Introdução ao Cálculo

Arthur Alencar Spuri

1 Introdução

O cálculo é uma das áreas mais fundamentais da matemática, desempenhando um papel central no desenvolvimento de diversas ciências e tecnologias. Criado independentemente por Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz no século XVII, o cálculo revolucionou a maneira como compreendemos o mundo ao fornecer ferramentas matemáticas para modelar mudanças e variações.

As aplicações do cálculo são vastas e abrangem múltiplas áreas do conhecimento. Na física, ele permite descrever o movimento dos planetas, a dinâmica dos fluidos e o comportamento das ondas eletromagnéticas. Na engenharia, é essencial para a análise estrutural, otimização de processos e desenvolvimento de novos materiais. Na economia e nas ciências sociais, o cálculo ajuda a modelar taxas de crescimento, otimizar recursos e prever tendências de mercado. Além disso, em áreas como biologia, computação e inteligência artificial, o cálculo é utilizado para modelar sistemas complexos e desenvolver algoritmos avançados.

Neste material, o foco está na aplicação do cálculo na resolução de problemas de Olimpíadas de Matemática. O cálculo diferencial e integral aparece frequentemente em competições avançadas, sendo utilizado para otimizar funções, resolver problemas de máximos e mínimos, analisar o comportamento assintótico de sequências e funções, bem como justificar rigorosamente limites e séries. Além disso, técnicas de integração e diferenciação são ferramentas poderosas para resolver problemas inusitados e encontrar conexões entre diferentes áreas da matemática olímpica.

Com uma abordagem voltada para problemas matemáticos, este material busca fornecer uma base sólida e estratégias úteis para estudantes que desejam se aprofundar no cálculo e desenvolver uma nova ferramenta para a resolução de problemas olímpicos. Partiremos então nessa nova jornada por uma das matéria mais bonitas e interessantes da matemática!

Antes de continuar, aviso que será necessária uma noção básica prévia sobre análise de funções, pois são conceitos muito presentes nessa matéria e, embora eu tentarei explicar intuitivamente o que significam os termos, será mais fácil de compreender o conteúdo com tal base.

2 Limites

Antes de mergulharmos no mundo dos limites, vamos falar um pouco sobre funções contínuas.

2.1 Funções contínuas

Considere uma função f(x). Dizemos que essa função é contínua se ela não possui "buracos"ou pontos indefinidos, como nas figuras abaixo, onde a figura à esquerda é de um gráfico de uma função contínua e a da direita é de uma função não contínua:

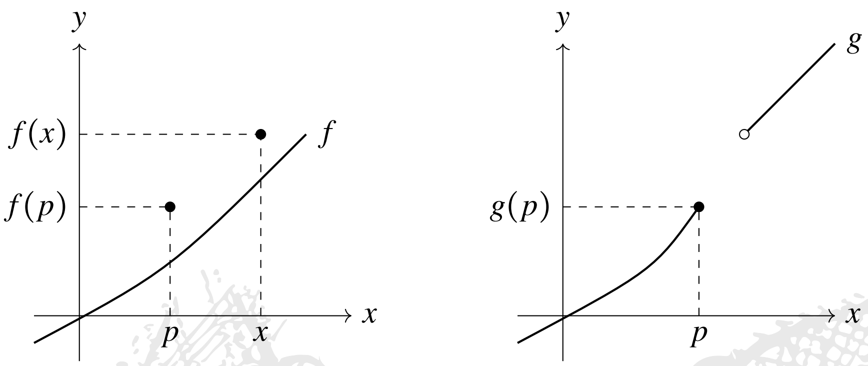


Figura 1: Função contínua e não contínua.

O que nos interessa sobre esse conceito é a pergunta: como avaliar se uma função é contínua ou não? podemos fazer isso usando o conceito de limites.

2.2 O que é um limite?

O limite de uma função f(x) quando x vai para um valor a, denotado $\lim_{x \to a} f(x)$ é nada mais, nada menos que uma forma de representar a ideia de: "para qual valor a função f(x) vai quando x se aproxima de um valor específico a?"para algumas funções, calcular tais limites pode ser fácil e simples. Para outras, no entanto, esse cálculo pode se mostrar trabalhoso.

