Sharky Devil Point

João Victor Silva dos Santos

1 Introdução

1.1 O ponto malígno

Ja pensou um ponto que está super na moda, definido muito simples, extremamente útil e com todas as propriedades provadas em apenas 4 (sim, QUATRO) lemas? Então apresento a vocês ele: o *Sharky Devil Point* (gosto de traduzir como "ponto do tubarão malígno"). Aqui nesse material vamos apresentar os quatro lemas envolvendo o sharky devil, ver algumas coisinhas projetivas e resolver o problema 6 da IMO de 2019. Esse é um material de configuração e lemas, é importante que você saiba uma introdução a lema de incentro/ex-incentro, rotohomotetia e projetiva. Esse é um material curto, a ideia é resumir tudo (ou quase tudo) de mais útil quando o assunto é sharky devil. Enfim, espero que gostem, aproveitem e se divirtam com esse material!!

2 Viajem ao Centro da Terra

Não, eu não confundi novamente geometria com geografia, mas em resumo, a Terra é dividida em 4 camadas: crosta, manto, nucleo externo e núcleo interno, onde começamos mais do exterior até o interior nessa ordem. Assim como a Terra, nossos quatro lemas começam a ficar mais profundos (e nada melhor que o núcleo terrestre para esse ponto do devil), então podemos associar e nomear os nossos 4 lemas por esses nomes. Vamos começar com a mais externa e a mais simples: a crosta.

2.1 Crosta

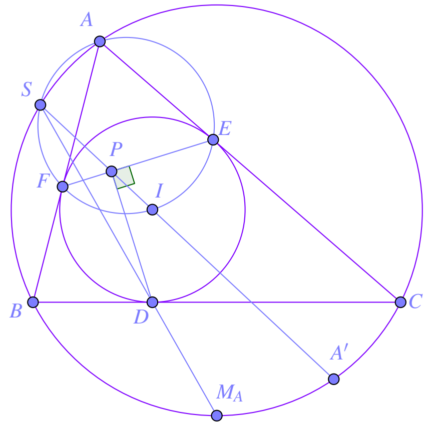
Pera, falamos tanto desse ponto mas, onde está ele? Esse ponto é definido que nem os ex-incentros ou os pontos médios, sendo cada sharky devil respectivo ao seu vértice. O A-sharky-devil é definido pelas interseções de (ABC) com (AEF), sendo DEF o triângulo de contato, ou seja, o incírculo de $\triangle ABC$ toca BC, AC e AB em D, E e F.

Para quem já viu quadrilatero completo ou até introdução a rotohomotetia, sabe que o A-sharky-devil é o **ponto de míquel** do quadrilátero $BCEF$ e também é o centro da rotohomotetia que leva EF em BC e a que leva FB em EC. Para quem não é familiarizado com esses termos, não se preocupe ou assuste, iremos dizer o que todos eles significa e moralmente não vamos nem usar esses nomes, é mais um funfact para quem sabe. Mas inicialmente, vamos mostrar algumas propriedades básicas desse ponto. Então vamos para o primeiro de nossos 4 lemas, esse é o que a galera mais lembra e o mais famoso.

Lema. (Crosta) Tome o triângulo $\triangle ABC$, $\triangle DEF$ seu triângulo de contato e incentro I. Seja S o A-sharky-devil, ou seja, a interseção entre (ABC) e $(AEIF)$. Seja M_A o ponto médio do arco BC que não contém A da circunferência (ABC). Se A' é a antípoda de A e P é o pé da altura de D em EF, então:

- S, D e M_A são colineares, assim como
- S, P, I e A' são colineares.

Prova.



Inicialmente, perceba que os triângulos SFE e SBC assim como SFB e SEC, são semelhantes, pois $\angle SFE = 180 - \angle SAE = 180 - \angle SAC = \angle SBC$, analogamente, $\angle SEF = \angle SCB$, porém, também temos que $\angle SFB = 180 - \angle SFA = 180 - \angle SEA = \angle SEC$, analogamente $\angle SBF = \angle SBA = \angle SCA = \angle SCE$, logo SBF e SCE são semelhantes. É isso que chamamos de rotohomotetia, basicamente é uma composição entre uma rotação e uma homotetia, você pode imaginar como uma animação girando por S que leva o triângulo SBF no SCE ou uma que leva SFE em SBC.

Importante!! Para os curiosos de plantão, o centro da rotohomotetia que leva FE em BC **não** é igual ao centro da que leva EF em BC, a ordem é importante, na primeira sabemos que é o S, pois leva F em B e E em C, e na outra não é o S, pois ela tem que levar F em C e E em B e não temos $\angle SFE = \angle SCB$.

Dado que SBF e SCE são semelhantes, então $\frac{SB}{SC} = \frac{BF}{CE}$, mas $BF = BD$ e $CE = CD$, logo $\frac{SB}{SC} = \frac{DB}{DC}$, e pela volta do teorema da bissetriz interna, isso só é possível se SD for bissetriz de $\angle BSC$. Deste modo, como a bissetriz de um ângulo, passa pelo ponto médio do arco, temos que S, D e M_A são colineares.

