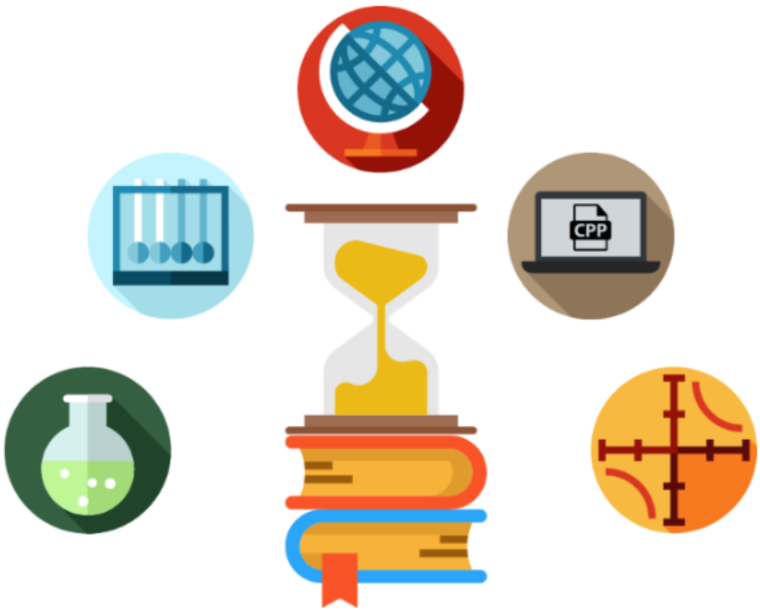
Polinômios

Sofia Pinheiro



1 Introdução

Os polinômios são expressões algébricas fundamentais na matemática, utilizadas em diversas áreas como álgebra, cálculo e modelagem de fenômenos do mundo real. Eles são compostos por termos que envolvem variáveis elevadas a expoentes inteiros não negativos, acompanhadas de coeficientes.

Neste material, exploraremos as definições básicas, operações fundamentais (soma, subtração, multiplicação e divisão), propriedades importantes e aplicações dos polinômios. Além disso, abordaremos conceitos como raízes, fatoração e teoremas essenciais, proporcionando uma base sólida para o estudo avançado dessa importante área da matemática.

2 Definições Básicas

Um **polinômio** é uma expressão algébrica da forma:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \tag{1}$$

onde:

- x é a variável;
- $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ são coeficientes pertencentes a um conjunto numérico (como os reais $\mathbb{R}$ ou os inteiros $\mathbb{Z}$);
- n é o **grau** do polinômio, sendo o maior expoente de x com coeficiente não nulo, também podendo ser escrito como $deg(P) = n$ ou $P(P(x)) = n$;
- a_n é chamado de **coeficiente líder** ou **coeficiente dominante**;
- a_0 é o **termo independente**, pois não depende de x.

3 Tipos de Polinômios

3.1 Polinômio Nulo

O polinômio nulo é aquele cujos coeficientes são todos iguais a zero:

$$P(x) = 0. \tag{2}$$

Ele não possui um grau bem definido, sendo, por convenção, considerado de grau indefinido ou $-\infty$.

3.2 Polinômios Especiais

- Um polinômio é **monômio** se possui apenas um termo, por exemplo, $5x^3$.
- Um polinômio é **binômio** se possui dois termos, por exemplo, $x^2 - 4$.
- Um polinômio é **trinômio** se possui três termos, por exemplo, $x^2 + 2x + 1$.

4 Igualdade de Polinômios

Dois polinômios $P(x)$ e $Q(x)$ são iguais se, e somente se, possuem o mesmo grau e coeficientes correspondentes idênticos, ou seja,

$$P(x) = Q(x) \quad \text{se e somente se} \quad a_i = b_i, \quad \forall i. \tag{3}$$

5 Soma de Polinômios e o Grau do Resultado

Sejam dois polinômios

$$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \tag{4}$$

e

$$Q(x) = b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0. \tag{5}$$

O polinômio soma é dado por:

$$S(x) = P(x) + Q(x). \tag{6}$$

5.1 Relação Entre os Graus

5.1.1 Relações entre soma de polinômios

Seja $\deg(P) = n$ e $\deg(Q) = m$. O grau do polinômio resultante, denotado por $\deg(S)$, segue a relação:

$$\deg(S) \leq \max(n, m). \tag{7}$$

Casos Especiais:

- Se $n \neq m$, então $\deg(S) = \max(n, m)$.
- Se $n = m$ e os coeficientes líderes somam zero ($a_n + b_m = 0$), então o grau do resultado pode ser menor que n.

