Lemas de Razões

João Pedro de Almeida da Silva

1 Introdução

Nesse material, iremos explorar algumas relações envolvendo razões de segmentos. Por esse motivo, é importante que antes de prosseguir, o leitor domine alguns conceitos básicos sobre trigonometria, como a lei dos senos e fórmulas trigonométricas.

Ademais, começaremos por teoremas mais básicos, para assim, começar a utilizar a função "Ratio Lemma", que será vista na seção 3.

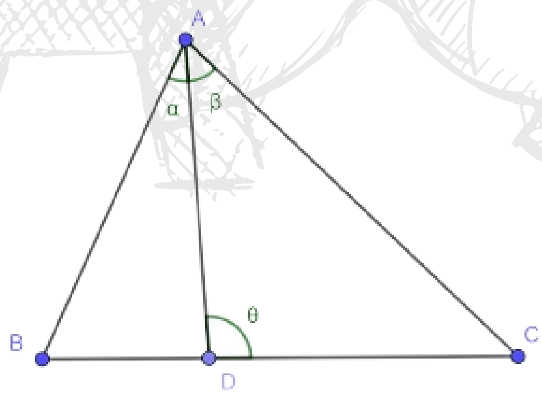
2 Lemas de Razões

Vamos começar introduzindo alguns teoremas que irão nos auxiliar em definições futuras deste material:

Teorema da ceviana qualquer:

Seja $\triangle ABC$ um triângulo, e D um ponto sobre o lado BC. A seguinte condição é satisfeita: $\frac{BD}{CD} = \frac{BA}{CA} \cdot \frac{sen\ \angle BAD}{sen\ \angle CAD}$.

Prova.

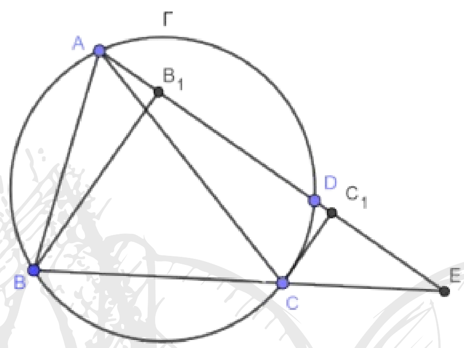


Defina como $\alpha = \angle BAD$, $\beta = \angle CAD$ e $\theta = \angle ADC$. Por lei dos senos no $\triangle ADC$, temos que $\frac{AC}{DC} = \frac{sen\ \theta}{sen\ \beta}$. Por lei dos senos no $\triangle ADB$, temos que $\frac{AB}{BD} = \frac{sen\ 180 - \theta}{sen\ \alpha} = \frac{sen\ \theta}{sen\ \alpha}$. Multiplicando as duas leis do senos, concluímos que $\frac{AC}{DC} \cdot \frac{BD}{AB} = \frac{sen\ \theta}{sen\ \beta} \cdot \frac{sen\ \alpha}{sen\ \theta} = \frac{sen\ \alpha}{sen\ \beta}$, isso é, $\frac{BD}{CD} = \frac{BA}{CA} \cdot \frac{sen\ \angle BAD}{sen\ \angle CAD}$, como queríamos.

Desse teorema, é possível concluir vários outros fatos interessantes, como, por exemplo, a ceva trigonométrica. Por enquanto, vamos guardá-lo para mostrar outros resultados.

Lema 1.
Seja Γ uma circunferência com pontos A, B, C, D, AD não paralelo a BC. Sendo E o encontro de AD com BC, podemos concluir que:
$\frac{BE}{CE} = \frac{BA}{CA} \cdot \frac{BD}{CD}$.