Para a segunda parte, tem uma solução usando **rotohomotetia** e outra usando **inversão**. Note que como S está na circunferência de diâmetro AI, basta S, P e I serem colineares para SP passar por A'. Seja $P' = SI \cap EF$, como SI é bissetriz de FSE pois I é ponto médio do arco EF, então P' vai em D na rotohomotetia que leva FE em BC (pois ambos são os pés das bissetrizes de S), você pode imaginar isso como semelhança mesmo, onde E está para C, assim como F está para B e P' tá para D. Porém, note que I vai em M_A na rotohomotetia, pois ambos são pontos médios de seus respectivos arcos. Logo $SP'D$ é semelhante ao SIM_A, logo $DP' \parallel IM_A$ (pois D tá em SM_A e P' tá em SI), mas $IM_A \perp EF$, logo $DP' \perp EF$ e $P = P'$. ■

A solução por inversão é bem fofinha, o que você vai fazer é inverter pelo incírculo, então os pontos A, B e C vão nos pontos médios de EF, DF e DE, pois se N for o ponto médio de EF, como $IN \perp EF$ e $IF \perp AF$, por relações métricas, temos $IN \cdot IA = IF^2$. E o círculo (ABC) vira o círculo de nove pontos do triângulo (DEF), pois é o círculo que passa pelo ponto médio dos lados, e S vira um ponto em EF e no nove pontos diferente do ponto médio de EF, então S vira P, o pé da altura. Como o centro da inversão e dois inversos são colineares, temos P, S e I colineares.

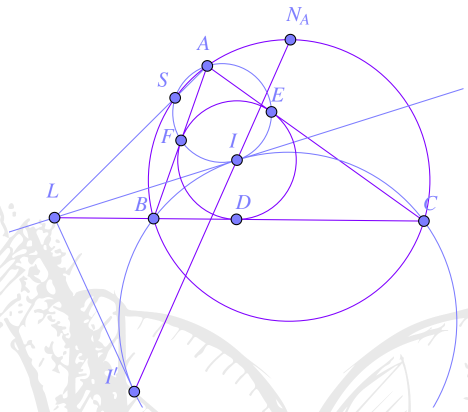
Assim, saimos da primeira camada e vamos continuar nossa aventura até o centro da Terra. A próxima camada é um pouco mais funda, mais densa e vamos ter algumas dificuldades para cavar, porém nada que não consigamos fazer. Hora de enfrentar o manto.

2.2 Manto

Confesso que tive dificuldade de decidir qual seria o manto entre esse e o próximo lema pois os dois são bem parecidos em dificuldade, mas esse é um pouquinho mais simples. Assim, bora para o nosso manto's lemma:

Lema. (Manto) Seja I' a segunda interseção de IN_A com a circunferência (BIC). Então temos que (ASI) e (BIC) são tangentes, e essa tangente comum em I juntamente com a tangente de I' a (BIC), AS e BC concorrem.

Prova.



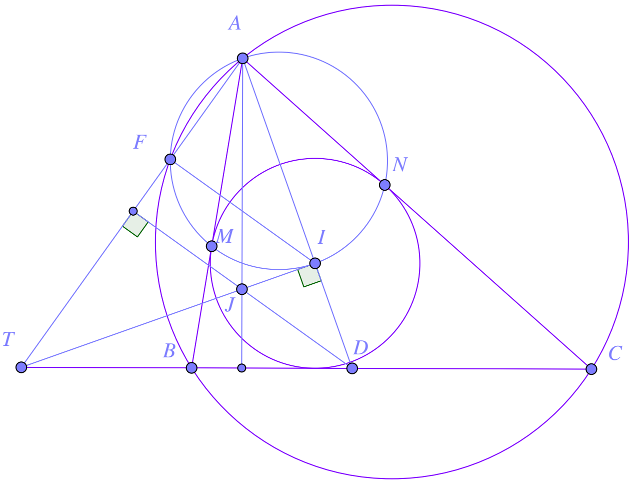
Inicialmente, vamos provar que (ASI) e (BIC) são tangentes. Sabemos que o centro de (ASI) é o ponto médio de AI pois (ASI) é a circunferência de diâmetro AI, e o centro de (BIC) é o ponto médio do arco menor BC, pelo lema do incentro, que também tá na reta AI. Deste modo como I e o centro das duas circunferências são colineares, temos que elas são tangentes a I (caso tivesse outro ponto, temos que a reta que passa pelos centros, iria passar pelo ponto médio da corda em comum).

Defina $L = AS \cap BC$, então $LS \cdot LA = LB \cdot LC$, assim L está no eixo radical de (BIC) e (ASI), que é a tangente comum desses dois. Agora, basta provar LI' tangente a (BIC) e iremos fazer isso por projetiva. Perceba que N_AB e N_AC são tangentes a (BIC), basta marcar ângulo e vê que $\angle N_ABC = \frac{1}{2} \cdot (180 - \angle BN_AC) = \frac{1}{2} \cdot (180 - \hat{A}) = 180 - \angle BIC = \angle BI'C$, dado que $\angle BIC = 90 + \frac{\hat{A}}{2}$. Assim, como N_A, I e I' são colineares, temos $(I, I'; B, C) = -1$, logo as tangentes por I e I' concorrem em BC, mas L é a interseção da tangente por I com BC, então $LI' \parallel (BIC)$ (isso significa que LI' é tangente a (BIC)). ■

Esse lema (o "Manto") foi muito útil recentemente no $TM2$ (Torneio Meninas na Matemática) de 2024, no problema 3 do nível A que também foi o problema 2 do nível B. Pense um pouco nele antes de ler a solução.