A definição formal de limites é a seguinte:

Seja $f(X)$ uma função e seja a um ponto de de seu domínio. Dizemos que

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

se, para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que, sempre que $0 < |x - a| < \delta$ e $x \in D$, então

$$|f(x) - L| < \varepsilon.$$

Em outras palavras, estou dizendo que, para qualquer valor arbitrariamente pequeno ε que eu escolha, existe um intervalo ao redor do valor a (Nesse caso, o intervalo é entre $a + \delta$ e $a - \delta$) tal que a função em qualquer ponto do intervalo difere do valor do limite por menos que ε.

Veremos agora algumas propriedades dos limites, que podem ser provadas por meio da definição formal deles.

2.2.1 Propriedades Básicas dos Limites

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções definidas em um domínio adequado e seja a um ponto desse domínio. Se os limites de $f(x)$ e $g(x)$ existem em $x \to a$, ou seja,

$$\lim_{x\to a} f(x) = L, \quad \lim_{x\to a} g(x) = M,$$

então valem as seguintes propriedades:

- **Propriedade da Soma**:

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = L+M.$$

Prova:

Queremos provar que:

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = L+M.$$

Pela definição de limite, para todo $\varepsilon > 0$, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que:

$$0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x)-L| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$0 < |x-a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x)-M| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Escolhemos $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, garantindo que ambas as desigualdades são satisfeitas para $0 < |x-a| < \delta$. Assim,

$$|(f(x)+g(x))-(L+M)| = |f(x)-L+g(x)-M|.$$

Pela desigualdade triangular,

$$|f(x)-L+g(x)-M| \le |f(x)-L| + |g(x)-M| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Portanto, provamos que:

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = L+M.$$

- **Propriedade da Diferença**:

$$\lim_{x\to a}(f(x)-g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x) = L-M.$$

Prova:

Mesma da soma, pois subtrair é somar um número negativo

- **Propriedade do Produto**:

$$\lim_{x\to a}(f(x)g(x)) = \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} g(x) = L\cdot M.$$

Prova:

Queremos provar que:

$$\lim_{x\to a}(f(x)g(x)) = LM.$$

Sabemos que:

$$f(x)g(x) - LM = f(x)g(x) - f(x)M + f(x)M - LM.$$

Rearranjamos os termos:

$$f(x)g(x) - LM = f(x)(g(x) - M) + M(f(x) - L).$$

Sabemos que:

$$|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2(|M|+1)} \quad \text{para } 0 < |x-a| < \delta_1,$$

$$|g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2(|L|+1)} \quad \text{para } 0 < |x-a| < \delta_2.$$

Escolhendo $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, garantimos que:

$$|f(x)g(x) - LM| \le |f(x)||g(x) - M| + |M||f(x) - L| < \varepsilon.$$

Portanto, provamos que:

$$\lim_{x\to a}(f(x)g(x)) = LM.$$

- **Propriedade do Quociente** (se $M \neq 0$):

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{L}{M}.$$

Prova:

Seja $L = \lim_{x\to a} f(x)$ e $M = \lim_{x\to a} g(x) \neq 0$. Queremos provar que:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}.$$

Sabemos que:

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{L}{M}\right| = \left|\frac{f(x)M - LM + LM - Lg(x)}{Mg(x)}\right|.$$

Reescrevendo:

$$= \left|\frac{M(f(x)-L)+L(M-g(x))}{Mg(x)}\right|.$$

Pela definição de limite, existem $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que:

$$|f(x)-L| < \frac{\varepsilon|M|}{2} \quad \text{e} \quad |g(x)-M| < \frac{\varepsilon|L|}{2}.$$

Para garantir que $g(x)$ não se aproxime de zero, escolhemos δ_3 de modo que:

$$|g(x)| > \frac{|M|}{2} \quad \text{para } 0 < |x-a| < \delta_3.$$

Agora, tomando $\delta = \min(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$, obtemos:

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{L}{M}\right| < \frac{|M|(\varepsilon|M|/2)+|L|(\varepsilon|M|/2)}{|M|^2} = \varepsilon.$$

Portanto,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}.$$

- **Propriedade da Constante**:

$$\lim_{x\to a} c = c, \quad \lim_{x\to a}(cf(x)) = c\lim_{x\to a} f(x) = cL.$$

Prova: Para provar essa propriedade basta verificar que a definição formal de limites é satisfeita.