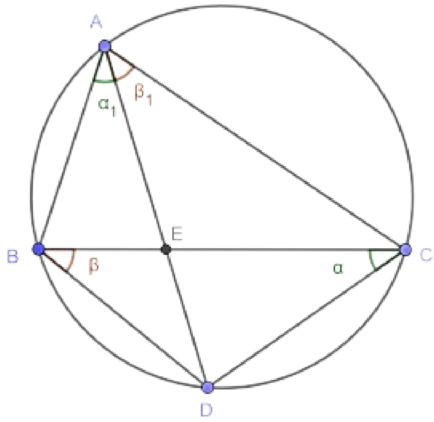
Prova:



Defina como B_1 e C_1 os pés das alturas por B e C aos triângulos $\triangle ABD$ e $\triangle ACD$, respectivamente. Veja que, por semelhança, $\frac{BE}{CE} = \frac{BB_1}{CC_1} = \frac{[\triangle ABD]}{[\triangle ACD]} = \frac{\frac{sen \ \angle ABD \cdot AB \cdot BD}{2}}{\frac{sen \ \angle ACD \cdot AC \cdot CD}{2}}$, e como $\#ABCD$ é cíclico, temos $sen \ \angle ABD = sen \ \angle ACD$, fazendo com que $\frac{BE}{CE} = \frac{BA}{CA} \cdot \frac{BD}{CD}$, como queríamos.

Lema 2.
Seja ω uma circunferência com corda BC. Pegue pontos A, D em ω de forma que A, D não estejam no mesmo arco definido por BC. Sendo E o encontro de BC com AD, segue que:
$\frac{AB}{AC} \cdot \frac{DB}{DC} = \frac{BE}{CE}$.

Prova:



Defina como $\alpha = \angle BAD$ e $\beta = \angle CAD$. Pela ciclicidade, já concluímos que $\angle BCD = \alpha$ e $\angle CBD = \beta$. Agora, por Ceviana Qualquer em $\triangle ABC$, temos $\frac{BE}{CE} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{sen\ \alpha}{sen\ \beta}$. Por lei dos senos em $\triangle BCD$, temos $\frac{BD}{CD} = \frac{sen\ \alpha}{sen\ \beta}$. Substituindo a fração dos senos, temos $\frac{BE}{CE} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{BD}{CD}$, que é exatamente o que desejávamos provar.

Provado tais lemas, vamos introduzir uma definição que facilitará a utilização do lema 1 e 2.

3 A função Ratio Lemma

Na geometria, vemos muitas vezes o uso das funções, isso para qualquer transformação feita no plano. Como exemplo, temos as involuções.

3.1 Definição

Seja dada uma circunferência Γ no plano e uma corda BC dessa circunferência. Sendo $\mathbb{A}$ o conjunto de pontos em Γ e em BC, e $\mathbb{R}_+$ o conjuntos dos reais não negativos, definimos a função "Ratio Lemma"como uma função tal que $f : \mathbb{A} \to \mathbb{R}_+$ e $f(P) = \frac{PB}{PC}$, onde $P \in \mathbb{A}$.

Dado a definição, podemos reescrever os lemas 1 e 2:

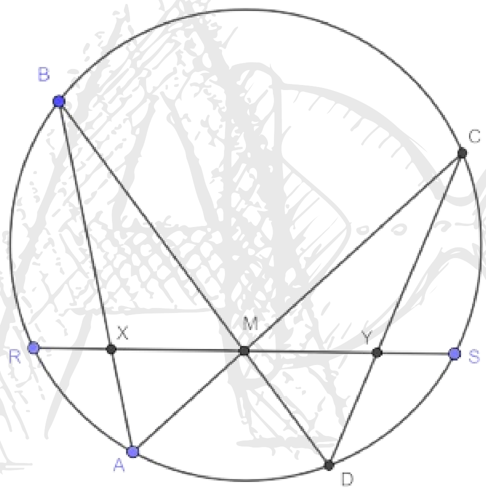
Lema 1 (Reescrito).
Seja Γ uma circunferência com pontos A, B, C, D, AD não paralelo a BC. Sendo E o encontro de AD com BC, podemos concluir que:
$f(E) = f(D) f(A)$.

Alteramos apenas as razões, que ficaram num formato de função. Vale ressaltar que utilizamos a função com a circunferência Γ e reta BC. Abaixo, vemos o lema 2:

Lema 2 (Reescrito).
Seja ω uma circunferência com corda BC. Pegue pontos A, D em ω de forma que A, D não estejam no mesmo arco definido por BC. Sendo E o encontro de BC com AD, segue que: $f(E) = f(D)f(A)$.

