Teoria dos Grafos

João Pedro de Almeida da Silva

1 Introdução

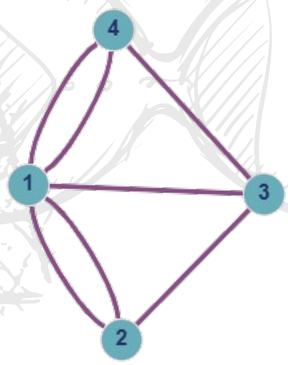
A Teoria dos Grafos é uma das partes mais importantes da combinatória. Nesse material, introduziremos ao leitor as principais ideias por trás de problemas olímpicos de grafos, que caem recorrentemente nas provas olímpicas.

2 O que é um grafo?

Definimos um grafo G como um conjunto de vértices V ligados por arestas A. A partir dessa simples definição, é possível criar uma das maiores teorias matemáticas atuais.

Para melhor entendimento, iremos trabalhar com um problema proposto na cidade de Konigsberg em 1736, pelo matemático Leonhard Euler:

Problema 1. É possível passar por todos as arestas do grafo abaixo exatamente uma vez, começando por qualquer ponto?



Solução.

Antes de ver a solução, vamos ver algumas características interessantes sobre esse grafo. Chamando o grafo de G, temos que, se $G = (V, A)$, com V o conjunto de vértices e A o de arestas, $V = \{1, 2, 3, 4\}$ e $A = \{(1, 2); (1, 2); (2, 3); (1.3); (4, 3); (1, 4); (1, 4)\}$. Nesse caso, A está sendo multiconjunto, pois temos elementos repetidos.

Agora, perceba que a quantidade de arestas ligadas a cada vértice é uma quantidade ímpar, sendo cinco para o vértice 1 e três para os restantes. Assim, escolhendo qualquer vértice para começar, "perdemos"uma aresta ao sair do vértice para um adjacente. Como a quantidade de arestas que estavam ligadas para esses vértices era ímpar, ao retirar um a quantidade fica par. Generalizando essa ideia, podemos perceber que ao entrar em um vértice que tem quantidade de arestas ligadas ímpares, elas se tornam pares. Porém, para passar por todos as arestas, seria necessário fazer a operação sair e entrar do vértice uma quantidade igual de vezes, pois não é possível entrar sem ter saído logo antes.

Assim, para todos os vértices que não são o primeiro e tem quantidade de arestas ligadas ímpar, seria necessário terminar o caminho neles, mas temos três vértices com tais características, sendo então impossível passar por todas as arestas do grafo exatamente uma vez.

Na nossa solução, perceba que algo muito utilizado é o argumento da quantidade de arestas ligadas com o vértice. Devido a importância desse argumento para muitas questões de grafo, criamos a seguinte definição;

Definição:

• O **grau** de um vértice é definido como a quantidade de arestas ligadas a tal vértice. Para um vértice v, escrevemos seu grau como $deg(v)$.

Vamos explorar um pouco mais do grau dos vértices futuramente, por enquanto, vamos apresentar mais algumas definições:

Definição:

• Chamamos de **grafo simples** quando um grafo $G = (V, A)$ é tal que, para $A = \{(a,b)|a,b \in V\}$, não é possível $a = b$ ou existir pares iguais ordenados, isso é, A é um conjunto.

• Chamamos de **multigrafo** quando um grafo $G = (V, A)$ é tal que $A = \{(a,b)|a,b \in V\}$, com (a,b) ordenado.

Simplificando o que foi dito, um grafo simples é quando dois vértices tem no máximo uma aresta que os une e não é possível ligar um vértice a ele mesmo, enquanto um multigrafo não tem tais restrições.

Assim, perceba que o grafo do problema 1 é um multigrafo, pois temos que os pares ordenados $(1,2)$ e o $(1,4)$ são contados duas vezes em A.

A partir do que sabemos, é possível descobrir o seguinte teorema:

Teorema:

Dado um grafo $G = (V, A)$ com $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$, temos que

$$\sum_{i=1}^{n} deg(v_i) = 2|A|$$

, com $|A|$ sendo a quantidade de arestas de G.

Prova:

Perceba que ao ligar dois vértices, a quantidade de arestas aumenta em uma unidade, enquanto o grau aumenta em dois, pois cada vértice aumenta o grau em um. Assim, temos que, indutivamente, o somatório dos graus é duas vezes a quantidade de arestas.

