Equação de Pell

Sofia Pinheiro

1 Introdução

A Equação de Pell é um problema clássico da teoria dos números que desafia matemáticos há séculos. O estudo dessa equação destaca-se por sua simplicidade aparente e pela profundidade de suas aplicações, conectando tópicos como frações contínuas, números quadráticos e estruturas algébricas. Seu interesse não é apenas teórico, pois ela também surge em problemas geométricos, criptografia e sistemas dinâmicos.

2 Equação de Pell generalizada

Uma equação de Pell é definida da seguinte forma:

$$x^2 - Dy^2 = M,$$

onde D é um número inteiro positivo que não é um quadrado perfeito, e $x, y \in \mathbb{Z}$ são números inteiros. O objetivo é determinar todas as soluções inteiras (x, y) que satisfazem a equação.

Toda equação de Pell $x^2 - D \cdot y^2 = 1$ admite infinitas soluções

$$(x, y)$$

inteiras positivas. Além disso, sendo

$$(x_1, y_1)$$

a solução com x_1 mínimo (chamada de solução fundamental), todas as demais soluções são da forma:

$$x_n + y_n \cdot \sqrt{D} = (x_1 + y_1 \cdot \sqrt{D})^n$$

sendo n um número inteiro positivo.

Por exemplo, sabendo que $(2, 1)$ é solução da equação $x^2 - 3 \cdot y^2 = 1$, então podemos concluir que todas as soluções

$$(x_n, y_n)$$

dessa equação de Pell são da forma: $x_n + y_n \cdot \sqrt{3} = (2 + 1 \cdot \sqrt{3})^n = (2 + \sqrt{3})^n$ Por exemplo, para $n = 2$, teríamos a solução $(x_2, y_2) = (7, 4)$.

Notemos que as soluções (x_n, y_n) acima são soluções da equação de Pell citada não é tão difícil, uma vez que por expansão binomial, temos que:

$x_n + y_n \cdot \sqrt{D} = (x_1 + y_1 \cdot \sqrt{D})^n \implies$
$x_n - y_n \cdot \sqrt{D} = (x_1 - y_1 \cdot \sqrt{D})^n \implies$
$(x_n + y_n \cdot \sqrt{D}) \cdot (x_n - y_n \cdot \sqrt{D}) = \left[(x_1 + y_1 \cdot \sqrt{D}) \cdot (x_1 - y_1 \cdot \sqrt{D})\right]^n] \implies$
$(x_n)^2 - D \cdot (y_n)^2 = \left[(x_1)^2 - D \cdot (y_1)^2\right]^n = 1^n \implies$
$(x_n)^2 - D \cdot (y_n)^2 = 1$

Então, encontrando a solução minimal, podemos encontrar todas as solução da equação! Mas nem sempre encontrar a solução minimal é fácil. Muitas vezes a solução é grande e fica inviável testar vários casos. Mostraremos um método que pode facilitar os cálculos.

Podemos definir x_n e y_n de maneira recorrente, tomando o conjugado:

$$x_n + y_n\sqrt{D} = (x_1 + y_1\sqrt{D})^n \implies x_n - y_n\sqrt{D} = (x_1 - y_1\sqrt{D})^n$$

$$\implies x_n = \frac{(x_1 + y_1\sqrt{D})^n + (x_1 - y_1\sqrt{D})^n}{2} \quad \text{e} \quad y_n = \frac{(x_1 + y_1\sqrt{D})^n - (x_1 - y_1\sqrt{D})^n}{2\sqrt{D}}.$$

Interpretando essas fórmulas como soluções de recorrências lineares, não é difícil perceber que x_n e y_n satisfazem a recorrência $u_{n+2} - 2x_1 u_{n+1} + u_n = 0$, $\forall\, n \geq 1$. Um método rápido de encontrar a solução minimal é olhando para a fração contínua de $\sqrt{D}$. Escrevendo

$$\sqrt{D} = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k],$$

então

$$\frac{x_1}{y_1} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{k-1}}}}}, \quad \text{se } k \text{ é par,}$$

$$\frac{x_1}{y_1} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{2k-1}}}}}, \quad \text{se } k \text{ é ímpar.}$$

