Tabuleiros

Arthur Spuri

Introdução a Problemas de Tabuleiros

Problemas de tabuleiros são uma parte importante e recorrente de olimpíadas matemáticas. Esses problemas envolvem raciocínio lógico, criatividade e técnicas que nos permitem simplificar tais problemas.

Nesse material, veremos as técnicas mais comuns para resolver problemas de tabuleiros, contando com questões de exemplo para te ajudar a criar uma intuição e listas de exercício para você praticar!

Os tabuleiros mais comuns são os do tipo $n \times n$, como o tabuleiro de xadrez 8×8, mas podem aparecer em diversos tamanhos e formatos. Em muitos casos, utilizamos peças (como dominós, tetraminós ou cavalos de xadrez) para explorar propriedades matemáticas ou resolver desafios propostos.

A seguir, discutiremos algumas das técnicas mais importantes usadas para resolver problemas de tabuleiros.

Técnicas para Resolver Problemas de Tabuleiro

Aqui estão explicações das ideias por trás das principais técnicas utilizadas para resolver problemas de tabuleiro, escritas para quem está vendo isso pela primeira vez aprender e para os mais experientes relembrarem, começando das mais simples até as mais avançadas

1 Paridade

O que é?

Paridade é uma forma de analisar se algo é par ou ímpar. Nos problemas de tabuleiros, você pode usar isso para verificar se certos movimentos ou posições fazem sentido. Para mais detalhes, consulte o nosso material de paridades!

Problema 1:

É possível escrever os números de 1 a 100 nas células de um quadrado 10×10 de forma que:

1. Cada célula contenha exatamente um número;
2. Cada número seja usado exatamente uma vez;
3. Para quaisquer duas células que sejam simétricas em relação a qualquer uma das mediatrizes dos lados do quadrado 10×10, os números contidos nelas devem ter a mesma paridade.

(tente resolver!)

Solução:

Considere o sub-tabuleiro 5x5 com vértice no canto superior esquerdo do tabuleiro. Note que para cada número em uma casa desse sub-tabuleiro devemos ter 3 outros com mesma paridade nas seguintes casas dos outros sub-tabuleiros 5x5 com vértices em um dos 4 cantos do tabuleiro 10x10: seu reflexo pela mediatriz vertical, seu reflexo pela mediatriz horizontal e o reflexo pela mediatriz vertical do seu reflexo pela matriz horizontal. Temos então um total de 4 números de mesma paridade para cada número no sub-tabuleiro escolhido originamente. Agora, suponha que temos X números pares e $25 - X$ números ímpares nesse sub-tabuleiro, com X inteiro positivo. Então, teremos 4X números pares e $100 - 4X$ números ímpares no total. Sabemos, porém, que devemos ter $100/2 = 50$ números pares, logo: $4X = 50$ e $X = 50/4 = 12,5$, absurdo! Pois X é inteiro, logo não é possível.

Problema 2: (Ucrânia, 1997)

Considere um tabuleiro de tamanho AxB pintado de preto e branco de maneira usual(xadrez) e, em cada casa do tabuleiro, escreva um número inteiro, de modo que a soma dos números em cada linha e em cada coluna seja par. Demonstre que a soma dos números nas casas pretas é par

(Tente resolver!)

Solução:

Vamos chamar de p(N) a soma dos números nas casas pretas na linha N, P(N) a soma dos números nas casas pretas na coluna N, e b(N) e B(N) analogamente(mesma coisa, mas para as casas brancas). Também defina s(N) a soma total dos números em uma mesma linha N e S(N) a soma total dos números em uma mesma coluna N. Façamos o seguinte processo: Some todos os s(K) com K ímpar (evidentemente, K estará entre 0 e B) e subtraia disso a soma de todos os S(L), com L par (e entre 0 e A). Note que isso nos dará a soma de todos os p(K) menos a soma de todos os valores de P(L), pois todas as casas brancas irão se cancelar na soma(se não tiver entendido direito, tente desenhar um tabuleiro qualquer e pinte ele xomo um tabuleiro xadrez e teste). Além disso, sabemos que esse valor é par, pois nos foi dado que s(N) e S(N) são pares para todo N inteiro.