Problema 2. Prove que a quantidade de pessoas que apertaram as mãos uma quantidade ímpar de vezes é par.

Solução. Veja as pessoas como vértices e os apertos de mão entre as pessoas as arestas em um grafo, pois aperto de mão é uma relação mútua. Temos que a soma total dos graus é par, pois

$$\sum_{i=1}^{n} deg(v_i) = 2|A|$$

.

Assim, suponha que a quantidade de pessoas que apertaram as mão uma quantidade ímpar de vezes é ímpar, isso é, a quantidade de graus ímpares é ímpar. Veja que, se isso ocorre, por ímpar+ímpar=par e par+ímpar=ímpar, então, indutivamente, a soma desses caras ímpares é ímpar. Como os caras com grau par não influenciam na paridade da soma, então o somatório dos graus é ímpar, mas já sabemos que

$$\sum_{i=1}^{n} deg(v_i) = 2|A|$$

, o que gera um absurdo!

Logo, a quantidade de pessoas que apertaram as mãos uma quantidade ímpar de vezes é par.

Problema 3. John mora na Disneylândia. Ele disse que lá há um lago encantado com 7 ilhas, cada uma das quais parte $1,3$ ou 5 pontes. É verdade que no mínimo uma dessas pontes deve ligar uma ilha à terra?

Solução. Veja as ilhas como vértices e as pontes como arestas em um grafo. Se nenhuma ponte está ligada à terra, então todas as pontes estão ligando ilha com ilha. Como temos que o grau de cada vértice é $1,3$ ou 5 e temos 7 ilhas, a soma total dos graus é ímpar. Mas pelo teorema,

$$\sum_{i=1}^{n} deg(v_i) = 2|A|$$

, fazendo com que a soma dos graus seja par. Logo, é necessário que uma ponte esteja ligada à terra para que o que John disse seja verdadeiro.

Muitas vezes, é interessante olhar para partes específicas do grafo em problemas. Para essas situações, definimos os subgrafos:

Definição:

• Um **subgrafo** $G' = (V', A')$ de um grafo $G = (V, A)$ é um grafo tal que $V' \subseteq V$ e $A' \subseteq A$.

• Um **subgrafo induzido** G' é um subgrafo de G, mas todo vértice de G' é ligado se, e somente se, é ligado com os respectivos vértices em G.

3 Grafos Conexos e Orientados

Definição:

• Um **caminho** em um grafo G é uma sequência de vértices conectados por arestas.

• Um **ciclo** em um grafo G é um caminho que começa e termina em um vértice v_i do grafo sem repetir arestas.

• Um **grafo conexo** é um grafo G onde é possível ir de qualquer vértice à outro por meio de caminhos.

Além do estilo convencional de grafo que estamos estudando, é possível direcionar nossas arestas, conseguindo muitas vezes informações mais completas do que teríamos com um grafo comum.

Definição:

• Um **grafo direcionado** é um grafo cujo as arestas tem uma entrada diferente da saída, sendo a saída representada como *out* e a entrada como *in*. Assim, a aresta (a, b) é diferente de (b, a), para a, b vértices de G.

Perceba que com essa definição, algumas coisas se alteram em relação ao grau do vértice. Para isso, vamos chamar de $in(v)$ o grau de entrada no vértice e $out(v)$ o grau de saída do vértice. Temos que:

Teorema:
Dado um grafo $G = (V, A)$ com $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, temos que

$$\sum_{i=1}^{n} in(v_i) = \sum_{i=1}^{n} out(v_i) = |A|$$

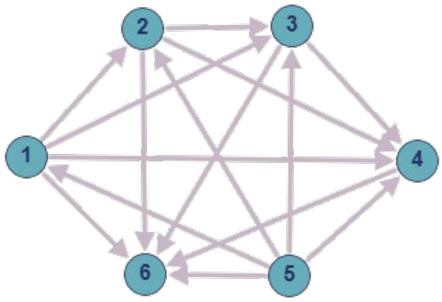
, com $|A|$ sendo a quantidade de arestas de G.