Por exemplo, para encontrar a solução minimal de $x^2 - 41y^2 = 1$, basta escrever a fração contínua de $\sqrt{41}$:

$$\sqrt{41} = 6 + (\sqrt{41} - 6) = 6 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{\sqrt{41}-6}} = 6 + \cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{41}+6}{5}} = 6 + \cfrac{1}{\frac{1}{5}(\sqrt{41}+6)}.$$

$$= 6 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\sqrt{41}+4}} = 6 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\sqrt{41}-6}}}.$$

E então começará a repetir de modo que $\sqrt{41} = [6; 2, 2, 12]$. Logo, sendo o período 3 (ímpar), temos que ir até a_5 para achar a solução minimal:

$$\frac{x_1}{y_1} = 6 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{12 + \cfrac{1}{2}}}} = \frac{2049}{320}.$$

Portanto, a solução minimal é $(2049, 320)$, e seria inviável encontrá-la à mão!

3 Exemplos

3.1 Exemplo 1.

Prove que existem infinitos n tais que $1 + 2 + 3 + \cdots + n$ é um quadrado perfeito.

Solução: Sabemos que

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Logo, para essa soma ser um quadrado perfeito, devemos ter:

$$\frac{n(n+1)}{2}=m^2 \implies n^2+n=2m^2 \implies 4n^2+4n=8m^2$$

$$\implies (2n+1)^2=8m^2+1 \implies (2n+1)^2-2(2m)^2=1,$$

que é a equação de Pell $x^2-2y^2=1$, que sabemos que possui infinitas soluções.

Mas observe que deveremos garantir que existem infinitas soluções com x ímpar e y par. Analisando a paridade de cada lado, x é sempre ímpar e, analisando módulo 8, temos que y tem que ser par. Logo, temos infinitos valores de n.

3.2 Exemplo 2.

Prove que existem infinitos n tais que n^2+1 divide $n!$.

Solução: Sabemos que a equação $n^2+1=2m^2$ possui infinitas soluções. Mostraremos que para pares (n,m) suficientemente grandes que satisfaçam essa equação também satisfazem que $2m^2 \mid n!$.

Primeiramente, como 4 não divide n^2+1, teremos que m é sempre ímpar. Logo, basta demontrarmos que $m^2 \mid n!$, já que claramente $n!$ tem fator 2.

Note que $m \le n$. Sabemos que se m é composto, então $m \mid (m-1)!$. Logo, $m^2 \mid m! \mid n!$ e como $m \le n$, $m^2 \mid n!$, como desejado.

Veja que para m primo isso não é verdade. Logo, basta mostrarmos que existem infinitas soluções de $n^2+1=2m^2$ com m composto. Sabemos que as soluções da equação são dadas por $n_k+m_k\sqrt{2}=(1+\sqrt{2})^{2k+1}$ e que a sequência (m_k) satisfaz $m_{k+2}=6m_{k+1}+m_k$, com $m_0=1, m_1=7$. Portanto, m_1 é múltiplo de 7 e, como toda recorrência módulo algum número é periódica, segue que existem infinitos múltiplos de 7. Portanto, temos infinitos valores de m compostos, como desejado.

3.3 Exemplo 3.

Resolva a equação $x^2-5y^2=4$ nos inteiros positivos.