2.2.2 truques para solução de limites

- Limites por substituição direta

O caso mais simples é quando a função f(x) é definida no ponto a, pois basta substituir nosso valor a na função e calcular f(a).

Exemplo 1: calcule $lim_{x\to\pi}\ sen(x)$

Solução:

Note que $sen(\pi) = 0$, logo, como a função possui valor definido neste ponto, então $lim_{x\to\pi}$ $sen(x) = 0$

Para esse tipo de limites, não há muito segredo, só aplicar o valor, calcular e seguir com sua vida... Nem um pouco interessante, não é mesmo? Vamos para o próximo método de resolução de limites!

- Limites por fatoração

  Quando queremos calcular um limite quando a função vai para um ponto onde ela não é definida, não podemos substituir o valor de a, logo, precisamos resolver essa indeterminação, e frequentemente usamos fatorações para isso.

  Exemplo 2: Calcule $lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$

  Solução:

  inicialmente, podemos tentar substituir $x = 2$, obtendo:

$$\frac{x^2-4}{x-2} = \frac{4-4}{2-2} = \frac{0}{0}$$

  Uma indeterminação! Logo, precisamos de outro método. Veja que podemos fatorar $x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x-2)(x+2)$, logo:

$$lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = lim_{x \to 2} x+2$$

  Agora, podemos substituir diretamente, obtendo: $lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 2+2 = 4$

  Exemplo 3: calcule $lim_{x \to 0} \frac{sen(2x)}{sen(x)}$

  Novamente, começamos testando uma substituição direta:

$$\frac{sen(2x)}{sen(x)} = \frac{sen(0)}{sen(0)} = \frac{0}{0}$$

  chegando a uma indeterminação. Agora, note que podemos usar uma identidade trigonométrica para fatorar $sen(2x)$ como $2sen(x)cos(x)$, obtendo:

$$\frac{sen(2x)}{sen(x)} = \frac{2sen(x)cos(x)}{sen(x)} = 2cos(x)$$

  agora, podemos substituir:

$$lim_{x \to 0} \frac{sen(2x)}{sen(x)} = 2cos(0) = 2 * 1 = 2$$

  e terminamos.

  esse método é mais divertido que o anterior, e quanto mais avançadas as fatorações, mais legal se torna computá-lo! Vamos ao próximo, e último método!(por enquanto)

- Divisão pelo maior expoente

  um tipo de limite muito comum é o limite com x indo para o infinito, $lim_{x \to \infty} f(x)$. Quando temos esse tipo de limite, a substituição direta muitas vezes se mostra meio estranha, já que substituir ∞ em uma expressão não é muito comum, mas não se assuste, o método da substituição direta segue o mesmo, basta dizer que $\frac{1}{\infty} = 0$ e $\infty + N = \infty, \forall N \neq -\infty$. As indeterminações aqui são os casos: $\infty - \infty$, $0 * \infty$ e $\frac{\infty}{\infty}$, onde precisamos buscar outros métodos para resolução. além do método da fatoração, podemos, para frações, dividir o numerador e o denominador pelo maior expoente que aparece da variável. Isso funciona bem para polinômios, como mostrarei a seguir:

Exemplo 4: calcule $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+5x+7}{4x^2-2x+1}$

Solução: Tentando uma substituição direta, facilmente notamos que a expressão se torna $\frac{\infty}{\infty}$, logo outro método é necessário. Poderíamos buscar alguma fatoração para os polinômios, mas isso não nos ajudará muito também. Para resolver esse limite, podemos dividir o numerador e o denominador pelo termo de maior expoente, nesse caso, x^2, obtendo:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+5x+7}{4x^2-2x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{3+\frac{5}{x}+\frac{7}{x^2}}{4-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}$$

substituindo $x = \infty$:

$$\frac{3+\frac{5}{x}+\frac{7}{x^2}}{4-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}} = \frac{3+\frac{5}{\infty}+\frac{7}{\infty^2}}{4-\frac{2}{\infty}+\frac{1}{\infty^2}} = \frac{3+0+0}{4-0+0} = \frac{3}{4}$$

E terminamos.