Exemplo:
Se $P(x) = x^3 + 2x + 1$ e $Q(x) = -x^3 + 4x^2 + 3$, então:

$$S(x) = (x^3 + 2x + 1) + (-x^3 + 4x^2 + 3). \tag{8}$$

Os termos de grau 3 se cancelam, e o resultado é:

$$S(x) = 4x^2 + 2x + 4. \tag{9}$$

Como os termos de maior grau foram eliminados, $\deg(S) = 2 < \max(3, 3) = 3$. Sejam dois polinômios

$$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \tag{10}$$

e

$$Q(x) = b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0. \tag{11}$$

5.1.2 Relações entre produtos de polinômios

O produto desses polinômios é definido por:

$$R(x) = P(x) \cdot Q(x). \tag{12}$$

5.2 Relação Entre os Graus

Se $\deg(P) = n$ e $\deg(Q) = m$, então o grau do polinômio produto, denotado por $\deg(R)$, segue a relação:

$$\deg(R) = n + m. \tag{13}$$

Isso ocorre porque o termo de maior grau do produto vem da multiplicação dos termos de maior grau de cada polinômio, ou seja,

$$(a_n x^n) \cdot (b_m x^m) = (a_n b_m) x^{n+m}. \tag{14}$$

5.3 Casos Especiais

- Se um dos polinômios for o polinômio nulo, então

$$P(x) \cdot 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \deg(R) \text{ é indefinido.} \tag{15}$$

- Se um dos polinômios for uma constante (grau zero), ou seja, $Q(x) = c$ com $c \neq 0$, então

$$\deg(R) = \deg(P). \tag{16}$$

- Se os coeficientes líderes se cancelarem ($a_n b_m = 0$), o grau do produto pode ser menor que $n + m$.

6 Composição de Polinômios e Relação dos Graus

Sejam dois polinômios:

$$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \tag{17}$$

e

$$G(x) = b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0. \tag{18}$$

A composição $G(P(x))$ é definida como:

$$R(x) = G(P(x)) = b_m P(x)^m + \cdots + b_1 P(x) + b_0. \tag{19}$$

6.1 Relação Entre os Graus

Se $\deg(P) = n$ e $\deg(G) = m$, então o grau do polinômio composto $R(x) = G(P(x))$, denotado por $\deg(R)$, segue a relação:

$$\deg(G(P(x))) = m \cdot n. \tag{20}$$

Explicação: Como o maior termo de $P(x)$ é $a_n x^n$, quando elevado à potência m em $G(P(x))$, o termo de maior grau será:

$$b_m (a_n x^n)^m = b_m a_n^m x^{n \cdot m}. \tag{21}$$

Portanto, o grau do polinômio resultante é $n \cdot m$.

6.2 Casos Especiais

- Se $G(x)$ for um polinômio constante, ou seja, $m = 0$, então $\deg(G(P(x))) = 0$.
- Se $P(x)$ for um polinômio constante, então $\deg(G(P(x)))$ será o grau de $G(x)$ avaliado nessa constante.
- Se os coeficientes líderes se cancelarem, o grau pode ser menor que $m \cdot n$.

Lema: Seja $P(x)$ um polinômio de coeficientes **inteiros**. Então, temos que:

$$m - n \mid P(m) - P(n) \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}, \quad \text{com } m \neq n \tag{22}$$

Prova: Pela definição de polinômios, sendo k o grau do polinômio $P(x)$, podemos concluir que:

$$P(m) - P(n) = \sum_{i=0}^{k} a_i m^i - \sum_{i=0}^{k} a_i n^i \tag{23}$$

$$P(m) - P(n) = \sum_{i=0}^{k} a_i (m^i - n^i) \tag{24}$$

Para concluir a prova, basta lembrar que o produto notável:

$$m^i - n^i = (m - n) \cdot (m^{i-1} + m^{i-2} n + \cdots + m n^{i-2} + n^{i-1}). \tag{25}$$

Significa que $m - n \mid m^i - n^i$, para todo i inteiro positivo.

6.3 Teoremas

Teorema 1. (Algoritmo da divisão) Para dois polinômios $P(x)$ e $D(x)$, com $D(x) \neq 0$, existem dois únicos polinômios $Q(x)$ e $R(x)$ tais que:

$$P(x) = D(x) Q(x) + R(x) \tag{26}$$

com $\deg(R(x)) < \deg(D(x))$.

- A prova para a existência de tais polinômios é imediata a partir do processo de divisão de forma análoga à divisão de números inteiros.

