Teoria dos Grafos: Árvores

João Pedro de Almeida da Silva

1 Introdução

Para esse material, é recomendável que o leitor já tenha uma pequena base sobre a Teoria dos Grafos, cujo material introdutório já está no ampulheta:

Introdução a Grafos/Ampulheta do Saber

Nesse material, introduziremos a parte de árvores, que são tipos especiais de grafos muito importantes e que costumam cair bastante nas olimpíadas.

2 Árvores, florestas e folhas

Definição:

• Uma **floresta** é um grafo sem ciclos.

• Uma **árvore** é um grafo sem ciclos e conexo.

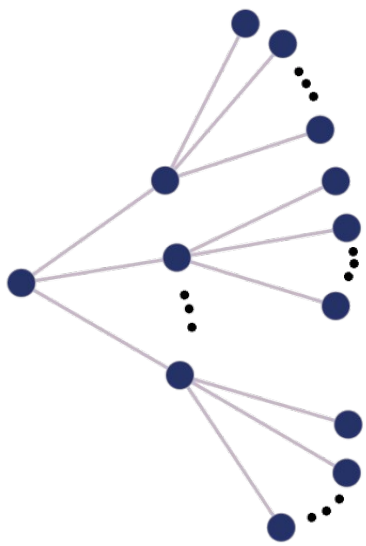
• Uma **componente conexa** em um grafo G é um subgrafo de G maximal conexo.

Assim, podemos dizer que uma floresta é um conjunto de árvores. Também, cada árvore da floresta são componentes conexas.

Lema:
Dado um grafo G de n vértices, se $|A| \geq n$, então o grafo G tem algum ciclo, onde $|A|$ é a quantidade de arestas de G.

Prova:

Vamos supor que o grau de cada vértice é maior que 0, pois caso exista um vértice de grau 0, é possível considerar o subgrafo sem tal vértice e resolver com $n-1$ vértices. Assim, se $v \in G$, $deg(v) \geq 1$. Supondo que o grau de todos os vértices é maior que 2, certamente existe ciclo, basta seguir o maior caminho e ver que é sempre possível continuá-lo, e como a quantidade de vértices é limitada, uma hora ocorrerá repetição, por princípio da casa dos pombos. Assim, é necessário que alguém tenha grau exatamente 1. Fixando esse vértice, podemos pegar seu vizinho, depois pegar os vizinhos do vizinho, e assim por diante:



Assim, se algum dos vizinhos eventualmente é um vértice que já foi passado, com certeza existe ciclo. Mas também, se isso não ocorre, temos que é possível associar cada vértice com a sua aresta anterior que foi trazida do seu vizinho imediatamente anterior, então como temos o 1 não sendo associado com ninguém, a quantidade de vértices é n e a de arestas é $n-1$, contrariando o enunciado. Logo, existe algum ciclo em G.

Veja que, pela definição de árvore, podemos garantir que existe alguém com grau 1, utilizando o argumento da prova anterior. Também, por ser conexo, podemos ir pegando os vizinhos desse vértice de grau 1, assim como feito anteriormente, e teremos um grafo com $n-1$ arestas, provando então que a quantidade de vértices em uma árvore é $n-1$, sendo então o maior grafo conexo com n vértices, usando o lema que provamos.

Definição:
• Uma **folha** é um vértice de uma árvore cujo grau é 1.

Problema 1. Prove que toda árvore com pelo menos 2 vértices tem pelo menos 2 folhas.

Solução. Pegue o maior caminho da árvore, que existe por não ter ciclo na árvore:

Certamente ninguém pode estar ligado com os vértices mais no canto do caminho, então eles terão grau 1, isso é, são folhas.

Problema 2. Prove que não existem dois caminhos diferentes indo de um vértice a outro em um grafo sem ciclos.

Solução. Suponha que existam dois caminhos distintos que levem de um vértice v para um u. Perceba que existe um primeiro momento que as arestas serão diferentes, caso não exista, os caminhos serão iguais. Também existe um primeiro momento em que as arestas do caminho 1 se encontram em um vértice com uma do caminho 2, pois eles se encontram pelo menos em u, assumindo que os caminhos saiam de v. Veja que isso formaria um ciclo, mas o grafo não tem ciclos, gerando absurdo. Assim, existe apenas um caminho que leve de v até u.

Definição:

• Chamamos de **subárvore** de um grafo G qualquer subgrafo de G que seja uma árvore.

• Uma **árvore geradora** de um grafo G é uma subárvore de G que contém todos os vértices do grafo.

Se um grafo tem uma árvore geradora, certamente é conexo. Porém, não é trivial perceber que, se o grafo é conexo, então existe árvore geradora.

Problema 3. Em um país com n cidades, é possível ir de qualquer cidade para outra a partir de estradas que as ligam, podendo passar ou não por cidades intermediárias. Prove que existem $n-1$ estradas que ligam as cidades de forma que ainda é possível ir de qualquer cidade para outra só utilizando as $n-1$ estradas.