Seja então Sp a soma de todos os p(K) e SP a soma de todos os P(L), por simplicidade. Temos:

$$Sp - SP = 2C$$

Com C inteiro. Somemos então $2SP$ de cada lado, obtendo:

$$Sp + SP = 2(C + SP)$$

que é par, mas $Sp + SP$ é a soma de todas as casas pretas, logo a soma de todas as casas pretas é par, como desejado

Problema desafio: (Rússia, 2004)

É possível colocarmos números inteiros positivos nas casas de um tabuleiro $9X2024$, de modo que a soma dos números de cada linha e a soma dos números de cada coluna sejam primos? (tente resolver!)

Para ver a solução, consulte o final desse material

2 Coloração

O que é?

Coloração é como "pintar"o tabuleiro de forma que facilite a resolução do problema. A ideia mais comum é usar um padrão de xadrez (preto e branco) para separar as casas em dois grupos.

Problema 1:

Em um tabuleiro 8×8, duas casas opostas em relação ao centro são removidas. Você consegue cobrir o restante do tabuleiro com dominós 1×2? Por quê? (pense um pouco no problema antes de olhar a solução!)

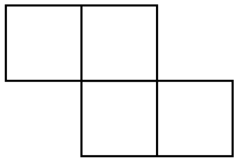
Solução:

Não é possível!

Pinte o tabuleiro como no xadrez. Para encontrar a peça oposta pelo centro do tabuleiro basta pegar o seu reflexo pela mediatriz vertical do tabuleiro e refletir pela mediatriz horizontal. Ao fazer esse processo, note que sempre obtemos uma peça de mesma cor que a inicial. Assim, removemos do tabuleiro duas casas de mesma cor. Note, no entanto, que um dominó sempre ocupa duas casas de cores diferentes, então se for possível preencher o tabuleiro com dominós, o número de casas de cada cor é igual. Inicialmente, tinhamos 32 peças de cada cor, e, como removemos duas peças de uma mesma cor, agora teremos 32 peças de uma cor e 30 da outra. Como $30 \neq 32$, é impossível preencher tal tabuleiro, como desejado.

Problema 2:

Um tabuleiro 2n x 2n é coberto, sem sair do tabuleiro e sem superposições, por retângulos 1 x 2 e peças como as da figura abaixo



As peças podem ser giradas ou dar voltas. Demonstre que na cobertura há ao menos (n+1) peças 1 x 2.

(pense antes de olhar a solução!)

Solução disponível em sites de solução de problemas olimpícos como o AOPS, disponível no Google. Esse problema é da Rioplatense de 2008, tente buscar por isso.

Problema desafio

Em cada quadrado de um jardim em forma de tabuleiro 2022×2022, inicialmente há uma árvore de altura 0. Um jardineiro e um lenhador alternam turnos jogando o seguinte jogo, com o jardineiro começando:

- O jardineiro escolhe um quadrado no jardim. A altura de cada árvore naquele quadrado e em todos os quadrados adjacentes (que existem no máximo oito) aumenta em uma unidade.
- O lenhador escolhe quatro quadrados diferentes no tabuleiro. A altura de cada árvore com altura positiva nesses quadrados diminui em uma unidade.

Dizemos que uma árvore é **majestosa** se sua altura é pelo menos 10^6. Determine o maior número K tal que o jardineiro possa garantir que eventualmente haverá K árvores majestosas no tabuleiro, independentemente de como o lenhador jogue.

a solução está no final do material

3 Indução Matemática

O que é?
Indução é uma técnica para provar algo por etapas. Primeiro, resolvemos o caso mais simples (o "caso base"). Depois, mostramos que, se funciona para n, também funciona para $n+1$.