- Por exemplo, para os polinômios $P(x) = x^3$ e $D(x) = x^2 + x - 1$, temos:
- $$\begin{array}{r|l} x^3 & x^2+x-1 \\ \cline{2-2} \underline{-x^3-x^2+x} & x-1 \\ -x^2+x & \\ \underline{x^2+x-1} & \\ 2x-1 & \end{array}$$

$Q(x) = x - 1$ e $R(x) = 2x - 1$. Em outros termos matemáticos,temos que: $x^3 = (x^2 + x - 1)(x - 1) + (2x - 1)$

Para o resultado anterior, os coeficientes podem estar em: $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{C}$.
Se $R(x) = 0$, dizemos que $D(x) \mid P(x)$
Se r é um número tal que $P(x) = 0$, então r é raiz de $P(x)$.
Teorema 2. Um número c é raiz do polinômio $P(x) \iff (x - c) \mid P(x)$
Prova: Pelo teorema anterior, temos que existem dois únicos polinômios $(Q(x))$ e $(R(x))$tais que:
$P(x) = (x - c)Q(x) + R(x)$
$g(R(x)) < g(x - c) = 1$
Daí, temos que:
$g(R(x))$ é menor que $1 \Rightarrow g(R(x)) = 0 \Rightarrow R(x)$ é polinômio constante
Tomando $(x = c)$, podemos concluir que:
$P(c) = (c - c)Q(c) + R(c) \Rightarrow P(c) = R(c)$
$R(c)$ é cte $\Rightarrow R(c) = 0$
$(x - c)|P(x) \Rightarrow P(x) = 0$ Daí, basta fazer $(x = c)$ em:
$P(x) = (x - c)Q(x) \Rightarrow P(c) = 0$
Teorema 3, Fundamental da Aritmética
Todo polinômio, com uma só variável, de grau (n), com coeficientes complexos, possui exatamente (n)raízes, contadas com suas multiplicidades.
A prova deste teorema foge ao escopo deste material.
A partir dos resultados apresentados, podemos perceber que é possível escrever qualquer polinômio como:
$P(x) = an \prod i = 1^n (x - x_i) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$ sendo $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ as raízes de $(P(x))$, podendo haver igualdades entre as raízes.
De forma geral, se (a) é uma raiz que tem multiplicidade (k), então podemos concluir que: [$(x - a)^k|P(x)$
Por exemplo, para o polinômio:
$x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = (x - 2)^2(x - 1)$
o número 2 é uma raiz de multiplicidade dois (ou também chamado de raiz dupla).
Máximo Divisor Comum O Máximo Divisor Comum (MDC) de dois polinômios é um polinômio de grau máximo que divide ambos os polinômios. Esse conceito é fundamental em álgebra, pois permite a simplificação de expressões algébricas, além de ser útil em diversas áreas, como a resolução de equações polinomiais.
Definição Sejam $P(x)$ e $Q(x)$ dois polinômios. O MDC de $P(x)$ e $Q(x)$, denotado por $\text{MDC}(P(x), Q(x))$, é o maior polinômio $D(x)$ tal que $D(x)$ divide tanto $P(x)$ quanto $Q(x)$.
Formalmente, $D(x)$ é o MDC de $P(x)$ e $Q(x)$ se e somente se:

$$D(x) \mid P(x) \quad \text{e} \quad D(x) \mid Q(x)$$

onde $D(x)$ é o polinômio de maior grau que divide ambos.

Exemplo de Cálculo do MDC Considere os seguintes polinômios:

$$P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$
$$Q(x) = x^2 - x - 6$$

Para calcular o MDC de $P(x)$ e $Q(x)$, podemos utilizar o algoritmo de Euclides, que é uma técnica eficiente para encontrar o MDC de polinômios.

Passo 1: Divisão de $P(x)$ por $Q(x)$

Primeiro, dividimos $P(x)$ por $Q(x)$ usando a divisão de polinômios.

Divisão de $P(x)$ por $Q(x)$:

$$P(x) \div Q(x) = \left(x^3 - 2x^2 - 5x + 6\right) \div \left(x^2 - x - 6\right)$$

Ao realizar a divisão, obtemos:

$$P(x) = (x-1)(Q(x)) + R(x)$$

onde $R(x)$ é o resto da divisão.

Passo 2 Verificar o Resto: Se o resto $R(x)$ for zero, então $Q(x)$ é o MDC. Caso contrário, o MDC será o MDC de $Q(x)$ e $R(x)$.

