Desigualdades das Médias

Sofia Pinheiro

1 Introdução

As desigualdades das médias são relações matemáticas que comparam diferentes tipos de médias, como a média aritmética, geométrica e harmônica. Elas aparecem em diversas áreas e ajudam a entender como valores podem ser relacionados ou otimizados.

Neste material, você verá de forma simples e prática:

- O que são as médias e como calculá-las.
- Como as desigualdades entre elas funcionam.

É um convite para explorar como a matemática conecta ideias e resolve problemas de forma surpreendente!

2 Definição de cada desigualdade

Antes de aprendermos as relações entre desigualdades das médias, devemos conhecê-las primeiro.

(a) **Média aritmética** como o número $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$.

(b) **Média geométrica** como o número $\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$.

(c) **Média quadrática** como o número $\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}}$.

(d) **Média harmônica** como o número $\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}$.

Conforme veremos a seguir, há algumas relações entre essas médias, como: $M.Q. \geq M.A. \geq M.G. \geq M.H.$

3 Prova das desigualdades das médias

3.1 Prova de M.A. ≥ M.G.

Teorema Dados $n > 1$ reais positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, temos

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n},$$

ocorrendo a igualdade se e somente se $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Para entender a dinâmica da prova do teorema acima, analisemos separadamente os casos $n = 3$ e $n = 4$, começando com o caso $n = 4$. Para tanto, dados reais positivos a, b, c, d, já sabemos que $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ e $\frac{c+d}{2} \geq \sqrt{cd}$. Então,

$$\frac{a+b+c+d}{4} = \frac{\frac{a+b}{2} + \frac{c+d}{2}}{2} \geq \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{cd}}{2} \geq \sqrt[4]{abcd}.$$

Mostramos, acima, que $\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$. Escrevendo tal desigualdade com $\sqrt[3]{abc}$ no lugar de d, obtemos

$$\frac{a+b+c+\sqrt[3]{abc}}{4} \geq \sqrt[4]{abc \cdot \sqrt[3]{abc}} = \sqrt[4]{abc}.$$

Dessa forma, a desigualdade $a+b+c+\sqrt[3]{abc} \geq 4\sqrt[4]{abc}$, ou o que é o mesmo, $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt{abc}$.

Conforme veremos a seguir, a prova da versão geral da desigualdade entre as médias é uma adaptação dos argumentos utilizados para os dois casos acima.

Prova do Teorema Inicialmente, provaremos por indução a desigualdade desejada é verdadeira sempre que n for uma potência de 2, ocorrendo a igualdade se e só se todos os a_i são iguais. Para isso, teremos de verificar o caso em que $n = 2$, o qual já discutimos, formular a hipótese de indução (para $n = 2^j$, digamos) e aplicar o passo de indução (deduzindo o caso $n = 2^{j+1}$ a partir do caso $n = 2^j$). novamente se e só se todos os números forem iguais. Para estabelecer esse fato, considere os $2k$ reais positivos $a_1, a_2, \ldots, a_{2k}$. Então:

$$\frac{1}{2k}\sum_{j=1}^{2k} a_j = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} a_j + \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} a_{k+j}\right) \geq \frac{1}{2}\left(\sqrt[k]{a_1\cdots a_k} + \sqrt[k]{a_{k+1}\cdots a_{2k}}\right) \geq \sqrt[2k]{a_1\cdots a_k a_{k+1}\cdots a_{2k}} = \sqrt[2k]{a_1\cdots a_{2k}}.$$

Para haver igualdade, devemos ter igualdade em todas as passagens. Então, deve ser

$$\frac{a_1+\cdots+a_k}{k} = \sqrt[k]{a_1\cdots a_k}, \quad \frac{a_{k+1}+\cdots+a_{2k}}{k} = \sqrt[k]{a_{k+1}\cdots a_{2k}}$$

e

$$\frac{\sqrt[k]{a_1\cdots a_k} + \sqrt[k]{a_{k+1}\cdots a_{2k}}}{2} = \sqrt[2k]{a_1\cdots a_k a_{k+1}\cdots a_{2k}}.$$