Problema 1: Prove que todo tabuleiro $2^n x 2^n$ com uma casa preenchida é preenchível por L-triminós
(pense um pouco!)

Solução
A prova procede por indução em n. Para $n = 1$, o tabuleiro tem dimensão 2×2, e há exatamente uma casa removida, restando 3 casas. Uma única peça em “L” cobre essas 3 casas, o que completa o caso base. Para o passo indutivo, assume-se que seja possível cobrir um tabuleiro $2^k \times 2^k$ com uma casa removida usando as peças em “L”. Deseja-se mostrar que o mesmo pode ser feito para um tabuleiro $2^{k+1} \times 2^{k+1}$. Divide-se o tabuleiro maior em quatro quadrantes $2^k \times 2^k$. A casa removida original pertence a exatamente um desses quadrantes, que então pode ser coberto pelas peças em “L” pela hipótese de indução. Para que cada um dos outros três quadrantes também passe a ter uma casa removida, coloca-se uma peça em “L” no centro do tabuleiro, de modo que cada um desses três quadrantes perca uma casa de intersecção, tornando-se problemas equivalentes ao caso da hipótese de indução. Assim, cada um desses quadrantes é coberto separadamente, e a união das coberturas produz uma cobertura completa do tabuleiro de dimensão $2^{k+1} \times 2^{k+1}$. Por indução, conclui-se que o enunciado é válido para todo n.

Problema 2: OBM 2024 P3

Os números de 1 a 100 são colocados sem repetição em cada casinha de um tabuleiro 10×10. Um *caminho crescente* de tamanho k nesse tabuleiro é uma sequência de casinhas

$$c_1, c_2, \dots, c_k$$

tal que, para cada $i = 2, 3, \dots, k$, as seguintes propriedades são satisfeitas:

- As casinhas c_i e c_{i-1} compartilham um lado ou um vértice;
- O número em c_i é maior que o número em c_{i-1}.

Qual é o maior inteiro positivo k para o qual sempre podemos encontrar um caminho crescente de tamanho k, independentemente de como os números de 1 a 100 estão dispostos no tabuleiro?

(Pense um pouco!)

Solução:

O maior k é 4.

Comece por um tabuleiro 2x2. Chame as suas casas de A, B, C e D, tal que $A < B < C < D$. Note que independentemente da ordem delas, sempre é possível ir de uma casa do tabuleiro para outra, logo sempre poderemos fazer um caminho de 4 casas (ABCD).

Vamos levar essa ideia do 2x2 um passo a frente de forma a garantir que só seja possível fazer um caminho de 4 casas.

Considere a seguinte pintura do tabuleiro:

A	B	A	B	
C	D	C	D	
A	B	A	B	
C	D	C	D	

Figura 1: Exemplo de tabuleiro

Nas casas A colocamos os números de 1 a 25, nas casas B de 26 a 50, nas C de 51 a 75 e nas casas D de 76 a 100. Pelo padrão de pintura num caminho crescente duas casas consecutivas possuem cores diferentes.

Pela colocação dos números num caminho crescente nenhuma casa pode vir depois de uma casa D, pois todos os números ao redor são menores. Depois de uma casa C só pode vir uma D. Após uma casa B só pode vir uma C ou uma D. E de uma casa A vem uma casa B, C ou D. O maior caminho começando num D tem tamanho 1, começando no C tem tamanho 2 (CD), começando num B tem tamanho 3 (BCD) e começando num A tem tamanho 4 (ABCD).

Como sempre conseguimos encontrar um caminho com K=4 e existe uma organização que o maior k é 4, a resposta será 4, como desejado.

Comentário: a indução aqui foi mais sutil. Nós provamos que sempre dava para fazer 4 movimentos em um 2x2, e depois mostramos que esse número vale para qualquer organização(o 10x10 é apenas um caso particular, caso você não tenha notado) ao "copiar"um tabuleiro 2x2 e preencher o tabuleiro com essas cópias.

