_c}\right)(T_{f,CA} - T_{f,A})$$

O resultado será análogo para os outros corpos analisados. Então, substraindo as expressões começando com o corpo A e, com o corpo B:

$$0 = T_{f,CA} - T_{f,CB} + \left(\frac{C_g}{C_c}\right)(T_{f,CA} - T_{f,CB} - (T_{f,A} - T_{f,CB}))$$
$$\frac{C_g}{C_c} = \frac{T_{f,CA} - T_{f,CB}}{T_{f,A} - T_{f,CB} - (T_{f,CA} - T_{f,CB})}$$

A expressão será a mesma para o corpo D, substituindo apenas o índice C por D. Logo, para encontrar a razão entre as capacidades caloríficas deve-se dividir as expressões, e, como $T \propto V$, a constante de proporcionalidade será cortada ao divir as expressões, pode-se trocar T por V, encontrando:

$$\boxed{\frac{C_D}{C_C} = \frac{V_{f,CA} - V_{f,CB}}{V_{f,A} - V_{f,CB} - (V_{f,CA} - V_{f,CB})} \cdot \frac{V_{f,A} - V_{f,CB} - (V_{f,DA} - V_{f,DB})}{V_{f,DA} - V_{f,DB}}}$$

Ao substituir os valores encontrados pelo experimento, o resultado encontrado é:

$$\boxed{\frac{C_D}{C_C} = 1,960}$$

A segunda forma de se encontrar essa razão seria encontrando uma relação entre V_f e V_i que depende apenas de constantes e fazer uma regressão linear. Pois, o coeficiente angular dependeria apenas de C_c e C_g. Para isso, partiremos da expressão dada no enunciado e isolaremos V_f:

$$T_{i,c} = T_f + \left(\frac{C_g}{C_c}\right)(T_f - T_{i,g})$$

$$V_f = \frac{nRT_{i,c}}{P\left(1 + \frac{C_g}{C_c}\right)} + \frac{V_{i,g}}{1 + \frac{C_c}{C_g}}$$

Ao realizarmos a regressão linear de uma expressão no formato:

$$y = A + Bx$$

Encontra-se o valor do coeficiente angular para cada um dos corpos como:

$$B_C = 0,01637$$

$$B_D = 8,40502 \cdot 10^{-3}$$

A razão entre as capacidades caloríficas e os coeficientes angulares pode ser encontrada a partir da equação teórica:

$$B = \frac{1}{1 + \frac{C_c}{C_g}}$$

$$\frac{C_c}{C_g} = \frac{1}{B} - 1$$

Portanto, a razão entre as capacidades será:

$$\boxed{\frac{C_D}{C_C} = \frac{(1 - B_D)B_C}{(1 - B_C)B_D}}$$

$$\boxed{\frac{C_D}{C_C} = 1,963}$$

Agora, entre as duas maneiras mostradas a **mais precisa é a que utiliza da regressão linear**, pois no caso que se utiliza os volumes o erro do valor encontrado é alto pois ele originará da propagação do erro de cada medida de volume utilizada, pois cada uma delas possui um erro associado. Enquanto, o método por regressão linear só será necessária a propagação de erro dos coeficientes angulares utilizados.

Parte II - Gás Ideal

Questão 6. Prepare um arranjo experimental no G/LVT no qual o gás realize um processo adiabático quase estático (processo reversível no qual o gás realiza trabalho sem absorção de calor).
Meça o volume V e a pressão P do gás em diferentes pontos do processo. Organize seus dados na Tabela 1.

Solução - Questão 6

a) A incerteza da medida V é dada pela incerteza do instrumento usado para a sua medição, nesse caso, é metade da incerteza da régua(instrumento analógico):

$$\sigma_V = \pm 0,001 \ L$$

b) A incerteza da medida P é dada pela incerteza do instrumento usado para a sua medição, nesse caso, é a incerteza do manômetro(instrumento digital):