Solução: O primeiro passo é encontrar a solução mínima da equação $x^2-5y^2=1$. Testando os valores de y, temos que a solução mínima é $9+4\sqrt{5}$. Pela equação de Pell, as soluções de $x^2-5y^2=4$ são dadas por

$$x_n+y_n\sqrt{5}=(u+v\sqrt{5})(9+4\sqrt{5})^n,$$

em que $u,v>0$ são tais que $u^2-5v^2=4$ e $u+v\sqrt{5}<(9+4\sqrt{5})\sqrt{4}=18+8\sqrt{5}$. Note que $18^2-5\cdot 8^2=4$, de modo que se tiver alguma outra solução menor, devemos ter $v<8$. Testando $v=0,1,2,\ldots,7$, obtemos as soluções $2, 3+\sqrt{5}$ e $7+3\sqrt{5}$. Portanto, as soluções da equação são dadas por

$$x_n+y_n\sqrt{5}=(3+\sqrt{5})(9+4\sqrt{5})^n,$$

$$x_n-y_n\sqrt{5}=(7+3\sqrt{5})(9+4\sqrt{5})^n,$$

$$x_n+y_n\sqrt{5}=2(9+4\sqrt{5})^n.$$

3.4 Exemplo 4.

Determine todos os triângulos retângulos com lados inteiros cujos catetos são números consecutivos.

Solução: Por Pitágoras, basta encontrarmos as soluções da equação $n^2+(n+1)^2=m^2$. Reescrevendo a equação, obtemos

$$n^2+(n+1)^2=m^2 \implies 2n^2+2n+1=m^2 \implies 4n^2+4n+2=2m^2 \implies (2n+1)^2-2m^2=-1.$$

Então, devemos olhar para a equação $x^2-2y^2=-1$, em que x é sempre ímpar, mas veja que x é sempre ímpar. Logo, basta encontrarmos todas as soluções. Novamente, a minimal de $x^2-2y^2=-1$ é $1+3\sqrt{2}$ e então toda solução de $x^2-2y^2=-1$ se escreve como:

$$u_k+v_k\sqrt{2}=(u+v\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})^k,$$

com $u,v>0$ e $u+v\sqrt{2}<(3+2\sqrt{2})\sqrt{11}=u^2-2v^2=-1$. Da desigualdade, obtemos $v<\frac{3}{\sqrt{2}}+2<5$, e então basta testarmos $v=0,1,2,3,4$. Analisando todos os casos, obtemos a solução $1+\sqrt{2}$.

Portanto, as soluções são $u_k+v_k\sqrt{2}=(1+\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})^k$ e, usando que $3+2\sqrt{2}=(1+\sqrt{2})^2$, temos que:

$$u_k+v_k\sqrt{2}=(1+\sqrt{2})^{2k+1}.$$

Logo, os triângulos são os triângulos com lados $n=\frac{u_k-1}{2}$, $n+1=\frac{u_k+1}{2}$ e $m=v_k$

4 Problemas

1. **(Irlanda 1995)** Encontre todos os inteiros (x,y) tais que a equação $x^2+xy+y^2=1$ possua infinitas soluções (x,y) inteiras.

   (a) Seja k um inteiro positivo. Mostre que a equação $x^2-(k^2-1)y^2=-1$ não possui solução inteira.

   (b) Seja k um inteiro diferente de quadrado perfeito. Mostre que existe A tal que a equação $x^2-(a^2-1)y^2=k$ não possui solução inteira para todo $a\geq A$.

2. **(China TST 2018)** Determine todos os pares de inteiros positivos (x,y) tais que $(xy+1)(xy+x+2)$ é um quadrado perfeito.

3. **(Romênia TST 2011)**(Romênia TST 2011) Mostre que existem infinitos inteiros positivos n tais que n^2+1 possui dois divisores positivos cuja diferença é n.

4. **(Sérvia TST 2019)** Resolva nos inteiros não negativos a equação $2^x=5^y+3$.

5. **(TCS 2013)** Encontre todas as triplas de inteiros não negativos (k,m,n) tais que $2^k+7^m-9^n=0$.

6. Prove que a única solução nos inteiros positivos para a equação $5^a-3^b=2$ é $a=b=1$

5 Bibliografia

5.1 MARTINEZ, Fabio Brochero; et al. Teoria dos números: um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro. 3 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.

5.2 Teoria dos Números do Zero ao IME ITA Cone Sul EGMO - Armando Barbosa

5.3 Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo (POTI)