Problema 1. (Teorema da Borboleta) Seja M o ponto médio de uma corda RS em um círculo. Duas outras cordas AC e BD passam por M e AB e CD intersectam RS em X e Y, respectivamente. Prove que M é ponto médio de XY.

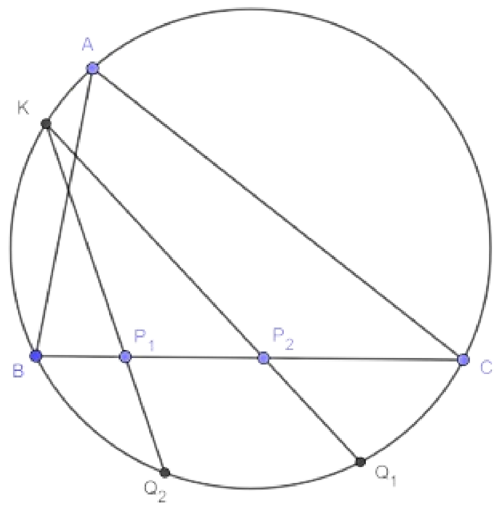
Solução.



Vamos utilizar a corda RS e a circunferência para o uso da nossa função "Ratio Lemma", isso é, $f(P) = \frac{PR}{PS}$, para P um ponto no círculo ou em RS. Temos que $f(M) = f(B)f(D)$ e $f(M) = f(A)f(C)$, mas M é ponto médio de RS, então $f(M) = \frac{MR}{MS} = 1$. Assim, $f(A)f(C) = f(B)f(D) = 1$, então $f(A)f(B)f(C)f(D) = 1$. Agora, veja que $f(X) = f(A)f(B)$ e $f(Y) = f(C)f(D)$, então $f(X)f(Y) = f(A)f(B)f(C)f(D) = 1$. Logo, $\frac{XR}{XS} \cdot \frac{YR}{YS} = 1$, mas como X, Y estão em RS, isso só ocorre se $XR = YS$, fazendo com que $XM = YM$, como queríamos.

Problema 2. Seja $\triangle ABC$ um triângulo de circuncírculo ω. Defina os pontos P_1 e Q_1 em BC e ω, respectivamente, de tal forma que $\angle BAP_1 = \angle CAQ_1$. Defina P_2 e Q_2 de maneira análoga. Prove que P_1Q_2 e P_2Q_1 concorrem em ω.

Solução.



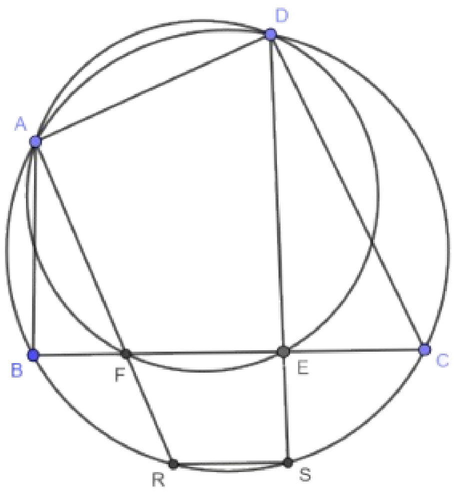
Chame de K a intersecção de ω com P_1Q_2 e defina a função Ratio Lemma sendo $f(P) = \frac{PB}{PC}$, para P um ponto em ω ou BC. Temos que $f(P_1) = f(Q_2)f(K)$, e queremos mostrar que $f(P_2) = f(Q_1)f(K)$. Veja que $f(K) = \frac{f(P_1)}{f(Q_2)}$, mas se traçarmos a paralela a BC por Q_1 e Q_2, veja que, se os pontos de intersecção com ω forem R_1 e R_2, respectivamente, então $A - P_1 - R_1$ e $A - P_2 - R_2$, pela condição de ângulos dada no enunciado. Assim, $f(P_1) = f(A)f(R_1)$ e $f(P_2) = f(A)f(R_2)$, mas perceba que é possível concluir por congruência que $\triangle BQ_1C \cong \triangle CR_1B$ e $\triangle BQ_2C \cong \triangle CR_2B$, fazendo com que $f(Q_1) = \frac{1}{R_1}$ e $f(Q_2) = \frac{1}{R_2}$. Logo, substituindo, chegamos que $f(P_1) = f(A)f(R_1) = \frac{f(A)}{f(Q_1)}$ e $f(P_2) = f(A)f(R_2) = \frac{f(A)}{f(Q_2)}$, então $f(A) = f(P_1)f(Q_1) = f(P_2)f(Q_2)$, isso é, $\frac{f(Q_1)}{f(P_2)} = \frac{f(Q_2)}{f(P_1)} = \frac{1}{f(K)}$. Assim, chegamos que $\frac{1}{f(K)} = \frac{f(Q_1)}{f(P_2)}$, o que implica $f(P_2) = f(Q_1)f(K)$, como queríamos demonstrar.