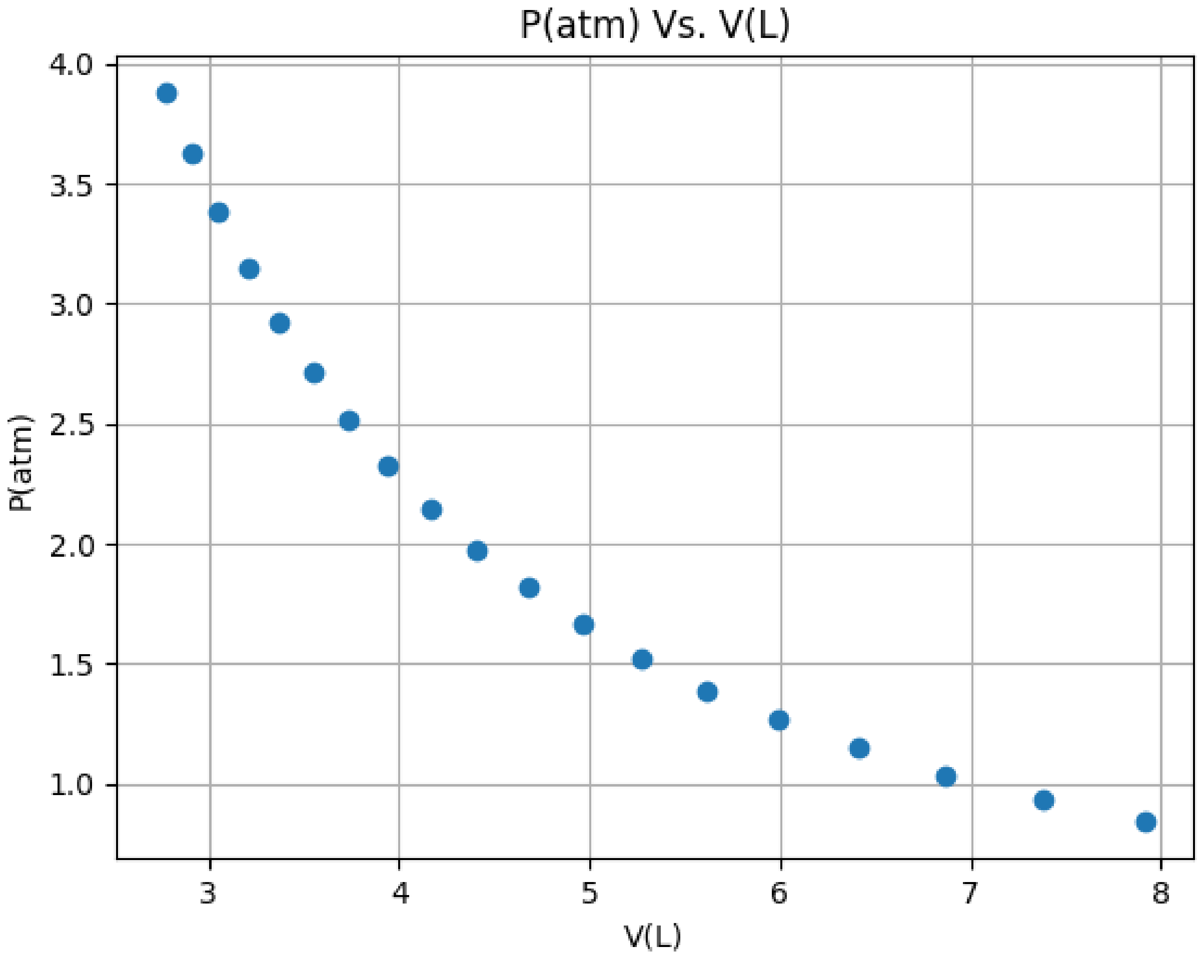
$$\sigma_P = \pm 0,002 \ atm$$

c)

$\frac{1}{V}$	**P (atm)**
0.379	4.036
0.358	3.814
0.339	3.604
0.317	3.373
0.294	3.128
0.277	2.941
0.259	2.753
0.246	2.613
0.234	2.481
0.217	2.300
0.206	2.183
0.200	2.122
0.194	2.063
0.190	2.104
0.184	1.958

Questão 7 (10 pontos). Faça o gráfico de $P \times V$ do processo adiabático (Gráfico 1) obtido na Questão 6.

