Equações e Sistemas

Roberto César Cucharero Peregrina

1 Equações

1.1 IDENTIDADES E EQUAÇÕES

Na matemática, uma identidade é uma igualdade verdadeira para todos os valores possíveis das variáveis envolvidas, como $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, válida para quaisquer números reais a e b. Já uma equação é uma igualdade que pode ser verdadeira apenas para certos valores das variáveis, como $2x + 3 = 7$, cuja solução é $x = 2$. Identidades são ferramentas importantes para simplificar expressões e provar teoremas, enquanto equações são essenciais para resolver problemas específicos. Em competições matemáticas, reconhecer identidades pode acelerar a resolução de problemas complexos.

1.1.1 Exemplo 1 : Canguru 2021 - Nível C

Um teste é composto de 20 questões. Cada resposta correta vale 7 pontos, cada resposta errada vale -4 e cada questão deixada em branco vale 0 pontos. Érica fez o teste e obteve 100 pontos. Quantas questões ela deixou em branco ?

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

Resolução Seja a o número de acertos , e o número de erros e b o número de questões deixadas em branco.

Sabemos que :

$a + e + b = 20$ e $7a - 4e = 100$

Assim : $a + e = 20 - b$ $4a + 4e = 80 - 4b$

Somando com a segunda equação :

$11a = 180 - 4b$ $a = 16 + \frac{4.(1-b)}{11}$ Como não deve ter resto a quantidade de acertos $1 - b = 0$, logo $b = 1$

1.2 Princípios Gerais sobre a Transformação de Equações

A transformação de equações é uma ferramenta poderosa utilizada em olimpíadas de matemática para simplificar problemas e encontrar soluções de forma mais eficiente. Compreender os princípios gerais que regem essas transformações permite que você manipule equações de maneira criativa e estratégica.

1.2.1 Princípio da Equivalência

Este princípio afirma que uma equação permanece inalterada se realizarmos a mesma operação em ambos os lados.

Exemplo: Considere a equação $3x + 5 = 11$. Podemos subtrair 5 dos dois lados para obter: $3x + 5 - 5 = 11 - 5$, $3x = 6$ Dividindo ambos os lados por 3: $\frac{3x}{3} = \frac{6}{3}$, $x = 2$.

Esse princípio também é válido para multiplicação, divisão e outros operadores

1.2.2 Isolamento da Variável

Isolar a variável é uma técnica essencial em qualquer problema de equação. A chave é mover todos os termos contendo a variável para um lado da equação.

Exemplo: Dada a equação $2x-7=3x+4$, subtraímos $2x$ e 4 dos dois lados: $2x-7-2x-4=3x+4-2x-4$ Assim, $-11=x$.$x=-11$.

1.2.3 Fatorização e Distribuição

A fatorização e a distribuição são técnicas importantes para simplificar equações e resolver problemas.

ExemploResolva a equação $x^2-5x=0$ por fatorização: $x.(x-5)^2=0$ As soluções são $x=0$ ou $x=5$.

1.2.4 Substituição de Expressões

Em problemas mais complexos, substituir expressões auxiliares pode simplificar o problema.

Exemplo Dada a equação $x^4-5x^2+6=0$, podemos definir $y=x^2$, transformando-a em: $y^2-5y+6=0$ Fatorando: $(y-2)(y-3)=0$ Logo, $y=2$ ou $y=3$, o que implica $x^2=2$ ou $x^2=3$. Assim, $x=\pm\sqrt{2}$ ou $x=\pm\sqrt{3}$.

1.2.5 Completação de Quadrados

A completação de quadrados é usada para resolver equações quadráticas ou simplificar expressões.

Exemplo Resolva $x^2-6x+5=0$ completando o quadrado: $x^2-6x=-5$ Adicionamos 9 dos dois lados: $x^2-6x+9=4 \Rightarrow$ (x+3) $^2=4$ Tomando a raiz quadrada: $x+3=\pm 2$,logo $x=-1$ ou $x=-5$

1.2.6 Manipulação de Identidades

Usar identidades conhecidas, como a soma e a diferença de cubos ou o quadrado da soma, pode ser essencial.

Exemplo Resolva $x^3-8=0$ usando a identidade da diferença de cubos: $x^3-8=(x-2)(x^2+4x+4)$ As soluções são 2 e as raízes complexas de x^2+4x+4

1.2.7 Exemplo 2 : (Olímpiada de Campina Grande - 2004)

Se uma melancia pesa $\frac{9}{10}$ do seu peso mais $\frac{9}{5}$ de meio quilo , quantos quilos ela pesa ?

Seja x o peso da melancia ,$x=\frac{9}{10}(x)+\frac{9}{5}(0,5)$

$\frac{1}{10}(x)=\frac{9}{10}$

$x=9kg$.