Exemplo 1. (TM2 2024 Problema 2 Nível B) No triângulo escaleno ABC, sejam I o seu incentro e D o ponto onde AI intersecta BC. Sejam M e N os pontos onde o incírculo de ABC toca AB e AC respectivamente. Seja F o segundo encontro do circuncírculo (AMN) com o circuncírculo (ABC). Seja T o encontro de AF com o prolongamento de BC. Seja J a interseção de TI com a paralela à FI que passa por D. Prove que a reta AJ é perpendicular à BC.

Solução.



Perceba que F é o sharky devil, por definição, e $\angle IFA = 90$. Deste modo $DJ \perp AT$ e pelo "Manto", temos $TI \perp AD$. Assim temos que J é o ortocentro de $\triangle TAD$ e AJ é peperpendicular a BC. ■

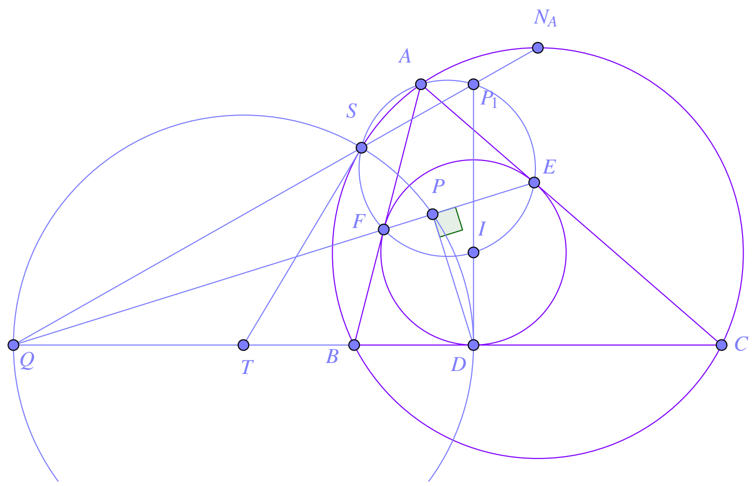
Esse problema fica bem mais rápido quando se sabe o "manto" né. O que eu gosto para lembrar desse lema é que na figura você consegue ver que temos muitas tangentes, mas o foco é (ASI) e (BIC) tangentes. Chegou o momento de nossa partida, agora é hora de cavar mais até o fundo, até porque "cavando mais até o fundo, descobrir quem são" (referência à "a princesa e o sapo").

2.3 Núcleo externo

Aqui um pequeno (bem pequeno) aquecimento para o núcleo interno, esse é um lema razoavelmente mais difícil que o último, porém muito legal e que tem muito haver com apolônio.

> **Lema. (Núcleo Externo)** Seja $Q = EF \cap BC$, N_A o ponto médio do arco BAC, $P_1 = DI \cap (AEF)$ e T a interseção da tangente por S a (ABC) e BC, então temos que N_A, S, P_1 e Q são colineares e $QSPD$ é cíclico com centro T, onde $P \in EF$ tal que $PD \perp EF$.

Prova.



Inicialmente, vamos provar que S, N_A e Q são colineares. Existe uma prova projetiva e uma usando marcação de ângulo. A por projetiva é bem rapidinho: sabemos que $(Q,D;B,C) = -1$, por construção da quadrupla harmônica, então projetando por S na circunferência, temos que $(SQ \cap (ABC), M_A; B, C) = -1$, com M_A sendo o ponto médio do arco menor BC (aqui usamos nosso "Crosta"), então $SQ \cap (ABC) = N_A$ pois $(N_A, M_A; B, C) = -1$ e assim S, Q e N_A são colineares.

A prova por ângulo é legal também, você se lembra que falamos que S é o ponto de míquel de $BFEC$? Em geral, se você tem um quadrilátero $ABCD$ e $X = AB \cap CD$, $Y = AD \cap BC$, então os círculos (ABX), (CDX), (YAD) e (YBC) passam por um mesmo ponto, que é chamado o ponto de míquel do quadrilátero. E temos isso com o quadrilátero $BFEC$, pois S está em (AFE) e (ABC) com $A = BF \cap CE$, então se tomar $Q = EF \cap BC$, temos $QBFS$ e $QCES$ cíclicos. Você pode ver que isso é verdade pois $\angle SEQ = \angle SEF = \angle SCB = \angle SCQ$ e $\angle SBQ = 180 - \angle SBC = 180 - \angle SFE = \angle SFQ$. Como vimos antes que $\angle SDP = \angle SBF$ e $\angle SBF = \angle SQF = \angle SQP$, então $QSPD$ é cíclico, e $\angle DPQ = \angle DSQ = 90 = \angle DSN_A$ pois DS passa pelo ponto médio do arco. Assim provamos tanto que $QSPD$ é cíclico, quanto que S, Q e N_A são colineares.

Tome T o ponto médio de QD, sabemos que T é o centro de $QSPD$, e para quem sabe de projetiva, sabe que $TD^2 = TB \cdot TC$ (basta abrir muita conta e reduzir a $\frac{DB}{DC} = \frac{QB}{QC}$, que é a definição de quadrupla harmônica), logo $TS^2 = TB \cdot TC$ e desde modo temos TS tangente a (ABC). Você pode imaginar $QSPD$ como o apolônio de razão $\frac{DB}{DC}$, ou seja, $\frac{DB}{DC} = \frac{PB}{PC} = \frac{SB}{SC} = \frac{QB}{QC}$, além disso temos outras propriedades do apolônio, por exemplo, que PD e PQ é bissetriz interna e externa de $\angle BPC$, respectivamente.