Solução - Questão 7



Questão 8 (10 pontos). Usando as medidas obtidas na Questão 6, faça a Tabela 2 com $\log(V)$ e $\log(P)$. Depois, faça o ajuste linear

$$\log(P/P_0) = a \log(V/V_0) + b$$

Onde P_0 =1atm, V_0 =1L,e o log é na base 10.

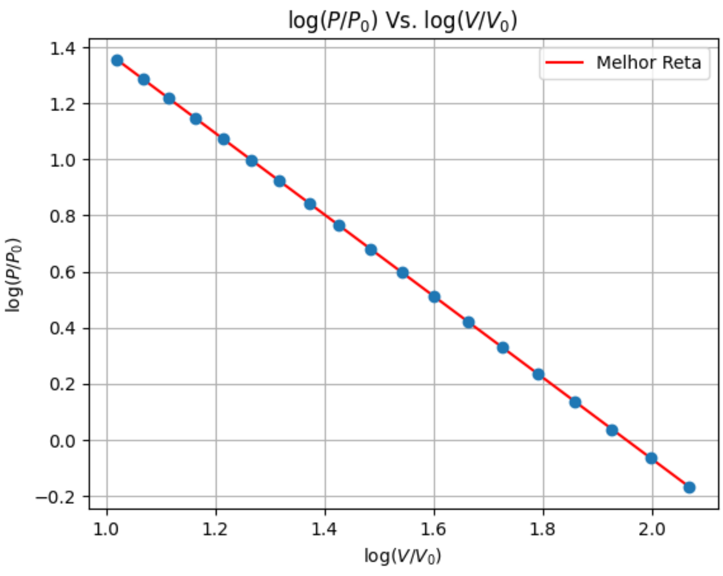
Solução - Questão 8

(a) Da equação de uma transformação adiabática:

$$PV^\gamma = P_0 {V_0}^\gamma \Rightarrow \left(\frac{P}{P_0}\right) = \left(\frac{V_0}{V}\right)^\gamma \Rightarrow \boxed{log\left(\frac{P}{P_0}\right) = -\gamma\ log\left(\frac{V}{V_0}\right)}$$

$\log(P/P_0)$	$\log(V/V_0)$
0.5883	0.4431
0.5592	0.4634
0.5285	0.4843
0.4978	0.5058
0.4664	0.5275
0.4338	0.5498
0.4009	0.5728
0.3667	0.5959
0.3313	0.6194
0.2962	0.6441
0.2596	0.6696
0.2218	0.6955
0.1833	0.7219
0.1430	0.7489
0.1024	0.7764
0.0598	0.8061
0.0166	0.8360
−0.0281	0.8674
−0.0722	0.8988

Questão 9 (10 pontos). Faça o Gráfico 2 de $\log(P/P_0) \times \log(V/V_0)$ contendo as medidas da Tabela 2 e o ajuste que foi feito na questão anterior.



Questão 10 (10 pontos). Determine (a) o expoente γ e (b) a razão $r = n_2/n_1$ definidos na introdução da parte II.

Solução - Questão 10

(a) Com os dados experimentais da **Questão 8**, temos que:

$$\gamma = -a$$

E o erro do expoente γ é igual ao erro do coeficiente a do ajuste linear, sendo assim:

$$\sigma_\gamma = \pm 0,003$$

Tendo como resposta do item (a):

$$\boxed{\gamma = (1,453 \pm 0,001)}$$

(b) Com as informações dadas na introdução da parte II, temos as seguintes equações:

$$\gamma = \frac{c+1}{c} c = \frac{3n_1}{2n} + \frac{5n_2}{2n} = \frac{3n_1 + 5n_2}{2n} n = n_1 + n_2$$

Substituindo a equação (III) em (II), e depois em (I), descobrimos que:

$$r = \frac{3\gamma - 5}{7 - 5\gamma} = 2,418$$

O erro para essa medida é dado por:

$$\sigma_r = \left(\frac{\partial r}{\partial \gamma}\right) \sigma_\gamma \Rightarrow \sigma_r = -\frac{4}{(7-5\gamma)^2} \sigma_\gamma = \pm 0,057$$

Portanto, o item (b) tem como resposta:

$$\boxed{r = (2,418 \pm 0,057)}$$