Para as duas primeiras igualdades, devemos ter por hipótese que $a_1 = \cdots = a_k$ e $a_{k+1} = \cdots = a_{2k}$. Por fim, a última igualdade ocorre se e somente se $\sqrt[k]{a_1\cdots a_k} = \sqrt[k]{a_{k+1}\cdots a_{2k}}$, e esta condição, juntamente com as duas anteriores, implica que devemos ter $a_1 = \cdots = a_{2k}$. É também evidente que, se os números forem todos iguais, então a igualdade ocorre. Logo, por indução temos a desigualdade é verdadeira, com a condição para a igualdade dada no enunciado, sempre que n for uma potência de 2.

Agora, vamos mostrar que a desigualdade vale para todo n natural maior que 1 em geral, ocorrendo a igualdade se e somente se os números forem todos iguais. Para tanto, seja $n > 1$ natural e considere o maior k natural tal que $n \geq 2^k > n$. Aplicando a desigualdade entre as médias aos n números $a_1, a_2, \ldots, a_n$, juntamente com $2^k - n$ cópias do número $a = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$ (totalizando no $(2^k - n) = 2^k$ números), obtemos

$$\frac{a_1+\cdots+a_n+a+\cdots+a}{2^k} \geq \sqrt[2^k]{a_1 a_2\cdots a_n \cdot a^{2^k-n}} = \sqrt[2^k]{a_1 a_2\cdots a_n} = a.$$

A partir daí, obtemos $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq 2^k a$, ou, ainda,

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2\cdots a_n}.$$

Para haver igualdade, segue da primeira parte que $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = a = \sqrt[n]{a_1 a_2\cdots a_n}$. Em particular, todos os números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ devem ser iguais. Finalmente, é fácil ver que se esses números forem todos iguais, então haverá igualdade.

3.2 Prova de M.Q. ≥ M.A.

A relação entre diferentes tipos de médias é uma parte fundamental da matemática, especialmente no estudo das desigualdades. Uma das desigualdades clássicas é a que afirma que a média quadrática (M.Q.) de um conjunto de números é sempre maior ou igual à sua média aritmética (M.A.). Esse resultado pode ser demonstrado de diversas maneiras, sendo uma das abordagens mais elegantes a utilização da desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Prova: Basta aplicar $b_i = 1$, para todo $1 \le i \le n$. (com igualdade ocorrendo, portanto, se todos forem iguais) na desigualdade de Cauchy, dividir por n^2 e tirar raiz:

$$\left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right) \cdot \left(\frac{1+1+\cdots+1}{n}\right)^2 \ge (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}} \ge \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

3.3 Prova de M.G. ≥ M.H.

Dados os números reais positivos $x_1, x_2, \ldots, x_n$, é sempre verdade que $M.H \le M.G$, e que a igualdade ocorre se, e somente se, $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Para fazermos a prova, vamos utilizar a prova demonstrada anteriormente $M.A. \ge M.G.$. Se $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são números reais positivos, então $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots, \frac{1}{x_n}$ também o são. Sendo assim, aplicando tal desigualdade:

$$\frac{1}{G} = \frac{1}{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n}} \le \frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right) = \frac{1}{H}.$$

Dessa forma,

$$\frac{1}{M.G.} \le \frac{1}{M.H.} \implies M.H. \le M.G.$$

A igualdade ocorre se, e somente se,

$$\frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2} = \cdots = \frac{1}{x_n} \implies x_1 = x_2 = \cdots = x_n.$$

Logo, é sempre verdade que $M.H. \le M.G. \le M.A.$. A igualdade ocorre se, e somente se, $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

3.4 Conclusões

Dessa forma, a partir do demonstrado acima, mostram-se provadas as desigualdades das médias $M.Q. \ge M.A. \ge M.G. \ge M.H.$

4 Exemplos

4.1 Exemplo 1.

Exemplo 1. Para x, y, z reais positivos, temos

$$x^2 + y^2 + z^2 \ge xy + xz + yz,$$

ocorrendo a igualdade se, e somente se, $x = y = z$.