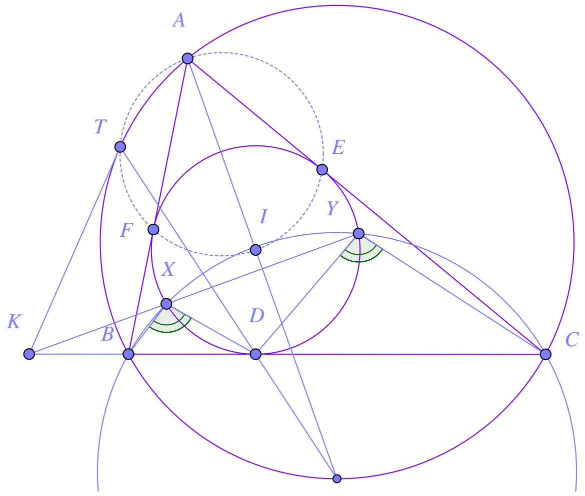
Por fim, para provar que P_1 tá em SN_A tem como definir P_1 para ser $DI \cap SN_A$, logo $\angle SP_1I = 90 - \angle SQD = 90 - \angle SQB = 90 - \angle SFA = 90 - \angle SIA = \angle SAI$, logo SAP_1I são cíclicos e provamos o que queiramos provar. ■

Essa foi a parte da configuração do sharky devil envolvendo muito o apolônio da razão que prova os lemas iniciais, que é o fato de $\frac{SB}{SC} = \frac{DB}{DC}$, além de uso da reta SN_A e a tangente pelo sharky devil, que em questões como o problema 2 da EGMO (European Girls' Math Olympiad) de 2024, pode ser bem útil. Então vamos resolver esse problema também. Um dos fatos mais úteis dessa configuração é o fato de P estar nesse apolônio, pois como vimos, temos que PD é bissetriz de $\angle BPC$.

Exemplo 2. (EGMO 2024 Problema 2) Seja ABC um triângulo com $AC > AB$, e denote seu circuncirculo por Ω e incentro por I. O incírculo toca os lados BC, CA e AB em D, E e F respectivamente. Seja X e Y dois pontos no arco menor $\widehat{DF}$ e $\widehat{DE}$ do incírculo, respectivamente, tal que $\angle BXD = \angle DYC$. Temos que XY encontra BC em K. Tome T o ponto em Ω tal que KT é tangente à Ω e T está no mesmo lado da reta BC que A. Prove que as retas TD e AI se encontram em Ω.

Solução. Algumas observações iniciais, é que se você fez esse material tudo certinho e bonitinho, você conhece essa configuração e quem obrigatóriamente cada cara tem que ser. Isso facilita muito a questão e deixa a sua mente muito mais clara. Por exemplo, queremos provar que TD e AI concorrêm na circunferência, e o único ponto T que satisfaz isso, é o sharky devil, como vimos lá perto da superfície da Terra.

Se você viu o núcleo externo, sabe que K tem que ser o ponto médio de DQ, onde $Q = EF \cap BC$. E se você ir voltando mais, você sabe que por "núcleo externo", temos $KX \cdot KY = KD^2 = KB \cdot KC$, logo devemos ter $BXYC$ cíclico, então vamos tentar provar isso.

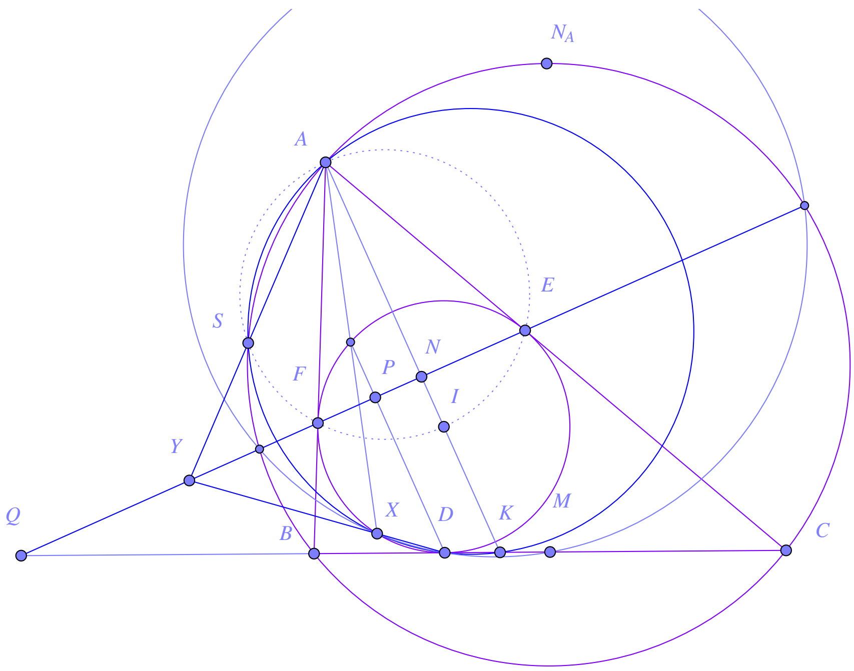


Note que $\angle BCY = 180 - \angle YDC - \angle DYC = 180 - \angle YXD - \angle BXD = 180 - \angle BXY$, então de fato $BXYC$ é cíclico, e como $K = XY \cap BC$, então $KX \cdot KY = KD^2 = KB \cdot KC$, e o único ponto que satisfaz isso e K sendo ponto médio de DQ, pois se você refletir D por K vai cair em Q', e pela propriedade que $KD^2 = KQ'^2 = KB \cdot KC$, então $(Q', D; B, C) = -1$, logo $Q = Q'$ e temos então, por "núcleo interno", que T é o sharky devil e TD e AI se encontram no ponto médio do arco BC, que está em Ω. $\blacksquare$

