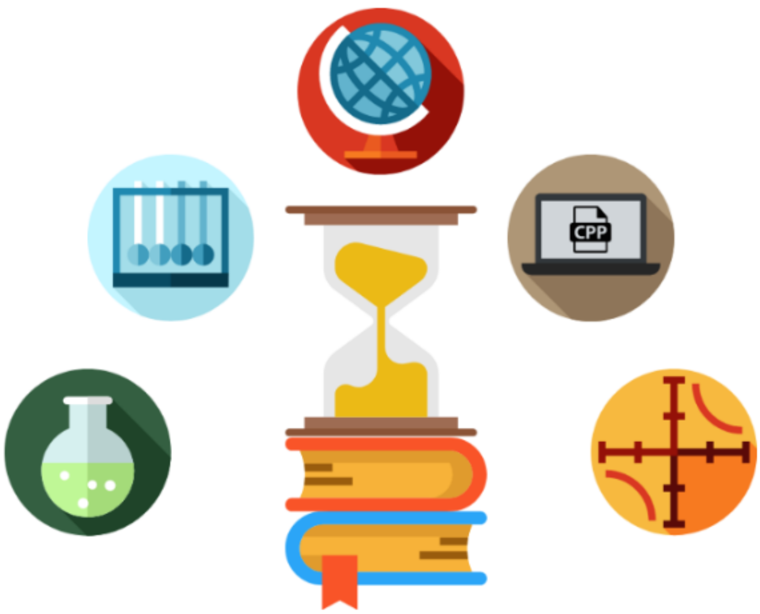
Somas de Newton

Gustavo Mesquita



1 Introdução

1.1 Contextualização

As Somas de Newton são uma técnica poderosa para encontrar somas de potências das raízes de um polinômio, sem a necessidade de determinar diretamente essas raízes. Esta ferramenta é particularmente útil para fatorar expressões e é muito bem combinada com as relações de Girard.

Nesse material iremos explorar as propriedades da soma de Newton e entender como aplicá-la em diversos problemas de olimpíadas.

1.2 Pré-requisitos

Para melhor compreensão do material, é recomendado que o leitor esteja familiarizado com conceitos básicos de polinômios e suas raízes, relações de Girard e fatorações/manipulações algébricas.

2 Somas de Newton

2.1 Enunciado

Seja $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ um polinômio de grau n com raízes $r_1, r_2, \ldots, r_n$. Defina S_k sendo a soma das k-ésimas potências das raízes de $P(x)$, ou seja $S_k = {r_1}^k + {r_2}^k + \cdots + {r_n}^k$, então temos o seguinte resultado:

Somas de Newton

$$a_nS_k + a_{n-1}S_{k-1} + a_{n-2}S_{k-2} + \cdots + a_1S_1 + a_0S_{k-n} = 0$$

Para visualizar este resultado, vamos analisar o seguinte polinômio:

$$P(x) = x^2 - x - 1$$

Sejam suas raizes r_1, r_2. Suponha que queremos achar $r_1^5 + r_2^5$, como proceder? Para isso, notemos que essencialmente queremos encontrar S_5 de $P(x)$, portanto podemos usar somas de Newton. Escrevendo a recorrência temos:

$$1 \cdot S_5 - 1 \cdot S_4 - 1 \cdot S_3 = 0$$

Porém, quem são S_4 e S_3? Podemos usar novamente as somas de Newton:

$$S_4 - S_3 - S_2 = 0$$

$$S_3 - S_2 - S_1 = 0$$

$$S_2 - S_1 - S_0 = 0$$

Parece que não ajudou muito, uma vez que não sabemos nenhuma das variáveis, certo? Errado! Se você tiver um olhar atento, irá perceber que já conhecemos facilmente quem são S_0 e S_1:

$$S_0 = r_1^0 + r_2^0 = 1 + 1 = 2$$

$$S_1 = r_1 + r_2 = 1$$

Onde usamos Girard para encontrar S_1.
Sendo assim, podemos encontrar todos os termos da recorrência construída anteriormente:

$$S_2 = 2 + 1 = 3$$
$$S_3 = 1 + 3 = 4$$
$$S_4 = 3 + 4 = 7$$

E por fim:

$$S_5 = 4 + 7 = 11$$

Portanto $r_1^5 + r_2^5 = 11$. Veja que chegamos nesse resultado sem ao menos encontrar explicitamente as raízes de $x^2 - x - 1$, e apesar de parecer trabalhoso resolver a recorrência, nós evitamos o trabalho de calcular $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^5 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^5$.

Vale a pena notar que os zeros de $x^2 - x - 1$ são $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ que são ϕ e $\bar{\phi}$ respectivamente o número de ouro e seu conjugado. Assim, as somas de Newton possibilitaram uma ferramenta para calcular $\phi^k + (\bar{\phi})^k$ para qualquer k inteiro.