Exemplo 5: calcule $\lim_{x\to\infty} \frac{\pi x^3+ex+124}{10x^2-94x+1000000}$

Solução

Nessa expressão existm muitos números estranhos, mas não se preocupe, os termos constantes não importam, vamos resolver do mesmo jeito de antes.

O termo de maior expoente é x^3, logo, dividindo por ele:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi x^3+ex+124}{10x^2-94x+1000000} = \lim_{x\to\infty} \frac{\pi+\frac{e}{x^2}+\frac{124}{x^3}}{\frac{10}{x}-\frac{94}{x^2}+\frac{1000000}{x^3}} = \frac{\pi+0+0}{0-0+0} = \frac{\pi}{0} = \infty$$

Sim, estou ciente que dividir por zero é um absurdo. No entanto, como se trata de limite, quero apenas dizer que quando x aumenta, o denominador fica arbitrariamente pequeno em relação ao numerador, o que implica que essa fração diverge para o infinito, ao invés de convergir para um valor específico. Não se esqueça: um limite não é o valor de uma função naquele ponto, mas sim o valor que a função se aproxima quando a variável se aproxima desse ponto.

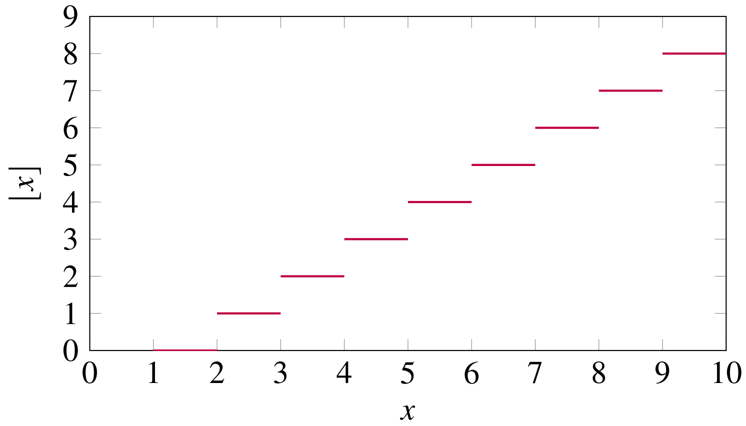
E se você estiver se perguntando "Como você sabe se é infinito positivo ou negativo?", muito bem notado! Sabemos que será positivo pois, embora ambos tendam a zero quando x vai para o infinito, ainda vale que $\frac{10}{x} + \frac{1000000}{x^3} > \frac{94}{x^2}$, assim como o numerador é claramente positivo, logo o resultado será positivo.

Agora que terminamos de ver os métodos básicos de cálculo de limites, temos que avaliar algo crucial para esse tipo de ferramenta: a condição de existência de um limite.

2.2.3 Quando um limite existe?

Primeiro, você pode estar pensando: "Como assim? Os limites não existem sempre? Digo, um limite representa o valor que a função se aproxima quando a variável se aproxima de um valor a, e isso sempre existe, não? A função tem que se aproximar de algum valor."mas não se engane, pois limites nem sempre existem. Eles não existem quando existe uma ambiguidade sobre o valor da função naquele ponto, como no exemplo a seguir:

Exemplo 6: Função piso conseidere o gráfico da função piso abaixo:



Caso você não a conheça, a função piso de x é apenas um jeito formal de dizer "arredondar x para baixo", por exemplo, o piso de 3 é 3, o piso de π é 3 e o piso de -5.5 é -6. O piso de x é denotado por $\lfloor x \rfloor$.