Eu amo o jeito que sabendo desse último lema, o problema entrega todas as conjecturas possíveis por simplismente não existir outra opção. Essa é a camada "liquida" mais profunda, assim como o centro da Terra, o próximo lema é rigido, duro, muito condensado e pesado.

2.4 Núcleo interno

Finalmente chegamos ao centro da Terra, um lugar muito quente, com muita pressão, denso e magnético. Apresentaremos a vocês um lema enorme, porém, que tem um ponto em especial que vou dar a ele o reconhecimento que ele merece e que torna esse lema, o núcleo interno do nosso planeta Terra. Senhoras e senhores, apresentos a vocês ele, o centro da Terra:



Lema. **(Núcleo Interno)** Defina a nossa estrela da noite como a interseção entre (DEF) e (ASD), sendo todos esses pontos, os mesmos definidos nos lemas anteriores, ou seja, ABC triângulo, DEF o contato, P o pé da altura de D em EF, Q a interseção de BC com EF, N_A o ponto médio do arco BAC e M_A o ponto médio do outro arco. Chame esse nosso ponto de X. Defina também K, M e N como o pé da bissetriz de A, o ponto médio de BC e o ponto médio de EF. Então temos infinitas propriedades:

- PD e AX concorrem no incírculo;
- DX, EF e AS concorrem em Y, onde $YA \cdot YS = YP \cdot YN = YE \cdot YF = YX \cdot YD$ e $(Y,P;F,E) = -1$;
- A, S, X, D e K são concíclicos;
- IN_A é mediatriz de DX;
- (MDX) e (ABC) tem eixo radical EF, ou seja, a interseção dessas duas circunferências está em EF.

Prova. Nesse lema iremos usar várias vezes os lemas das camadas anteriores, então é bom que você já esteja afiado. Vamos primeiro começar provando que A, S, X, D e K são concíclicos. Já sabemos que S, X, A e D são concíclicos por definição de X, logo basta provar que $ASDK$ é cíclico. Porém, $\measuredangle DSA = \measuredangle M_ASA = \measuredangle M_ABA = 180 - \measuredangle BAM_A - \measuredangle ACB = 180 - \measuredangle AKD$, onde lembrando que M_A é o ponto médio do arco BC que não contém A, logo de fato $ASDK$ é cíclico.

Por centro radical nas circunferências $(ASFIE)$, $(ASXDK)$ e $(DXFE)$ temos que AS, EY e DX concorrem, que é o ponto Y que queriamos mostrar que existe. Além disso, por potência de ponto, sabemos que $YA \cdot YS = YE \cdot YF = YX \cdot YD$, porém $(ASPN)$ é cíclico, pois vimos que $\angle PSA = 90 = \angle ANP$, assim $YS \cdot YA = YP \cdot YN$, porém, o único ponto que satisfaz $YF \cdot YE = YP \cdot YN$ é o ponto Y que completa a quádrupla harmônica $(Y,P;F,E)$ por conhecimentos de projetiva (você também pode abrir conta e vê que $YE \cdot YF = YP \cdot YN \iff (NY+NE)(NY-NF) = (NY-NP)(NY) \iff NY^2 + NY(NE-NF) - NE \cdot NF = NY^2 - NP \cdot NY \iff NP \cdot NY = NF^2$, que é só se forem harmônicos).

Já foi a segunda e a terceira. Para a primeira, note que como $(Y,P;F,E) = -1$, projetando por D no incírculo, temos $(X, DP \cap (DEF); F, E) = -1$, mas a tangente ao incírculo por E e F se encontram em A, logo a reta que passa por X e $DP \cap (DEF)$ vai passar por A por conta da projetiva. Deste modo, AX e DP se encontram no incírculo.

Perceba que como $QD \cdot QM = QS \cdot QN_A$ pois QS passa por N_A e $YX \cdot YD = YS \cdot YA$, então tanto Q quanto Y estão no eixo radical de (XDM) com (ABC), deste modo, como elas duas se intersectam, temos que a interseção tá na reta QY que também é a reta EF.

Por fim, sabemos que $IX = ID$, basta provar que $IN_A \perp XD$. Para isso, iremos usar um lema de círculo mixtilinear (não iremos nos aprofundar em mixtilinear porque vamos ter um material apenas para ele), que diz que se A_1 está em (ABC) de modo que $AA_1 \parallel BC$, então N_AI encontra A_1D na circunferência (ABC), chame esse ponto de Z. Vamos primeiro provar que AX passa por Z. Para isso, tome W aquele ponto de interseção de AX com PD, que provamos que tá no incírculo. Queremos $\angle AZD = \angle WZD$, mas $\angle WZD = \angle AZA_1 = 180 - \angle AN_AA_1 = 180 - \angle WID$, pois

$\angle IDW = \angle IWD = \angle N_A AA_1 = \angle N_A A_1 A = \hat{B} - \hat{C}$ (basta marcar ângulo pois sabemos os ângulos de DEF) se assumir sem perda de generalidade $\hat{B} \geq \hat{C}$.