Problema desafio: Banco Ibero-Americana 1994

Faça o seguinte processo em uma malha infinita: pegue N quadrados brancos e junte eles de alguma forma, de modo que cada um deles tenha um lado em comum com ao menos um dos outros. Conte então o número de quadrados vazios que tem um lado em comum com ao menos um dos quadrados brancos. Por exemplo, um quadrado branco terá quatro quadrados vazios o rodeando, enquanto 2 terão 6 e 3 podem ter 7 ou 8 dependendo da organização. Qual o maior número de quadrados brancos que podem ser rodeados por n quadrados pretos?

(pense um pouco antes de olhar a solução!)

Solução no final do material

4 Invariantes

O que é?

Uma **invariante** é uma propriedade que permanece constante, mesmo que você faça várias ações ou movimentos permitidos no problema. Ela ajuda a determinar se algo é possível ou impossível e também permite resolver problemas até fora da matéria de tabuleiros. Para um estudo mais abrangente dessa técnica em específico, consulte nosso material de invariantes!

Problema 1:

Imagine que você está em um tabuleiro 1000x1000 e só pode dar passos que somam ou subtraem 3 ao valor da coordenada x ou 6 ao valor da coordenada y. Se você começa na casa (1,1), é possível você chegar à casa (877,999)?

(pense um pouco antes de olhar a solução!)

Solução: Não é possível! Observe que como estamos sempre somando múltiplos de 3 às coordenadas, o resto delas por três é invariante! No início, ambas as coordenadas possuem resto 1 por três. Veja que, como 999 possui resto zero por três, é impossível chegarmos nessa coordenada em y, e portanto é impossível chegarmos na casa (877,999).

Problema 2: (Torneio das Cidades, 2001) Em um tabuleiro 15x15 existem 15 torres que não se atacam. Então cada torre faz um movimento como aquele de um cavalo. Prove que após isso ser feito existe um par de torres que necessariamente se atacam(tente fazer antes de olhar a próxima página!).

Solução:

Vamos olhar para a soma das coordenadas (X,Y) das peças no tabuleiro, onde X=Y=1 é a casa inferior esquerda e X=Y=15 é a casa superior direita. Como cada torre ataca as casas de sua linha e coluna, então para nenhuma torre se atacar elas devem estar em linhas e colunas diferentes. Além disso, como temos 15 torres, 15 linhas e 15 colunas, cada linha e cada coluna deve ter exatamente uma torre, pois caso contrário teriamos necessariamente duas torres na mesma linha ou coluna, um absurdo.

Seja s a soma das coordenadas X e Y para uma torre e seja S a soma de todos os s. Sabemos que $S = 1+1+2+2+3+3+\ldots+14+14+15+15$, pois haverá exatamente uma torre com cada valor de Y entre 1 e 15 e cada valor de X entre 1 e 15. Note agora que, por definição, o movimento do cavalo em um tabuleiro de xadrez pode ser descrito pela transformação das coordenadas cartesianas de uma posição inicial (x, y) para uma posição final (x', y'). Os movimentos possíveis são dados por:

$$(x', y') \in \begin{Bmatrix} (x+2, y+1), & (x+2, y-1), \\ (x-2, y+1), & (x-2, y-1), \\ (x+1, y+2), & (x+1, y-2), \\ (x-1, y+2), & (x-1, y-2) \end{Bmatrix}$$

Agora, note que isso sempre altera o valor de s em um número ímpar. Essa é a nossa invariante! Agora, veja que, como temos 15 torres, alteramos o valor de S em um número ímpar uma quantidade ímpar de vezes, logo S também mudará de valor em um número ímpar e vai mudar sua paridade, mas a soma S tem sempre o mesmo valor para uma organização em que as torres não se atacam, e como o novo valor de S terá paridade diferente do valor original, não há como eles serem o mesmo número! Portanto, não existe como a nova organização satisfazer a condição de que nenhuma torre se ataca.