Se eu lhe pedir para calcular $\lim_{x\to 1} \lfloor x \rfloor$, o que você me diria como resposta? Bom, se você for pensar do mesmo jeito que as soluções dos últimos exemplos, tentaria uma substituição direta, obtendo que $\lfloor x \rfloor = \lfloor 1 \rfloor = 1$, que seria a resposta, correto?

Não, não está correto, pois ao olharmos o gráfico da função piso, vemos que na verdade temos duas possibilidades: ou nos aproximamos de $x = 1$ pelo lado esquerdo ou pelo lado direito, e essas duas possibilidades nos dão valores diferentes, já que pelo lado esquerdo, quando nos aproximamos de $x = 1$, a função é sempre 0, logo a resposta seria zero, enquanto quando nos aproximamos pelo lado direito a função vale sempre 1, logo o limite será 1. Isso se torna uma ambiguidade que torna o limite indeterminado, e por isso dizemos que $\lim_{x\to 1} \lfloor x \rfloor$ não existe!

Mas como formalizamos essa ideia? Podemos definir os **limites laterais** de f(x), denotados $\lim_{x\to a^{\pm}} f(x)$, como o limite se aproximando por um "lado"específico do gráfico. Assim, $\lim_{x\to a^+} f(x)$ é o limite quando nos aproximamos pelo lado direito, diminuindo cada vez mais o x até chegar no valor a, e $\lim_{x\to a^-} f(x)$ como sendo o limite ao nos aproximarmos pelo lado oposto. Assim, temos que $\lim_{x\to 1^+} \lfloor x \rfloor = 1$ e $\lim_{x\to 1^-} \lfloor x \rfloor = 0$.

Com isso, podemos dizer que o limite existe se, e somente se, $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x)$

Exemplo 7: determine se $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ existe.

Solução: Vamos primeiro calcular o limite pelo lado dos positivos. Temos que:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{+0} = +\infty$$

enquanto isso, pelo lado dos negativos:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{-0} = -\frac{1}{0} = -\infty$$

Portanto, como $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} \neq \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x}$, podemos dizer que o limite não existe.

Agora, estamos finalmente preparados para definir formalmente quando uma função é contínua!

2.3 Definição formal de uma função contínua

Uma função $f(x)$ é dita **contínua** em um intervalo I quando, para todo valor a no intervalo I, temos que $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

Logo, a função deve satisfazer três condições:

Condição 1: o limite $\lim_{x\to a} f(x)$ deve existir para todo valor a no intervalo I

Condição 2: a função deve ser definida em todo ponto a no intervalo, isto é, $f(a)$ possui valor determinado para todo ponto a no intervalo I

Condição 3: o limite $\lim_{x\to a} f(x)$ deve ser igual ao valor da função naquele ponto, isto é, $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ é válido para todo a no intervalo I.

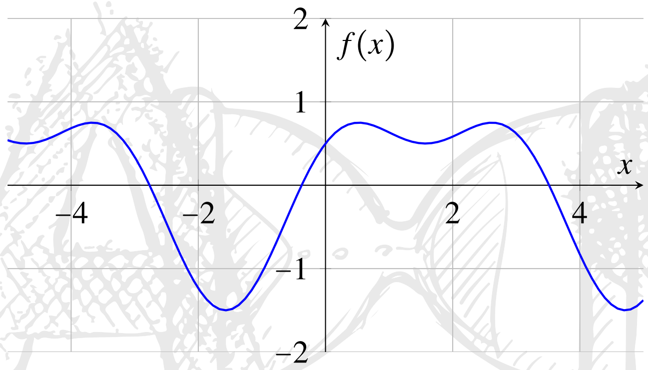
Agora, com nossa pergunta inicial respondida, fechamos essa seção inicial, e podemos passar para a próxima matéria: derivadas!

3 Derivadas

As derivadas são a segunda parte mais conhecida do cálculo, atrás apenas das integrais, e seu uso é muito comum, mas o que as derivadas representam e como são calculadas? Veremos isso a seguir!