Com isso, basta provar $WIDZ$ cíclico, porém como vimos, temos $\angle IWD = \hat{B} - \hat{C} = \angle IZD = \angle N_A ZA_1$. Agora note que como $N_A A = N_A A_1$, então ZI é bissetriz de $\angle XZD$ e como $IX = ID$, temos ZI mediatriz de XD pois $\angle ZID = \angle ZN_A M_A = \angle ZAM_A = \angle ZWD = \frac{1}{2}\angle XID$, então $IX = ID$ e $\angle ZID = \angle ZIX$, e deve ser a mediatriz. ■

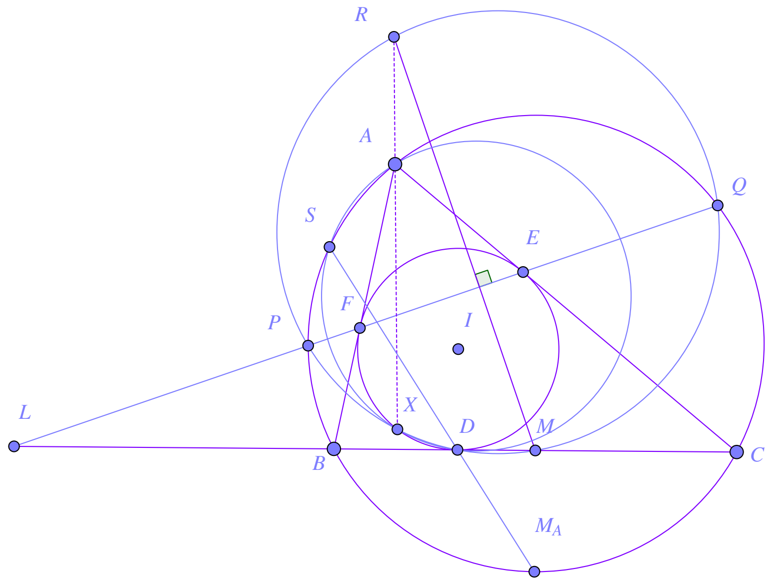
Ufa! Terminamos nosso lema, isso porque ainda tem muitas propriedades que podem ser vistas, muitas envolvendo o mixtilinear, mas veremos isso em um material futuro. Alguma dessas coisas é por exemplo XN paralelo $N_A I$ e XN passando pelo ortocentro de DEF, ou $AIDI'$ cíclico, o mesmo I' que vimos em manto e a antípoda de D passa na reta que liga A com o outro ponto de tangência por M, ou seja, se pega a interseção da outra tangente de M ao incírculo, a reta que liga esse ponto ao A passa pela antípoda de D. Uma coisa interessante é que a nossa estrela, o X, está em todos os itens, juntamente com o D, juntos eles dois tornam esse lema tão mais interessante.

Outra coisa interessante é que o X é o D-queue-point e Y é o D-ex-point do triângulo DEF, ou seja, X está na circunferência que passa por D, ortocentro de DEF e pés das alturas de E e F, além disso, Y é o ponto que completa a quadrupla harmônica com o pé da altura de D e os dois outros vértices, por isso que Y está na reta que passa pelos pés das alturas de E e F. Tudo isso é configuração de ortocentro e quadrilátero completo.

Depois de tudo isso sobre nosso lema, iremos tentar o big boss: problema 6 da IMO de 2019, mas antes, vamos pegar um problema de aquecimento para nos preparar para a batalha. O escolhido foi um problema que caiu no teste de seleção do Taiwan para a IMO (inclusive, desse mesmo ano de 2019, acho que eles sabiam de alguma coisa).

Exemplo 3. (Taiwan TST 2019 Round 2 Mock 1 Problema 2) Dado um triângulo $\triangle ABC$, denote seu incírculo e circuncírculo por ω e Ω, respectivamente. Assuma que ω tangencia os lados AB e AC em F e E, respectivamente. Então, tome as interseções de EF e Ω para ser P e Q. Seja M o ponto médio de BC. Pegue um ponto R no circuncírculo do $\triangle MPQ$ (chame de Γ o circuncírculo), tal que $MR \perp EF$. Prove que a reta AR, ω e Γ intersectam em um ponto.