3.2 Trabalhando com mais de um círculo

Nessa seção, vamos explorar um pouco mais nossa da função em circunferências.

Teorema.
Seja $\#ABCD$ um quadrilátero cíclico em ω. Defina a função $f(P) = \frac{PB}{PC}$, para P um ponto em BC ou ω. Sendo E e F pontos em BC, $\#ADEF$ é cíclico se, e somente se, $f(A)f(D) = f(E)f(F)$.

Prova:

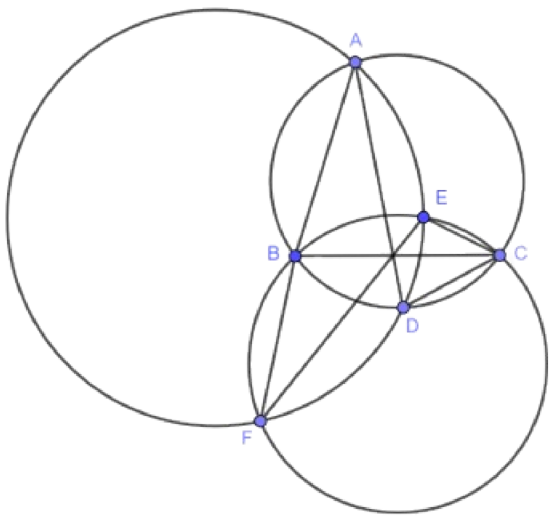


Chame de R e S as intersecções de AF e DE com ω. Temos que $f(F) = f(A)f(R)$ e $f(E) = f(D)f(S)$. Assim, $f(R) = \frac{f(F)}{f(A)}$ e $f(S) = \frac{f(E)}{f(D)}$, então se provarmos que $f(R) = \frac{1}{f(S)}$, a prova acaba. Veja que, $f(R) = \frac{1}{f(S)}$ se, e somente se, $RS//BC$, e isso é verdade, por Reim. Logo, conseguimos concluir que $\#ADEF$ é cíclico se, e somente se, $f(A)f(D) = f(E)f(F)$.

Teorema.

Sejam $\#ABCD$ e $\#BCEF$ dois quadriláteros cíclicos. Defina a função $f(P) = \frac{PB}{PC}$, para P um ponto em BC ou nas circunferências de $\#ABCD$ e $\#BCEF$. O quadrilátero $\#ADEF$ é cíclico se, e somente se, $f(A)f(D) = f(E)f(F)$.

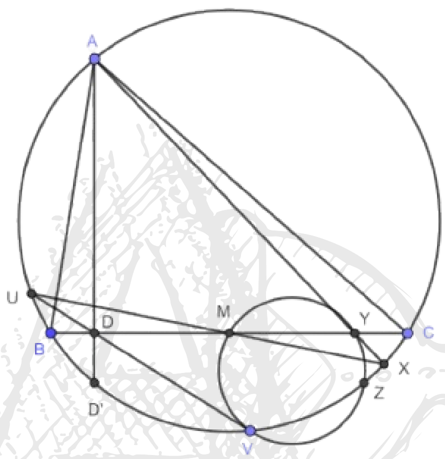
Prova:



Pelo teorema dos eixos radicais, $\#ADEF$ é cíclico se, e somente se, AD, EF e BC concorrem, isso é, $\#ADEF$ é cíclico se, e somente se, $f(A)f(D) = f(E)f(F)$.