Solução. Veja que o problema transformado em grafos é análogo a provar que se um grafo é conexo, então ele tem uma árvore geradora. Chame o grafo de G. Pegue um vértice v qualquer de G e deixe-o marcado. O que vamos fazer é ligar todos os vizinhos de v e marcá-los. Após isso, pegue um vértice dos vizinhos de v e ligue-o a todos seus vizinhos que não estejam marcados, e marque-os. Agora pegue outro vértice marcado e faça análogo. Se fizermos esse processo em todos os vértices, teremos a árvore geradora. Isso ocorre pois se uma quantidade $k \leq n$ de vértices não forem marcados, então nenhum é vizinho dos $n-k$ marcados, isso é, G não é conexo. Logo, todos os n vértices são marcados. Para provar que não tem ciclo, basta olhar para cada parte do algoritmo e ver que tem ciclo se, e somente se, ligarmos um vértice a algum já marcado, que não acontece. Assim, achamos a árvore geradora de G.

Problema 4. Prove que em um grafo de n vértices, m arestas e p componentes conexas, temos $p+m \geq n$.

Solução. Podemos pegar apenas as árvores geradoras de cada componente conexa, pois estamos diminuindo m, mantendo p e mantendo n, isso é, se der certo com apenas as árvores geradoras, dá certo com qualquer componente conexa. Assim, estamos assumindo que nosso grafo é uma floresta. Chame de $A_1, A_2, \ldots, A_p$ cada componente conexa, e de a_i a quantidade de vértices em A_i, com $a_1 + a_2 + \ldots + a_p = n$. A quantidade de arestas é dada em cada componente por $a_i - 1$, por serem árvores, então $m = a_1 + \ldots + a_p - p = n - p$. Assim, $m + p = n$, que implica $p + m \geq n$, como queríamos.

Definição:

- Uma **árvore binária** é uma árvore que tem um vértice de grau 2 e os restantes com grau 1 ou 3, onde o vértice de grau 2 é fixado.

Podemos aplicar árvores binárias em problemas de jogos, onde o vértice de grau 2 é fixado como o início das operações que são feitas, e cada outro vértice são operações no meio do jogo, assumindo que seja um jogo com resposta binária.

3 Problemas Propostos

Problema 1. Uma coleção $G_1, G_2, \ldots, G_k$ de subárvores de uma árvore G tem a seguinte propriedade: quaisquer duas subárvores tem pelo menos um vértice em comum. Prove que existe um vértice comum a todas as subárvores.

Problema 2. Seja G uma árvore com v sendo o vértice com maior grau de G. Digamos que seu grau é k. Prove que G tem pelo menos k folhas.

Problema 3. Prove que em toda árvore é possível pintar os vértices de preto e branco, de forma que nunca temos duas cores iguais adjacentes.

Problema 4. Há 1990 residentes em um distrito. Todos os dias cada um deles conta as notícias que ouviram ontem a todos os seus conhecidos e qualquer notícia pode gradualmente ser conhecida por todos. Prove que podemos selecionar 180 residentes para que sejam informados de algumas novidades ao mesmo tempo e depois de no máximo dez dias, essa notícia será conhecida por todos os moradores.

Problema 5. Existem n segmentos no plano, tal que quaisquer 3 deles tem um fim em comum. Prove que os n segmentos tem um fim comum.

Problema 6. (IMO/1986) É dado no plano um conjunto finito E de pontos de coordenadas inteiras. É sempre possível colorir todos os pontos de E, com duas cores, vermelho ou branco, de modo que para toda reta r paralela, quer ao primeiro, quer ao segundo eixo coordenado, a diferença entre o número de pontos vermelhos e o número de pontos brancos, pertencente a r, seja 1, 0 ou -1?

Problema 7. Um grafo de n vértices tem a seguinte propriedade: para todo vértice do grafo, existe outro com distância exatamente m a esse vértice. Mostre que $m \leq \frac{n}{2}$.

Problema 8. (Shortlist IMO/2004) A seguinte operação é permitida em um grafo finito: escolha um ciclo de tamanho 4 (se existe), e retire uma aresta desse ciclo. Para um $n \geq 4$, ache o menor número de arestas que é possível deixar um grafo completo de n vértices após fazer a operação uma quantidade finita de vezes (um grafo completo é quanto todo vértice está ligado a todos os outros no grafo).

Problema 9. (IMO/2006) Seja P um polígono regular de 2006 lados. Uma diagonal é chamada de boa se suas extremidades dividem o entorno de P em duas partes, cada uma composta por um número ímpar de lados de P. Os lados de P também são considerados bons. Suponha que P foi dividido em triângulos por 2003 diagonais que não se cruzam dentro de P. Encontre o máximo número de triângulos isósceles tendo dois lados bons que podem aparecem em tais configurações.

Problema 10. Prove que se as arestas de um grafo completo de n vértices são coloridas de modo que nenhuma cor é associada a mais de $n-2$ arestas, então existe um triângulo com as arestas de cores distintas (um grafo completo é um grafo cujo todas as arestas associadas aos vértices estão no grafo).

Bibliografia.

1. Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo
(POTI)

2. Art of Problem Solving
(AOPS)

3. Mathematical Olympiad Series/Vol. 3

4. 11 - Árvores - Unesp