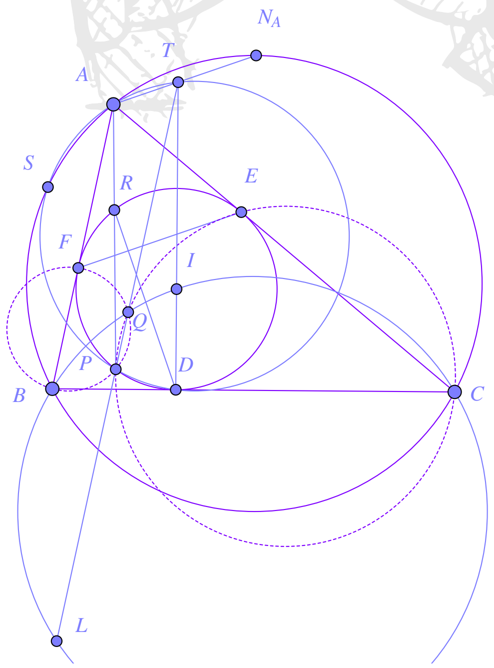
Solução. Defina X para ser a interseção de ω e Γ, sabemos pelo último lema que D está em (MPQ) e X é o nosso ponto do último lema, ou seja, interseção do incírculo com (ASD), sendo S o A-sharky-devil. Deste modo, iremos provar que $\angle AXD = \angle RXD$, note que $\angle AXD = \angle ASD$ pois $ASXD$ é cíclico, além disso, $\angle ASD = \angle ASM_A = \angle ABM_A = \hat{B} + \frac{1}{2} \cdot \hat{A} = \angle ABC + 90 - \angle AFE = 90 + \angle FLB$, com L sendo a interseção de EF com BC. Porém, $90 + \angle FLB = \angle RMC = \angle RXD$ pois $RXDM$ é cíclico, assim, temos $\angle AXD = \angle RXD$ e temos A, X e R colineares. ■



Por último, chegamos no chefão, essa é uma das minhas maiores obras primas, uma solução pensando um pouco em rotohomotetia e sharky-devil.

Exemplo 4. (IMO 2019 Problema 6) Seja I o incentro de um triângulo acuntângulo ABC com $AB \neq AC$. O incírculo ω de ABC é tangente aos lados BC, CA e AB em D, E e F, respectivamente. A reta por D perpendicular a EF encontra ω em R. A reta AR encontra ω novamente em P. O circuncírculo de PCE e PBF se encontram novamente em Q. Prove que as retas DI e PQ se encontram na reta por A perpendicular a AI.

Solução.



Defina T para ser a interseção da bissetriz externa de A (que é a reta perpendicular a AI que passa por A) com DI, queremos que T, P e Q sejam colineares. Note que $\angle BQC = \angle BQP + \angle PQC = \angle BFP + \angle PEC = \angle FRE = 90 + \frac{1}{2} \cdot \hat{A} = \angle BIC$, assim $BQIC$ é cíclico. Então nada mais justo do que tomar Q e L para ser as interseções de TP com (BIC), com Q no mesmo semiplano que P em relação a BC e tentar provar $PQFB$ e $PQEC$ cíclicos.

Note que temos que basta $\angle PFB = \angle PQB$, porém, $\angle PQB = \angle LQB = \angle LCB$ e $\angle PFB = \angle PEF$, logo basta $\angle LCB = \angle PEF$, analogamente, basta $\angle LBC = \angle PFE$, ou seja, PEF e LCB semelhantes. Porém, se S for o A-Sharky-devil, temos que S leva FE em BC, então basta provar que essa rotohomotetia leva P em L. Ou seja, sumimos com o Q e só precisamos provar a rotohomotetia, temos agora só o P que a prior parece estranho, porém é o nosso ponto X do último lema e que tem todas aquelas propriedades, pois vimos que como DR é perpendicular a EF, então AR passa pelo X.

Porém se tomar K para ser o pé da bissetriz, temos que $\angle TAK = 90 = \angle TDK$, logo $ATKD$ é cíclico, mas vimos que ADK também passa por S e por P, ou seja, temos $SATKDP$ um hexágono cíclico. Além disso, note que (DEF) vai realmente em (BIC) na rotohomotetia que leva FE em BC, pois I (centro de (DEF)) vai em M_A (centro de (BIC)), como vimos lá no início. Também temos que $\angle SFA = \angle SBF + \angle BSF = \angle SDR + \angle DSI = \angle SDR + \angle IDR = \angle SDI$ pois se P' é o pé da altura de D, temos $IS \cdot IP' = ID^2$.

Mas então $\angle IDS = \angle TDS = \angle TPS$ e $\angle SFB = \angle SPL$. E assim o problema acabou, pois então a imagem de P, sai lá, chamade L', ele vai ser um ponto em BIC tal que $\angle SPL' = \angle SFB$, porém existe apenas um ponto que satisfaz isso, e vimos que L satisfaz, assim $L = L'$ e terminamos nossa solução, pois assim PEF e LCB são semelhantes, $\angle PFB = \angle LQB = \angle PQB$ e $BPQF$ cíclicos, analogamente $CPQE$ cíclicos e PQ, DI e AN_A passando todos por T. ■

Finalmente terminamos nossa jornada, cavamos muito fundo e fizemos descobertas inacreditáveis para qualquer ser humano, de fato o sharky devil point fez evoluir um pouco mais da nossa matemática olímpica. Apesar de ser um ponto malígno, ele tem muitas coisas fofas e basta um pouco de atenção para ver que ele é bem meigo!

3 Problemas de geografia (ou geometria, não sei, sempre confundo)

Por último, chegamos na parte mais importante do nosso material: os problemas propostos. Pensem em muitos dos problemas, tentem aplicar os lemas aqui ensinados, use problemas anteriores e ideias aqui mostradas para fazer os problemas. Os problemas não usam apenas ideia desse material, usa algumas ideias mostradas anteriormente também (incentro, talvez projetiva, marcação de ângulo, ...).