2.2 Prova da Soma de Newton

Vamos agora provar essa técnica:

Prova:
Sejam $r_1, r_2, \dots, r_n$ as raízes de $P(x)$ daí temos:

$$a_n {r_i}^n + a_{n-1} {r_i}^{n-1} + a_{n-2} {r_i}^{n-2} + \cdots + a_1 r_i + a_0 = 0 \;\; \forall \; i \in 1, 2 \dots, n$$

Multiplicando cada termo por ${r_i}^{k-n}$ e somando tudo:

$$\therefore \sum_{i=1}^{n} [{r_i}^{k-n} (a_n {r_i}^n + a_{n-1} {r_i}^{n-1} + a_{n-2} {r_i}^{n-2} + \cdots + a_1 r_i + a_0)] = 0$$

$$\therefore a_n ({r_1}^k + {r_2}^k + \dots {r_n}^k) + a_{k-1} ({r_1}^{k-1} + {r_2}^{k-1} + \cdots + {r_n}^{k-1}) + \cdots + a_0 ({r_1}^{n-k} + \dots {r_n}^{n-k}) = 0$$

$$\therefore a_n S_k + a_{n-1} S_{k-1} + a_{n-2} S_{k-2} + \cdots + a_1 S_1 + a_0 S_{k-n} = 0 \; \blacksquare$$

3 Aplicações

Vamos agora resolver alguns problemas olímpicos para demonstrar a utilidade dessa técnica.

Exemplo 1

Sejam a, b, c números reais tais que $a + b + c = 0$. Prove que $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

Solução:

Seja $P(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$ onde a, b, c são suas raízes. Por Girard $A = -(a+b+c) = 0, B = (ab+bc+ac), C = -abc$. Aplicando Soma de Newton em $P(x)$:

$$S_3 + 0 \cdot S_2 + (ab+bc+ac)S_1 - abcS_0 = 0$$

$$\therefore a^3 + b^3 + c^3 + (ab+cb+ac)(a+b+c) - 3abc = 0$$

$$\therefore a^3 + b^3 + c^3 = 3abc \blacksquare$$

Exemplo 2(OBM 2001)

Sejam a, b, c números reais tais que $a+b+c=0$. Ache todos os possíveis valores de $\dfrac{(a^3+b^3+c^3)^2(a^4+b^4+c^4)}{(a^5+b^5+c^5)^2}$

Solução:

Análogo ao exemplo 1, Seja $P(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$ onde a, b, c são suas raízes. Por Girard $A = -(a+b+c) = 0, B = (ab+bc+ac), C = -abc$. Por somas de Newton:

$$S_3 + 0 \cdot S_2 + (ab+bc+ac)S_1 - abcS_0 = 0$$

$$\therefore a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$$

$$S_4 + 0 \cdot S_3 + (ab+bc+ac)S_2 - abcS_1 = 0$$

$$\therefore a^4 + b^4 + c^4 = -(ab+bc+ac)(a^2+b^2+c^2)$$

$$S_5 + 0 \cdot S_4 + (ab+bc+ac)S_3 - abcS_2 = 0$$

$$\therefore a^5 + b^5 + c^5 = -3abc(ab+bc+ac) + abc(a^2+b^2+c^2)$$

Notando que $(a+b+c)^2 = 0 \Rightarrow a^2+b^2+c^2 = -2(ab+bc+ca)$:

$$\frac{(a^3+b^3+c^3)^2(a^4+b^4+c^4)}{(a^5+b^5+c^5)^2} = \frac{(3abc)^2 2(ab+ca+bc)^2}{(-5abc(ab+bc+ac))^2} = \frac{18}{25}$$

Exemplo 3(IME 2016)

Sejsm x, y, z números complexos que satisfazem o sistema abaixo:

$$\begin{cases} x+y+z=7 \\ x^2+y^2+z^2=25 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{4} \end{cases}$$

Então o valor da soma $x^3+y^3+z^3$ é quanto?

Solução:
Definindo o polinômio $P(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$. Por relações de girard:

$$A = -(x+y+z) = -7$$
$$B = (xy+xz+zy) = \frac{(x+y+z)^2 - x^2 - y^2 - z^2}{2} = 12$$
$$C = -xyz;\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{4} \iff (xy+yz+zx) = xyz/4 \Rightarrow C = -48$$

Por somas de Newton:

$$S_3 - 7S_2 + 12S_1 - 48S_0 = 0$$
$$S_3 = 7(25) - 12(7) + 48(3) = 235$$

Logo $x^3 + y^3 + z^3 = 235$.

4 Problemas

Problema 1 (Jacob Palis 2024)

Sejam a, b e c tais que:

$$\begin{cases} a+b+c = 10 \\ a^2+b^2+c^2 = 20 \\ a^3+b^3+c^3 = 30 \end{cases}$$

Calcule o valor de $a^5 + b^5 + c^5$.

. . . .

Problema 2

Sejam x_1 e x_2 as raízes do polinômio $P(x) = x^2 - 6x + 1$. Prove que ${x_1}^n + {x_2}^n$ é um inteiro não divisível por 5 para todo inteiro não negativo n.

. . . .

Problema 3(AIME 2008)

Sejam r, s, t as raízes do polinômio:

$$8x^3 + 1001x + 2008 = 0$$

Ache $(r+s)^3 + (r+t)^3 + (s+t)^3$

. . . .

Problema 4)

Existem números reais tais que $a+b+c = 6$, $ab+bc+ca = 9$, $a^4+b^4+c^4 = 260$? E se $a^4+b^4+c^4 = 210$?

Problema 5(IMO shortlist 67)(Desafio)

Ache todas as soluções reais do sistema:

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^i = a^i$$

Para $i = 1, 2, \ldots, n$.

5 Bibliografia

- **Art of Problem Solving (AOPS)**
- **Polos olímpicos de treinamento intensivo (POTI)**
- **IME/ITA**