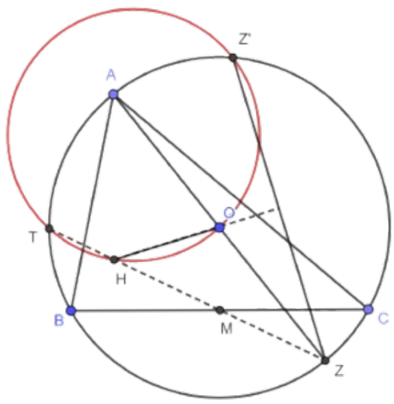
Problema 3. Seja $\triangle ABC$ com AD sendo um altura. V é um ponto em $(\triangle ABC)$ e VD intersecta $(\triangle ABC)$ em U. Sendo M o ponto médio de BC, temos que UM intersecta $(\triangle ABC)$ em X, e AX intersecta BC em Y. Seja $(\triangle YVM)$ intersecção $(\triangle ABC)$ o ponto Z, e Z' a reflexão de Z por OH, O circuncentro e H ortocentro. Finalmente, a segunda intersecção $(\triangle Z'OH)$ com $(\triangle ABC)$ é T. Prove que TZ passa por M.

Solução.



Vamos iniciar mostrando que Z é a antípoda do A. Defina a função $f(P) = \frac{PB}{PC}$, para P um ponto em $(\triangle Z'OH)$, $(\triangle ABC)$ ou BC. Temos que $f(U) = \frac{f(D)}{f(V)}$, $f(X) = \frac{f(M)}{f(U)} = \frac{1}{f(U)} = \frac{f(V)}{f(D)}$.

Assim, $f(Y) = f(X)f(A) = \frac{f(A)f(V)}{f(D)}$. Como $f(V)f(Z) = f(M)f(Y)$, temos que $f(Z) = \frac{f(M)f(Y)}{f(V)} = \frac{f(Y)}{f(V)} = \frac{\frac{f(A)f(V)}{f(D)}}{f(V)} = \frac{f(A)}{f(D)}$. Sendo D' a intersecção de AD com $(\triangle ABC)$, Z é a antípoda $\leftrightarrow ZD'//BC$, isso é, precisamos que $f(Z) = \frac{1}{f(D')}$, que é verdade, pois $f(D) = f(D')f(A)$, $\frac{1}{f(D')} = \frac{f(A)}{f(D)}$.



Para próxima parte, não usaremos Ratio Lemma, mas é interessante que o leitor tente resolver.

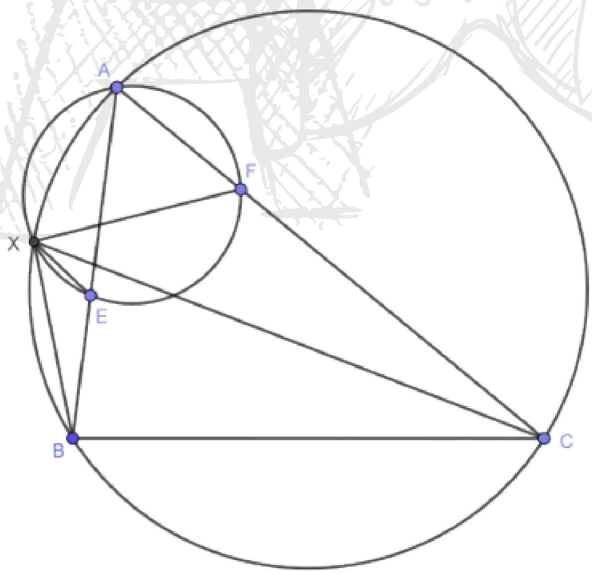
Temos que $\angle Z'HO = \angle ZHO = \alpha$, e por ciclicidade, $\angle Z'HO = \angle ZTO$. Como $OZ' = OT$, $\angle Z'HO = \angle ZTO = \angle OZ'T = \alpha$, fazendo com que $\angle THZ' = \angle TOZ' = 180 - 2\alpha$, e como $\angle Z'HO = \angle ZHO = 2\alpha$, temos $\angle THZ' + \angle Z'HO + \angle ZHO = 180 - 2\alpha + \alpha + \alpha = 180$. Portanto, $T - H - Z$, mas como já é conhecido, $Z - M - H$, então $Z - M - T$, como queríamos.