1.3 Equações do 1º Grau em Olimpíadas de Matemática

As equações do 1º grau são fundamentais em provas olímpicas, aparecendo em problemas que exigem interpretação, modelagem e resolução. Uma equação do tipo pode ser resolvida isolando :

$x=-\frac{b}{a}$

1.3.1 Exemplo Contextualizado

Em uma escola, a soma da idade de um professor e de um aluno é 50 anos. Sabendo que o professor tem 4 vezes a idade do aluno, qual é a idade de cada um?

Seja a idade do aluno, então a do professor é . A equação fica: $x+4x=50$

$5x=50 \Rightarrow x=10$ O aluno tem 10 anos e o professor 40 anos.

1.3.2 Discussão da Fórmula

A resolução de por meio da fórmula garante rapidez e precisão, sendo essencial para problemas mais elaborados. No entanto, é crucial interpretar o problema corretamente antes de aplicar a fórmula.

Em olimpíadas, questões desse tipo podem envolver frações, grandezas proporcionais e raciocínio lógico, exigindo que o aluno relacione conceitos além da álgebra básica

1.3.3 Exemplo 3 OBM-98

Um pai tem 33 anos e seu filho , 7 anos. Depois de quantos anos a idade do pai será o triplo da idade do filho ?

Equacionado:

$33+x=3(7+x)$

$33+x=21+3x$

$12=2x$

$6=x.$

2 Sistemas de Equações do 1º Grau: Resolução e Aplicações

Os sistemas de equações do 1º grau desempenham um papel fundamental na matemática, sendo amplamente utilizados em competições como as Olimpíadas de Matemática. Eles consistem em um conjunto de equações lineares que compartilham incógnitas, exigindo técnicas específicas para encontrar soluções.

Para sistemas com duas incógnitas, três métodos principais são comumente aplicados:

1. Substituição – Isola-se uma variável em uma equação e substitui-se na outra, reduzindo o sistema a uma equação com uma única incógnita.

2. Adição ou Eliminação – Manipulam-se as equações para cancelar uma das variáveis, simplificando a resolução.

3. Método Matricial – Utiliza a representação matricial e a aplicação da matriz inversa ou o método de Gauss para resolver o sistema.

Quando há três incógnitas, as estratégias seguem princípios semelhantes, porém com um nível maior de complexidade. O método da substituição pode ser estendido para mais equações, enquanto o método da adição permite a eliminação sucessiva de variáveis. Além disso, métodos algébricos mais avançados, como o uso de determinantes e matrizes, tornam-se ferramentas eficientes para sistemas maiores.

Dominar esses métodos é essencial para enfrentar desafios olímpicos e resolver problemas práticos, que vão desde questões financeiras até modelagens científicas. A habilidade de escolher a abordagem mais eficiente pode ser decisiva em provas competitivas e no desenvolvimento do pensamento lógico- matemático.

2.0.1 Exemplo 4 :OBM- 2000

Há 18 anos Hélio tinha precisamente três vezes a idade de seu filho. Agora tem o dobro da idade desse filho. Quantos anos têm Hélio e seu filho?

Equacionando com H sendo a idade de Hélio e F a idade de seu filho : $\begin{cases} H & -18 & = 3.(F-18) \\ H & & = 2F \end{cases}$

Desenvolvendo a primeria linha temos :

$H = 3F - 54 + 18$

COMPARAÇÃO

$2F = 3F - 54 + 18$

$F = 36$

Como $H = 2F$ temos $H = 72$

SUBSTITUIÇÃO

Fazendo $H = 2F$ na primeira equação

$2F - 18 = 3.(F - 18)$

$F = 36$

Substituindo o resultado na primeira equação $H = 72$

ADIÇÃO Subtraindo a segunda da primeira equação : $-18 = F - 54$

$F = 36$

Como $H = 2F$ temos $H = 72$

MATRICIAL - ESCALONAMENTO Convertemos o sistema por manipulação algébrica para a forma :

$\begin{cases} H- & 3F & = -36 \\ H- & 2F & = 0 \end{cases}$

Subtraindo a primeira linha da segunda obtemos uma nova segunda linha :

$F = 36$

Do sistema original, como $H = 2F$, temos $H = 72$.

2.1 Discussão de Sistemas de Equações do 1º Grau: Equivalência e Quantidade de Soluções

Os sistemas de equações do 1º grau são conjuntos de equações lineares que compartilham incógnitas. Em competições como as Olimpíadas de Matemática, compreender a noção de equivalência e a quantidade de soluções é essencial para resolver problemas de forma eficiente.

Dois sistemas são equivalentes se possuem o mesmo conjunto solução. Transformações como multiplicação por um número diferente de zero ou soma de equações preservam essa equivalência, permitindo simplificações estratégicas na resolução.

A quantidade de soluções de um sistema depende da relação entre suas equações:

Sistema determinado (única solução): Ocorre quando há um número suficiente de equações independentes para definir os valores das incógnitas. No caso de duas equações com duas incógnitas, isso significa que as retas se interceptam em um único ponto.