3.1 Significado e definição de derivada

Pense em uma função arbitrária $f(x)$, e imagine seu gráfico, como no exemplo abaixo:



Se eu te perguntar qual a variação média da função em um intervalo específico $I = (X, X+\Delta X)$, você saberia calcular, não é mesmo? basta calcular $\Delta f = f(X+\Delta X) - f(X)$ e dividir pelo tamanho do intervalo, logo, sendo V_m a variação média, temos:

$$V_m = \frac{\Delta f}{\Delta X} = \frac{f(X+\Delta X) - f(X)}{\Delta X}$$

Simples, não? Mas e se eu lhe perguntar qual a taxa de variação em um ponto específico, como a "velocidade"da função naquele instante, ou ainda, a reta tangente ao gráfico naquele ponto? Se você já viu alguma aula de cálculo ou possui um raciocínio lógico bem desenvolvido, pode ter chegado à conclusão: "Podemos tirar o limite de V_m quando ΔX vai para zero!"E você estaria absolutamente correto!

Podemos pensar no V_m como sendo uma aproximação grosseira da variação da função em um ponto, pois assume que tal variação é constante no intervalo. Essa aproximação, no entanto, se torna mais e mais certa quanto menor for o intervalo, uma vez que qualquer curva se assemelha a uma reta quando escolhemos um intervalo pequeno o suficiente. No limite do intervalo tendendo a zero, essa aproximação se torna perfeitamente correta! Podemos então definir a derivada de uma função como descrito acima, escrevendo:

$$\frac{df}{dX} = lim_{\Delta X\to 0}(\frac{f(X+\Delta X) - f(X)}{\Delta X})$$

Onde $\frac{df}{dX}$ é a derivada da função em relação à variável X.

O conceito de derivada é muito útil pois, como veremos a seguir, nos dá muitas informações sobre o comportamento de funções, nos ajudando a determinar pontos de máximo, mínimo e diversas outras coisas!

Podemos agora partir dessa definição para obter algumas regras/técnicas de derivação, como farei a seguir

3.2 Técnicas de derivação

3.2.1 Regra da soma

Enunciado:
Sejam $g(X)$ e $h(X)$ funções e $f(X) := g(X) + h(X)$, então $\frac{df}{dX} = \frac{dg}{dX} + \frac{dh}{dX}$
Prova:
Temos:

$$\frac{f(X+\Delta X) - f(X)}{\Delta X} = \frac{(g(X+\Delta X) + h(X+\Delta X)) - (g(X) + h(X))}{\Delta X} = \frac{g(X+\Delta X) - g(X)}{\Delta X} + \frac{h(X+\Delta X) - h(X)}{\Delta X}$$

Assim, a derivada será, pela definição:

$$\frac{df}{dX} = \lim_{\Delta X \to 0} \frac{f(X+\Delta X) - f(X)}{\Delta X} = \lim_{\Delta X \to 0} \frac{g(X+\Delta X) - g(X)}{\Delta X} + \frac{h(X+\Delta X) - h(X)}{\Delta X}$$

Aplicando a propriedade da soma dos limites:

$$\frac{df}{dX} = \lim_{\Delta X \to 0} \frac{g(X+\Delta X) - g(X)}{\Delta X} + \lim_{\Delta X \to 0} \frac{h(X+\Delta X) - h(X)}{\Delta X} = \frac{dg}{dX} + \frac{dh}{dX}$$

E terminamos.

3.2.2 Regra do produto

Enunciado:
Sejam $g(X)$ e $h(X)$ funções e $f(X) := g(X) * h(X)$, então $\frac{df}{dX} = h(x) * \frac{dg}{dX} + g(x) * \frac{dh}{dX}$
Prova: Usamos a definição de derivada:

$$\frac{df}{dX} = \lim_{\Delta X \to 0} \frac{f(X+\Delta X) - f(X)}{\Delta X}.$$

Substituindo $f(X) = h(X)g(X)$:

$$\frac{df}{dX} = \lim_{\Delta X \to 0} \frac{h(X+\Delta X)g(X+\Delta X) - h(X)g(X)}{\Delta X}.$$