3.3 Aplicações com pequenas ideias de Roto-Homotetia

Não iremos realmente precisar de roto-homotetia para aplicação dos lemas a seguir, mas é interessante perceber a ligação entre os conteúdos.

Teorema.
Seja $\triangle ABC$ um triângulo de circuncírculo Γ. Pegue E e F pontos em AB e AC, respectivamente, e X o segundo ponto de intersecção de $(\triangle AEF)$ com Γ. Defina a função $f(P) = \frac{PB}{PC}$, para P um ponto em BC ou Γ. Temos que:
$f(X) = \frac{BE}{CF}$.

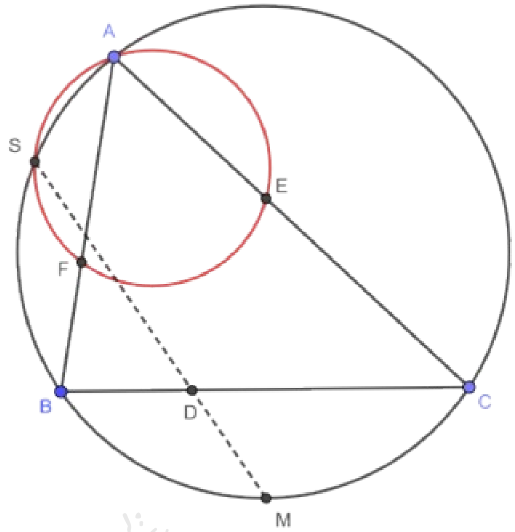
Prova:



Veja que, por ciclicidade, $\angle XBA = \angle XCA$ e $\angle XEA = \angle XFA$, fazendo com que $\angle XEB = \angle XFC$, e assim, concluindo que $\triangle XEB \sim \triangle XFC$. Logo, $f(X) = \frac{XB}{XC} = \frac{BE}{CF}$, como queríamos.

Problema 4. (Propriedade de Sharky Devil) Seja $\triangle ABC$ um triângulo com circuncírculo ω. O incírculo de $\triangle ABC$ tangencia BC, AC e AB em D, E e F, respectivamente. Seja S a intersecção de ω com $(\triangle AEF)$ e M o ponto médio do arco BC que não contém A. Prove que S, D e M concorrem.

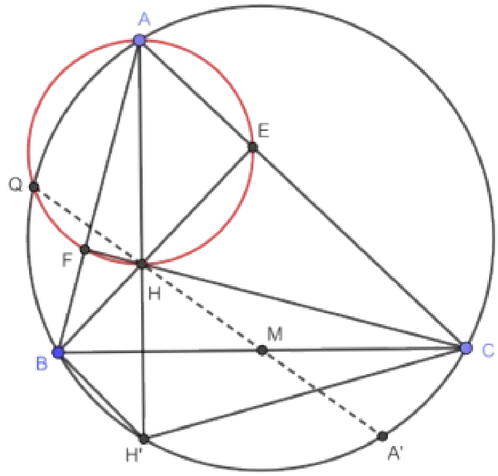
Solução.



Defina a função $f(P) = \frac{PB}{PC}$, para P um ponto em ω ou BC. Queremos mostrar que $f(D) = f(M)f(S)$, mas $f(M) = 1$, então mostrar que $f(D) = f(S)$. Veja que $BD = BF$ e $CD = CE$, por teorema do bico, então $\frac{BD}{CD} = \frac{BF}{CE}$, mas $\frac{BD}{CD} = f(D)$ e $\frac{BF}{CE} = f(S)$, logo, $f(D) = f(S)$, concluindo a prova.