Prova:

Perceba que ao ligar dois vértices, a quantidade de arestas aumenta em uma unidade, assim como a quantidade de in e out. Assim, temos que, indutivamente, o somatório do $in(v)$ é igual ao somatório do $out(v)$, que é igual a quantidade de arestas.

Problema 1. (OBM/2006) Em um torneio de tênis de mesa (no qual nenhum jogo termina empatado), cada um dos n participantes jogou uma única vez contra cada um dos outros. Sabe-se que, para todo $k > 2$, não existem k jogadores $J_1, J_2, \ldots, J_k$ tais que J_1 ganhou de J_2, J_2 ganhou de J_3,..., J_{k-1} ganhou de J_k e J_k ganhou de J_1. Prove que existe um jogador que ganhou de todos os outros e existe um jogador que perdeu de todos os outros.

Solução. Perceba que é bem difícil estabelecer relações de vitória ou derrota em um grafo comum. Por isso, defina o grafo direcionado G com os jogadores sendo vértices e as arestas sendo as partidas entre eles, com o in sendo a derrota e o out a vitória. Traduzindo a questão para grafos, queremos mostrar que existe vértices com $in(v) = n - 1$ e outro com $out(v) = n - 1$, dado que não existe ciclo no grafo. Para isso, suponha que não existe algum vértice com $in(v), out(v) = 0$. Pegado um vértice qualquer, veja que é possível começar um caminho a partir de um out, ligando nosso vértice com algum outro. Agora, veja que nosso próximo vértice também precisa ter um out, pela nossa suposição. Pegue assim o próximo vértice e veja que ele está ligado também com mais outro out, pela suposição. Faça esse algoritmo uma certa quantidade de vezes. Como a quantidade de vértices é finita, uma hora alguma ligação será feita entre um vértice que já passou, mas isso implica que criamos um ciclo, absurdo. Assim, nossa suposição de que $in(v), out(v) = 0$, $\forall$ vértice, isso é, existe um vértice com $in(v) = n - 1$ e outro com $out(v) = n - 1$. Podemos dar um exemplo para $n = 6$:



Pegando 1 como o primeiro vértice, ligue-o, sem perda de generalidade, com o 2. Ligue também o 2 com o 3. Veja que 3 não pode ligar para o 1, senão fecharíamos um ciclo, então ligue para o 4. O 4 não pode ligar nem para o 1, nem para o 2, então ligue-o com o 5. De forma análoga, o 5 só poderá ser ligado ao 6, e aí o 6 não pode ser ligado com ninguém, fazendo com que ele receba todas as flechas, isso é, $in(6) = 5$. Também, o $out(1) = 5$, apesar de diferir com a imagem, pois se alguém manda seta para o 1 formaria um ciclo.

4 Problemas Propostos

Problema 1. (Ramsey) Prove que em um grupo de 6 pessoas, existem 3 que se conhecem ou que não se conhecem (Conhecer é uma relação mútua).

Problema 2. Em um grupo de 6 pessoas, não existe um trio de amigos, nem 5 pessoas a, b, c, d, e tais que a é amigo de b, b é amigo de c, c é amigo de d, d é amigo de e e e é amigo de a. Prove que podemos particionar essas 6 pessoas em dois grupos tal que em cada grupo, não temos ninguém que é amigo.

Problema 3. 50 cientistas fazem experimentos em pares. Cada cientista faz experimento com outros 25 cientistas. Prove que é possível colocar os cientistas em uma mesa circular de modo que os dois vizinhos de um cientista fazem experimentos junto dele.

Problema 4. Em um país você pode ir de avião de uma cidade até qualquer outra. Quando não há voo direto entre as cidade, existe voos com escala. Durante o caminho de uma cidade até outra, só podemos passar pelas cidades no máximo uma vez. Nós chamamos de tamanho do trajeto entre duas cidades o número de escalas para ir de uma até outra (através de qualquer caminho).

Prove que se existe dois trajetos de tamanho máximo, eles possuem uma escala em comum.

Problema 5. Existem $n \geq 5$ pessoas em uma festa. Suponha que entre quaisquer 3 pessoas, existem pelo menos duas que se conhecem. Mostre que podemos selecionar pelo menos $\frac{n}{2}$ pessoas e arranjá-las em torno de uma mesa circular de modo que cada pessoa fique ao lado de dois amigo.