Agora, adicionamos e subtraímos o termo $h(X+\Delta X)g(X)$ para facilitar a manipulação:

$$\frac{df}{dX} = \lim_{\Delta X \to 0} \frac{[h(X+\Delta X)g(X+\Delta X) - h(X+\Delta X)g(X)] + [h(X+\Delta X)g(X) - h(X)g(X)]}{\Delta X}.$$

Podemos separar os dois termos:

$$= \lim_{\Delta X \to 0} \left[\frac{h(X+\Delta X)[g(X+\Delta X)-g(X)]}{\Delta X} + \frac{g(X)[h(X+\Delta X)-h(X)]}{\Delta X} \right].$$

Agora, usamos a definição de derivada:

$$\lim_{\Delta X \to 0} \frac{g(X+\Delta X)-g(X)}{\Delta X} = \frac{dg}{dX}, \quad \lim_{\Delta X \to 0} \frac{h(X+\Delta X)-h(X)}{\Delta X} = \frac{dh}{dX}.$$

Portanto,

$$\lim_{\Delta X \to 0} \left[h(X+\Delta X)\frac{dg}{dX} + g(x)\frac{dh}{dX} \right].$$

Como $h(X+\Delta X) \to h(X)$ quando $\Delta X \to 0$, obtemos:

$$\frac{df}{dX} = h(X) * \frac{dg}{dX} + g(x) * \frac{dh}{dX}.$$

E terminamos.

3.2.3 Regra do quociente:

A regra do quociente afirma que, se $h(X)$ e $g(X)$ são funções com derivada definida em um ponto X, e $g(X) \neq 0$, então a derivada do quociente $f(X) = \frac{h(X)}{g(X)}$ é dada por:

$$\frac{d}{dX}\left[\frac{h(X)}{g(X)}\right] = \frac{\frac{dh}{dX} * g(X) - h(X) * \frac{dg}{dX}}{[g(X)]^2}.$$

Prova: Usamos a definição de derivada:

$$\frac{df}{dX} = \lim_{\Delta X \to 0} \frac{f(X+\Delta X)-f(X)}{\Delta X}.$$

Substituindo $f(X) = \frac{h(X)}{g(X)}$:

$$\frac{d}{dX}\left[\frac{h(X)}{g(X)}\right] = \lim_{\Delta X \to 0} \frac{\frac{h(X+\Delta X)}{g(X+\Delta X)} - \frac{h(X)}{g(X)}}{\Delta X}.$$

Colocamos a diferença de frações sob um denominador comum:

$$= \lim_{\Delta X \to 0} \frac{\frac{h(X+\Delta X)g(X)-h(X)g(X+\Delta X)}{g(X+\Delta X)g(X)}}{\Delta X}.$$

Reescrevendo,

$$= \lim_{\Delta X \to 0} \frac{h(X+\Delta X)g(X)-h(X)g(X+\Delta X)}{\Delta X g(X+\Delta X)g(X)}.$$

Agora adicionamos e subtraímos o termo $h(X)g(X)$ no numerador:

$$= \lim_{\Delta X \to 0} \frac{[h(X+\Delta X)g(X)-h(X)g(X)]+[h(X)g(X)-h(X)g(X+\Delta X)]}{\Delta X g(X+\Delta X)g(X)}.$$

Separando em dois limites:

$$= \lim_{\Delta X \to 0}\left[\frac{h(X+\Delta X)g(X)-h(X)g(X)}{\Delta X g(X+\Delta X)g(X)}+\frac{h(X)g(X)-h(X)g(X+\Delta X)}{\Delta X g(X+\Delta X)g(X)}\right].$$

Reescrevendo os termos:

$$= \lim_{\Delta X \to 0}\left[\frac{g(X)}{g(X+\Delta X)*g(X)}*\frac{h(X+\Delta X)-h(X)}{\Delta X}-\frac{h(X)}{g(X+\Delta X)g(X)}\cdot\frac{g(X+\Delta X)-g(X)}{\Delta X}\right].$$