Problema desafio: (Shortlist IMO, C1) Sejam m e n inteiros positivos maiores que 1. Em cada quadrado unitário de uma grade $m \times n$ há uma moeda com a face "coroa"voltada para cima. Uma jogada consiste nos seguintes passos:

1. Selecionar um quadrado 2×2 na grade;
2. Virar as moedas nos quadrados superior esquerdo e inferior direito;
3. Virar a moeda em um dos quadrados superior direito ou inferior esquerdo.

Determine todos os pares (m,n) para os quais é possível que todas as moedas mostrem a face "cara"para cima após um número finito de jogadas.

(Tente resolver!)

A solução pode ser encontrada no final do material

5 Soluções problemas desafio

Solução problema desafio de paridades:

Afirmo que não é possível que tal organização exista!

Prova: Suponha, por absurdo, que existe uma organização desse tipo. O ponto importante a se notar aqui é que, como os números em cada casa são inteiros positivos, a menor soma possível em uma linha ou coluna qualquer é $9x1 = 9$. Como essa soma deve ser um número primo e deve ser maior ou igual a 9, segue que ela deve ser ímpar, pois o único primo par é o 2. Calculemos então a paridade da soma de todos os números do tabuleiro, de duas formas diferentes.

Forma 1: Somaremos o valor da soma total dos números de cada coluna, para todas as colunas.

Veja que, como temos 9 colunas, cada uma tendo soma ímpar, a soma total será ímpar, pois somar um número ímpar uma quantidade ímpar de vezes resulta em um número ímpar.

Resultado na forma 1: a soma total é ímpar.

Forma 2: Somaremos o valor da soma total dos números de cada linha, para todas as linhas.

Veja que, como temos 2024 linhas, cada uma com soma ímpar, pelo mesmo argumento que na Forma 1 obtemos que a soma total será par.

Resultado na forma 2: a soma total é par.

Perceba que o resultado da forma 1 é diferente do resultado da soma 2, mas ambos resultam no mesmo número, logo temos um número que é par e ímpar ao mesmo tempo, um completo absurdo! Logo não existe tal organização, como desejado.

Solução problema desafio de colorações

Busque a shortlist IMO de 2022, o problema é o C3. A solução está lá

Solução problema desafio de indução:

Afirmo que o máximo de casas acontecerá quando todos os quadrados brancos estiverem em uma mesma reta, e portanto, teremos $2N+2$ quadrados vazios.

Prova: Façamos o caso inicial $N=2$. é evidente que o máximo ocorre quando os quadrados estão alinhados pois eles têm de estar alinhados. Agora assuma que vale para um N. Perceba que o máximo de casas que podemos adicionar ao encaixar um novo quadradinho branco é 2, pois um dos lados do quadradinho está necessariamente preenchido por outro deles, e o lado oposto ao que está em contato possuirá um quadrado vazio que já existia antes, na posição que encaixamos o novo quadrado branco. Agora, note que adicionar mais um quadrado à linha de quadrados brancos aumentará o número de quadrados rodeando em 2, e como esse é o máximo que se pode aumentar, teremos o novo máximo, que será $N+2+2=(N+1)+2$, como desejado.

Solução problema desafio de invariantes:

Pesquise Shortlist IMO 2023. Esse é o problema C1, a solução está lá

6 Locais para buscar problemas

Nível 1: Faça provas anteriores da OBM e OBMEP nível 1, Olimpíada de Maio, Rioplatense nos níveis A e 1, e OMCPLP.

Nível 2: Faça provas anteriores da OBM nível 2, Olimpíada de Maio, Rioplatense nos níveis 1 e 2, OMCPLP, Cone Sul, Shortlist IMO de anos anteriores, problemas C1-C5

Nível 3: Faça provas anteriores da OBM nível 3, Rioplatense nos níveis 2 e 3, Cone Sul, Iberoamericana de matemática, IMO e Shortlist IMO, qualquer problema de combinatória.

Referências:
Shortlist IMO 2022
Shortlist IMO 2023
Material do Israel Dourado de combinatória