Sistema indeterminado (infinitas soluções): Acontece quando as equações representam a mesma reta, ou seja, são múltiplas uma da outra. Nesse caso, qualquer ponto da reta é uma solução do sistema.

Sistema impossível (sem solução): Ocorre quando as equações representam retas paralelas distintas, que nunca se encontram.

Essa análise se estende para sistemas com três incógnitas, onde o número de soluções pode depender da interseção de planos no espaço. Compreender essas classificações permite abordar problemas com estratégias eficientes, fundamentais em desafios matemáticos de alto nível.

2.1.1 Exemplo 5 : OLÍMPIADA DE CAMPINA GRANDE - 2002

A relação entre a, b, c para que o sistema abaixo de incógnitas x, y, z tenha solução é:

$$\begin{cases} x & -2y & +4z & = & a \\ 2x & +3y & -z & = & b \\ 3x & +y & +2z & = & c \end{cases}$$

RESOLUÇÃO

Utilizando o método de escalonamento multiplique a primeira linha por 2 e subtraia da segunda. Em seguida multplique a primeira linha por 3 e subtraia da terceira

$$\begin{cases} x & -2y & 4z & = & a \\ & 7y & -9z & = & b-2a \\ & 7y & -10z & = & c-3a \end{cases}$$

subtraindo a terceira linha da segunda ficamos com:

$$\begin{cases} x & -2y & 4z & = & a \\ & 7y & -9z & = & b-2a \\ & & z & = & a+b-c \end{cases}$$

Assim como o sistema é possível e determinado sua solução é válida para quaisquer valores de a, b e c.

3 Problemas para treinar

Questão 1 A raiz da equação $\frac{x}{2} - \frac{1}{6}(2x-1) = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2} - \frac{x}{3}\right)$

Questão 2 De 2 em 2 minutos sai um ônibus do terminal Novo Rio para o terminal de Petropólis. Um ônibus demora 30 minutos para ir do Novo Rio a Petropólis. Um automóvel com velocidade igual ao quádruplo da velocidade do ônibus sai do Novo Rio simultâneamente com um dos ônibus . Quantos ônibus o automóvel ultrapassa até alcançar o terminal de Petropólis ?

Questão 3 Se x e y satisfazem ao sistema

$$\begin{cases} 19x & +5y & = & 12 \\ 13x & +3y & = & 8 \end{cases}$$

então $6x + 2y$ é igual a :

Questão 4 Um omelete feito com 2 ovos e 30 gramas de queijo contém 280 calorias. Se um omelete feito com 3 ovos e 10 gramas de queijo contém 280 calorias, o número de calorias contida num ovo é igual a :

Questão 5 (Rioplatense/2000 - Nível A - Adaptada Professor Beto aplicou uma prova objetiva com 4 questões, valendo 1 ponto cada questão. Uma questão correta quanso somente o item correto é marcado. Ao corrigir o professor percebeu que o número de estudantes que obteve 3 pontos foi igual ao número de estudantes que obteve 2 pontos. Além disso , ele percebeu que todos fizeram no mínimo um ponto. Finalmente a quantidade de pontos obtidos por todos os alunos é igual ao número de estudantes mais 30. Qual o número de estudantes que conseguiram, pelo menos, 3 pontos?

4 Gabarito e Resolução

Questão 1 $\frac{6}{5}$. Multiplique a equação por 6 e teremos $3x - 2x + 1 = 3 - \frac{2x}{3}$. Isolando x temos : $x + \frac{2x}{3} = 2$, o que implica em $x = \frac{5}{6}$

Questão 2 11. O carro têm uma velocidade quatro vezes maior do que o ônibus, o que leva a ter um tempo de percurso de $30 : 4 = 7,5$ minutos. Quando o carro sai existem $30 : 2 = 15$ ônibus . Como ele sai na frente do primeiro e em $7,5$ minutos 3 ônibus chegam ao final ele irá ultrapassar $15 - 4 = 11$ ônibus.

Questão 3 4.Subtraindo as duas equações, obtemos $19x - 13x + 5y - 3y = 12 - 8 = 4$.

Questão 4 Podemos montar o seguinte sistema : $\begin{cases} 2O & +30Q & = & 280 \\ 3O & +10Q & = & 280 \end{cases}$ onde O corresponde as calorias dos ovos e Q as calorias do queijo. Igulando as sentenças : $O = 2Q$. Aplicando na segunda equação : $70Q = 280$, logo $Q = 4$ alorias. Como o ovo tem vinte vezes mais temos : $O = 80$ calorias.

Questão 5 10 .Seja x_n o número de estudantes que acertaram n questões. Do enunciado sabemso que não existe $n = 0$ e $n > 4$. Podemos considerar também $x_2 = x_3$ e montar a equação do problema :

$30 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4$ Substituindo a expressão $x_2 = x_3$ na equação acima e isolando x_3 e x_4 temos $30 = x_2 + 2x_3 + 3x_4$

$30 = 3x_3 + 3x_4$

$10 = x_3 + x_4$