Prova. Para obter a desigualdade do enunciado, basta somar membro a membro as desigualdades parciais $M.A \ge M.G.$:

$$\frac{x^2 + y^2}{2} \ge xy, \qquad \frac{x^2 + z^2}{2} \ge xz, \qquad \frac{y^2 + z^2}{2} \ge yz.$$

Se $x = y = z$, então a desigualdade do enunciado é claramente uma igualdade. Reciprocamente, se ao menos uma das desigualdades acima for estrita, digamos $\frac{x^2+y^2}{2} > xy$, então, após somarmos as mesmas membro a membro, obtemos

$$x^2 + y^2 + z^2 > xy + xz + yz.$$

4.2 Exemplo 2.

Para $n > 1$ reais positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, temos

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2,$$

ocorrendo a igualdade se e só se $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Prova. Aplicando duas vezes a desigualdade entre as médias, temos

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geq (n\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n})\left(n\sqrt[n]{\frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2} \cdots \frac{1}{a_n}}\right) = n^2.$$

Para haver a igualdade, devemos ter $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$, donde $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$. Reciprocamente, é imediato verificar que se todos os números forem iguais, então teremos igualdade.

4.3 Exemplo 3.

(*Rússia/2002*) Para reais positivos a, b e c tais que $a + b + c = 3$, mostre que:

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geq ab + bc + ca.$$

Solução Façamos aparecer $a + b + c$. Para isso, é mais fácil mexer no lado direito. Daí, multiplicando a equação do enunciado por 2 e somando $a^2 + b^2 + c^2$, temos que:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2\sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 2\sqrt{c} \geq a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = (a + b + c)^2 = 3^2 = 9.$$

Daí, agora, basta fazer um M.A. $\geq$ M.G. (ou três) espertos para concluir:

$$\frac{a^2 + \sqrt{a} + \sqrt{a}}{3} \geq \sqrt[3]{a^2 \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{a}} = a \quad \Longrightarrow \quad a^2 + 2\sqrt{a} \geq 3a,$$

$$\frac{b^2 + \sqrt{b} + \sqrt{b}}{3} \geq \sqrt[3]{b^2 \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{b}} = b \quad \Longrightarrow \quad b^2 + 2\sqrt{b} \geq 3b,$$

$$\frac{c^2 + \sqrt{c} + \sqrt{c}}{3} \geq \sqrt[3]{c^2 \cdot \sqrt{c} \cdot \sqrt{c}} = c \quad \Longrightarrow \quad c^2 + 2\sqrt{c} \geq 3c.$$

A soma das três desigualdades acima, junto com o fato de $a + b + c = 3$, conclui a solução.

5 Problemas

5.1 Problema 1.

(*OCM/2011*) Qual é o valor mínimo da expressão

$$\frac{126+14x^4}{2011x^2}$$

no conjunto dos números reais diferentes de zero?

5.2 Problema 2.

(*Balkan/2014*) Sejam x, y e z números reais positivos tais que

$$xy+yz+zx=3xyz.$$

Prove que

$$x^2y+y^2z+z^2x \geq 2(x+y+z)-3$$

e determine quando a igualdade ocorre.

5.3 Problema 3.

Sejam x, y e z números reais positivos tais que

$$x+y+z=60.$$

Encontre o valor máximo de

$$xy^2z^3$$

5.4 Problema 4.

(Rússia 2019): Para números reais a, b e c quaisquer, cada um deles não menor que 1, prove que:

$$\frac{a+b+c}{4} \geq \frac{\sqrt{ab-1}}{b+c}+\frac{\sqrt{bc-1}}{c+a}+\frac{\sqrt{ca-1}}{a+b}.$$

5.5 Problema 5.

(Ásia-Pacífico): Se a, b e c são reais positivos, prove que:

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right) \geq 2\left(1+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right).$$

6 Bibliografia

6.1 Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo (POTI)

6.2 Algebra do Zero ao IME ITA Cone Sul EGMO - Armando Barbosa

6.3 Tópicos de Matemática (IME-ITA-Olimpíadas) - Carlos A. Gomes e José Maria Gomes.