Problema 5. (Propriedade de Queue) Seja $\triangle ABC$ um triângulo de circuncírculo ω. Os pés das alturas de $\triangle ABC$ por B e C são, respectivamente, E e F. Seja Q a intersecção de ω com $(\triangle ABC)$, M o ponto médio de BC e A' a antípoda do A em ω. Prove que M, A' e Q concorrem.

Solução.



Nomeie o ortocentro de H e a reflexão de H por BC como H'. Defina a função $f(P) = \frac{PB}{PC}$, para P um ponto em ω ou BC. Queremos que $f(M) = f(Q)f(A')$, mas $f(M) = 1$, então $f(A') = \frac{1}{f(Q)}$, mas $f(A') = \frac{1}{f(H')}$, como já vimos em questões anteriores, então precisamos mostrar que $f(Q) = f(H')$. Para $f(Q) = f(H')$, é necessário $\frac{BF}{CE} = \frac{BH'}{CH'}$. Como H' é a reflexão de H por BC, então queremos $\frac{BF}{CE} = \frac{BH}{CH}$, que é verdade, pois $\triangle BFH \sim \triangle CEH$.

4 Problemas Propostos

Problema 1. (Teorema de Pascal) Sejam A, B, C, D, E e F pontos em uma circunferência. As intersecções de AC com BF, AD com BE e DF com CE são, respectivamente, X, Y e Z. Prove que $X-Y-Z$.

Problema 2. Seja $\triangle ABC$ um triângulo com ortocentro H. As retas AH, BH e CH intersectam BC, AC e AB em D, E e F, respectivamente, e D' é a reflexão de D pelo ponto médio de BC. Mostre que, se P está em EF, tal que $AP//BC$, então HP e AD' se intersectam em $(\triangle AEF)$.

Problema 3. Em um $\triangle ABC$, pegue pontos D, E e F em BC, AC e AB, respectivamente, com $\#BEFC$ cíclico e AD, BE e CF concorrem. Sendo M ponto médio de BC, prove que $\#DEFM$ é cíclico.

Problema 4. (IMO Shortlist/2023) Seja $ABCDE$ um pentágono convexo tal que $\angle ABC = \angle AED = 90$. Suponha que o ponto médio de CD é circuncentro de $\triangle ABE$. Sendo O o circuncentro de $\triangle ACD$, prove que AO passa pelo ponto médio de BE.

Problema 5. (IMO Shortlist/2016) Seja $\triangle ABC$ um triângulo com circuncírculo Γ, incentro I e M o ponto médio de BC. Os pontos D, E e F são escolhidos em BC, AC e AB, respectivamente, tal que $ID \perp BC$, $IE \perp AI$ e $IF \perp AI$. Suponha que o circuncírculo de $\triangle AEF$ intersecta Γ em X. Prove que XD e AM se intersectam em Γ.

Problema 6. (Cone Sul/2021) Seja $\triangle ABC$ um triângulo escaleno com circuncírculo Γ. Sejam P, Q, R e S pontos distintos no lado BC, nessa ordem, tais que $\angle BAP = \angle CAS$ e $\angle BAQ = \angle CAR$. Sejam U, V, W e Z as intersecções, distintas de A, de AP, AQ, AR e AS com Γ, respectivamente. Sejam X a intersecção de UQ com SW, Y a de PV com ZR, T a de UR com VS e K a de PW com ZQ. Suponha que estejam bem determinados os pontos M e N, tais que M é a intersecção de KX com TY e N a de TX com KY. Demonstre que M, N e A são colineares.

Problema 7. (EGMO/2019) Seja $\triangle ABC$ um triângulo com $\angle CAB < \angle ABC$, e I seu incentro. Seja D um ponto em BC tal que $\angle CAD = \angle ABC$. Seja ω um círculo tangente a AC em A passando por I. Seja X o segundo ponto de intersecção de ω com $(\triangle ABC)$. Prove que as bissetrizes de $\angle DAB$ e $\angle CXB$ se intersectam em BC.

Bibliografia.

1. Ratio Lemma/mira74