Problema 6. Em uma conferência, existem $12k$ pessoas. Cada uma aperta a mão de outras $3k+6$ pessoas. Sabe-se que existe n tal que quaisquer duas pessoas apertou exatamente n mãos em comum. Determine n e k.

Problema 7. (CoNeMat/2024) Em uma festa de 25 pessoas, quando dois não são amigos, então eles possuem algum amigo em comum. Sabemos que ninguém da festa é amigo de todos. Prove que a soma dos números de amigos de cada pessoa na festa é pelo menos 72.

Problema 8. (TST Cone Sul/2015) No país dos elfos, existem n cidades, com $n \geq 3$. Essas cidades são ligadas por estradas de mão-única e entre duas cidades existe uma estrada ou nenhuma estrada. Sabe-se que de cada cidade parte pelo menos uma estrada cujo sentido é desta cidade para outra. Dizemos que uma cidade A é alcançada por B se é possível encontrar um caminho seguindo pelas estradas da cidade B até a cidade A. Um polo turístico é um conjunto de três ou mais cidades tais que todas as cidades podem ser alcançadas pelas mesmas cidades, ou seja, se X e Y estão em um polo e X é alcançada por Z então Y também é alcançada por Z. Observe que uma cidade X pode ser alcançada por ela mesma.

a) Mostre que o país dos elfos possui pelo menos um polo turístico.

b) Suponha que existe apenas um polo turístico. Mostre que se todas as estradas se tornarem de mão-dupla, então será possível viajar de qualquer cidade A até qualquer cidade B usando as estradas.

Problema 9. (IMO Shortlist/2021) Seja $n \geq 100$ um inteiro. Ivan escreve os números n, $n+1$,..., $2n$ em cartas. Ele embaralha essas cartas e divide em duas pilhas. Prove que em pelo menos uma pilha existe duas cartas que somam um quadrado perfeito.

Problema 10. (OBM/2011) Um álbum, composto por 2011 figurinhas, está sendo colecionado por 33 amigos. Uma distribuição de figurinhas entre os 33 amigos é incompleta quando existe pelo menos uma figurinha que nenhum dos 33 amigos tem. Determine o menor valor de n com a seguinte propriedade: toda distribuição de figurinhas entre os 33 amigos tal que, para quaisquer dois dos amigos, faltam, para ambos, pelo menos n figurinhas em comum, é incompleta.

Problema 11. (IMO/2005) Numa competição de matemática na qual foram propostos 6 problemas, quaisquer dois problemas foram resolvidos por mais de $\frac{2}{5}$ dos estudantes. Além disso, nenhum estudante resolveu os 6 problemas. Mostre que existem pelo menos 2 estudantes que fizeram 5 problemas cada um.

Problema 12. (TST Cone Sul/2019) Vinte jogadores participaram de um torneio de xadrez. Cada jogador enfrentou todo outro jogador exatamente uma vez e cada partida terminou com a vitória de um dos jogadores ou em empate. Nesse torneio, notou-se que para cada partida que terminou em empate, cada um dos demais 18 jogadores venceu pelo menos um dos dois jogadores envolvidos nela. Sabemos ainda que pelo menos dois jogos terminaram em empate. Mostre que é possível nomear os jogadores como $P_1, P_2, \ldots, P_{20}$ de modo que o jogador P_k ganhou do jogador $Pk+1$, para cada $k \in 1, 2, 3, \ldots, 19$.

Problema 13. (TST Cone Sul/2018) Em um país, há 2018 cidades e 4033 estradas, onde cada estrada interliga duas cidades distintas. Sabe-se ainda que para cada par de cidades, há no máximo uma estrada interligando este par. Prove que existe um inteiro $4 \leq n \leq 2018$ e cidades $C_1, \ldots, C_n$, duas a duas distintas, tais que as seguintes propriedades são válidas simultaneamente:

(i) C_i está interligada a $Ci+1$ para todo $1 \leq i \leq n-1$.

(ii) C_1 está interligada a C_n.

(iii) Existem j e k com $1 \leq j < k \leq n$ tais que $k - j \neq 1, k - j \neq n-1$ e C_j está interligada a C_k.

Bibliografia.

1. Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo
(POTI)

2. Art of Problem Solving
(AOPS)

3. Mathematical Olympiad Series/Vol. 3

4. Grafos-27° Semana Olímpica/Yvens Ian