Espero que tenham gostado do material, aproveitem muito e qualquer dúvida ou observação, podem me mandar um e-mail: joaovssantos1003@gmail.com. Fiquem agora com os problemas propostos :)

Problema 1. No $\triangle ABC$, I é o incentro, H é o ortocentro e D, E e F são os pontos de tangência do incírculo com BC, CA e AB, respectivamente. Seja G o pé da altura de D em EF. Prove que $\angle BGH = \angle CGI$.

Problema 2. (G3 ELMO Shortlist 2019) Seja $\triangle ABC$ um triângulo acutângulo com incentro I e circuncentro O. O incírculo encontra os lados BC, CA e AB em D, E e F, respectivamente, e A' é a reflexão de A por O. Os circuncírculos de ABC e $A'EF$ se encontram em G e os circuncírculos de AMG e $A'EF$ se encontram em $H \neq G$, onde M é o ponto médio de EF. Prove que se GH e EF se encontram em T, então $DT \perp EF$.

Problema 3. Seja I o incentro de um triângulo ABC, e seja D, E e F as interseções do incírculo de ABC com BC, CA e AB respectivamente. Suponha que os circuncírculos de ABC e AID se intersectam novamente em $P \neq A$, e que AP intersecta EF em Q. Mostre que DQ é perpendicular a EF.

Problema 4. (Teste Azerbaijão IZHO 2021 Problema 4) Seja ABC um triâgulo com incírculo tocando BC, CA e AB em D, E e F, respectivamente. Seja O e M o circuncírculo e o ponto médio de BC. Suponha que os circuncírculos de AEF e ABC se intersectam pela segunda vez em X. Assuma que $Y \neq X$ está no circuncírculo de ABC tal que $OMXY$ é cíclico. Prove que o circuncentro de DXY está em BC.

Problema 5. No $\triangle ABC$, temos que o incírculo Γ do $\triangle ABC$ toca os lados BC, AC e AB nos pontos D, E e F, respectivamente. Seja I o incentro do triângulo $\triangle ABC$. Seja o pé da perpendicular de D em EF para ser P e a reta IP corta o arco BAC do circuncírculo do $\triangle ABC$ no ponto K. Se a reta AK corta a reta BC num ponto X, e se a tangente de X a Γ diferente de BC corta o segmento AB e AC nos pontos Y e Z respectivamente, então prove que as retas BZ e CY se intersectam em P.

Problema 6. Seja I e O o incentro e o circuncentro do $\triangle ABC$, seu incírculo c_1 intersecta o triângulo em D, E e F. K é a interseção de AI e DE e a reta AF intersecta c_1 em outro ponto G. S e T são dois pontos em c_1 tal que A, G, K e S são concíclicos e A, T, I e S são concíclicos. Seja Q o circuncentro do triângulo $\triangle AGT$ e M o ponto médio de AI. Prove que Q, M e O são colineares.

Problema 7. No triângulo acutângulo ABC $(AB \neq AC)$, I é o incentro e J é o A-ex-incentro. X e Y estão no arco menor $\widehat{AB}$ e $\widehat{AC}$, respectivamente, tal que $\angle AXI = \angle AYJ = 90$. K está na reta BC tal que $KI = KJ$. Prove que a reta AK bissecta o segmento XY.

Problema 8. 1. I é o incentro do triângulo ABC. K é o ponto médio do arco BC que não contém A. L é o ponto médio do arco BAC, M é o ponto médio de IK e N é o ponto médio de LM. D é a projeção de I em BC. S é a segunda interseção de KD e (ABC). Prove que (ISD) é tangente a (AMN).

2. O círculo w com centro I é o incírculo do triângulo ABC. D é a projeção de I em BC. Os pontos E e F nos segmentos BI e CI seguem a seguinte condição: $IE = IF$. M é o ponto médio de EF. P é a segunda interseção de (IMD) e w. Q é a segunda interseção de AP e (IMD). Prove que I, E, F e Q são concíclicos.

Problema 9. Seja ABC um triângulo com incentro I. O incírculo tangência os lados BC, CA e AB em D, E e F, respectivamente. Seja P o pé da perpendicular de D em EF. Assuma que BP e CP intersecta os lados AC e AB em Y e Z respectivamente. Finalmente as semi retas IP e YZ encontram o circuncírculo de ABC em R e X respectivamente. Prove que a tangente por X ao incírculo e RD se intersectam no circuncírculo de ABC.

Problema 10. No triângulo ABC, seja I o incentro, e tome a interseção do incírculo com os lados BC, AC e AB para ser D, E e F, respectivamente. Seja S a interseção de (AEF) e (ABC) diferente de A, seja $J = AI \cap BC$ e seja N o ponto médio de EF. As retas SJ e DN se intersectam em P. Prove que P está no círculo dos 9 pontos (círculo que passa pelos pontos médios e pés das alturas) de DEF.

Problema 11. (Fake USAMO 2020 Problema 3) Seja $\triangle ABC$ um triângulo escaleno com circuncentro O, incentro I and incírculo ω. O círculo ω toca os lados BC, CA e AB nos pontos D, E e F respectivamente. Seja T a projeção de D em EF. A reta AT intersecta o circuncírculo de $\triangle ABC$ novamente em $X \neq A$. os circuncírculos de $\triangle AEX$ e $\triangle AFX$ intersectam ω novamente em pontos $P \neq E$ e $Q \neq F$ respectivamente. Prove que as retas EQ, FP e OI são concorrentes.