6.4 Exemplos

Exemplo 1. Dado o polinômio:

$$P(x) = (1 + x + x^2)^{100} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{200}x^{200}$$

Calcule os valores de

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{200} \quad \text{e} \quad a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{200}$$

Solução A primeira soma é imediata ao fazer $x = 1$ em $P(x)$:

$$P(1) = (1 + 1 + 1)^{100} = 3^{100} \Rightarrow \sum_{i=0}^{200} a_i = 3^{100}$$

Chamemos s_p à segunda soma. Definindo s_i como $a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{200}$, pelo que já encontramos, temos que:

$$s_p + s_i = 3^{100}$$

Precisamos, então, de mais uma equação. Ela vem de $x = -1$ em $P(x)$:

$$P(-1) = [1 + (-1) + (-1)^2]^{100} = 1^{100} = 1$$

$$P(-1) = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots - a_{199} + a_{200} = s_p - s_i = 1$$

Resolvendo o sistema com as duas equações encontradas, podemos concluir que:

$$s_p = \frac{3^{100} + 1}{2}$$

Exemplo 2. (*Rússia/2011*) Um trinômio quadrático mônico $P(x)$ é tal que $P(x)$ e $P(P(P(x)))$ possuem uma raiz em comum. Prove que $P(0) \cdot P(1) = 0$.

Solução Pelo enunciado, temos que existem números a e b tais que:

$$P(x) = x^2 + ax + b$$

Sendo r a raiz comum, tomando $x = r$, podemos concluir que:

$$P(P(P(r))) = P(P(0))$$

$$0 = P(P(0))$$

$$0 = P(b) = b^2 + ab + b = b(b + a + 1)$$

com $b = P(0)$ e $(b + a + 1) = P(1)$

Portanto, $P(0) \cdot P(1) = 0$.

Para assimilar melhor a ideia de olhar o produtório de $(x - x_i)$, onde x_i são as raízes, vejamos mais um problema, desta vez, envolvendo um pouco de combinatória:

Exemplo 3. (*Rússia/2017*) Sejam a, b, c três inteiros positivos dados, dois a dois distintos. Existe um polinômio do 2º grau $P(x) = kx^2 + lx + m$, com k, l, m inteirose $k$maior do que 0, tal que existem outros três inteiros d, e, f para os quais temos que $P(d) = a^3$, $P(e) = b^3$ e $P(f) = c^3$?

Solução Sim. Basta tomar:

$$P(x) = x^3 - (x - a) \cdot (x - b) \cdot (x - c)$$

$$= (a + b + c)x^2 - (ab + bc + ca)x + abc$$

, com $(a + b + c) = k$ maior do que 0.

7 Problemas

Problema 1. (*Rússia/2011*) Pedro e Nicolas participam de um jogo. Cada um deles escreve dois números em seus respectivos cadernos: Pedro escreve $1, 2$ e Nicolas escreve $3, 4$. Em seguida, a cada minuto, cada um adiciona à sua lista um polinômio de 2º grau cujas raízes são os números de seu caderno. Seja $f(x)$ e $g(x)$tais polinômios.Em seguida, se a equação $f(x) = g(x)$ possui duas raízes reais diferentes das raízes x_1 e x_2, então qualquer um deles apaga os números do seu caderno e escreve, no lugar deles, os números x_1 e x_2. Caso contrário, nada acontece. Em algum momento, Pedro escreve um 5 em seu caderno.Determine todos os possíveis valores do segunfo número que ele pode ter escruto em tal momento.

Problema 2.(Grécia/2020) Encontre todos os polinômios não constantes P(x)e $Q(z)$com coeficientes reais tais que: $P((Q(x))^3) = xP(x)(Q(x))^3$

Problema 3(Canadá/2016) Encontre todos os polinômios $P(x)$ com coeficientes inteiros tais que $P(P(n) + n)$ é igual a um número primo para infinitos inteiros n.

Problema 4 (Austria/2017) Determine todos os polinomios $P(x)$ com coeficientes reais, que satisfaz as duas condições a seguir: $P(2017) = 2016$ e $(P(x) + 1)^2 = P(x^2 + 1)$

Problema 5.(IMO/2016) Um conjunto de inteiros positivos é chamado de perfumado se ele contém no mínimo dois elementos e cada um de seus elementos possui um fator primo em comum com, pelo menos, um outro elemento dele. Seja $P(n) = n^2 + n + 1$ Qual é o menor valor do inteiro positivo o para o qual existe um inteiro não negativo a para o qual o conjunto $P(a+1), P(a+2), * * *, P(a+b)$ é perfumado?

8 Referências Bibliográficas:

8.1 Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo (POTI)

8.2 Algebra do Zero ao IME ITA Cone Sul EGMO - Armando Barbosa

8.3 Tópicos de Matemática (IME-ITA-Olimpíadas) - Carlos A. Gomes e José Maria Gomes.