Agora, usamos as definições de derivadas:

$$\lim_{\Delta X \to 0}\frac{h(X+\Delta X)-h(X)}{\Delta X}=\frac{dh}{dX}, \quad \lim_{\Delta X \to 0}\frac{g(X+\Delta X)-g(X)}{\Delta X}=\frac{dg}{dX}.$$

Portanto,

$$= \lim_{\Delta X \to 0}\left[\frac{g(X)*\frac{dh}{dX}}{g(X+\Delta X)*g(X)}-\frac{h(X)*\frac{dg}{dX}}{g(X+\Delta X)*g(X)}\right].$$

Como $g(X+\Delta X)\to g(X)$ quando $\Delta X \to 0$, obtemos:

$$\frac{g(X)*\frac{dh}{dX}-h(X)*\frac{dg}{dX}}{[g(X)]^2}.$$

Como desejado.

3.2.4 Regra da cadeia

A regra da cadeia afirma que, se $h(X)$ e $g(X)$ são funções com derivada definida em um ponto X e a função composta $f(X)=h(g(X))$ é definida, então sua derivada é dada por:

$$\frac{d}{dX}h(g(X))=\frac{dh}{dg}*\frac{dg}{dX}.$$

Prova: Usamos a definição de derivada:

$$\frac{d}{dX}h(g(X))=\lim_{\Delta X \to 0}\frac{h(g(X+\Delta X))-h(g(X))}{\Delta X}.$$

Como $g(X)$ é diferenciável, podemos escrever a variação de $g(X)$ como:

$$\Delta g = g(X+\Delta X)-g(X).$$

Se $g(X)$ for contínua e diferenciável, então quando $\Delta X \to 0$, também temos $\Delta g \to 0$. Substituímos na expressão da derivada:

$$\frac{d}{dX}h(g(X))=\lim_{\Delta X \to 0}\frac{h(g(X+\Delta X))-h(g(X))}{\Delta g}*\frac{\Delta g}{\Delta X}.$$

Agora, observamos que:

$$\lim_{\Delta g \to 0}\frac{h(g(X+\Delta X))-h(g(X))}{\Delta g}=\frac{dh}{dg},$$

e

$$\lim_{\Delta X \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta X} = \frac{dg}{dX}.$$

Portanto,

$$\frac{d}{dX} h(g(X)) = \frac{dh}{dg} * \frac{dg}{dX}.$$

Como desejado.

Tenha em mente que derivar é apenas uma operação, que leva prática para se acostumar, mas ao final do dia basta aplicar suas regras e seguir em frente. Essas regras nos permitem escrever algumas derivadas em função de outras mais simples, como você deve ter percebido. Para efetivamente resolver a derivada maior, devemos ter algumas derivadas simples prontas no bolso. Mostrarei a seguir algumas delas:

3.3 Derivadas de bolso

3.3.1 Derivada de uma constante

Seja C uma constante. Pela definição de derivada:

$$\frac{d}{dX} C = \lim_{\Delta X \to 0} \frac{C - C}{\Delta X} = \lim_{\Delta X \to 0} \frac{0}{\Delta X} = 0.$$

Portanto,

$$\frac{d}{dX} C = 0.$$

3.3.2 Derivada de uma potência de X

Seja $h(X) = X^N$, onde N é uma constante. Usamos a definição de derivada:

$$\frac{d}{dX} X^N = \lim_{\Delta X \to 0} \frac{(X + \Delta X)^N - X^N}{\Delta X}.$$

Expandimos pelo Binômio de Newton:

$$(X + \Delta X)^N = X^N + N X^{N-1} \Delta X + \frac{N(N-1)}{2} X^{N-2} (\Delta X)^2 + \dots.$$

Substituímos na definição:

$$\frac{d}{dX} X^N = \lim_{\Delta X \to 0} \frac{X^N + N X^{N-1} \Delta X + \mathcal{O}((\Delta X)^2) - X^N}{\Delta X}.$$

Cancelamos X^N:

$$= \lim_{\Delta X \to 0} \frac{N X^{N-1} \Delta X + \mathcal{O}((\Delta X)^2)}{\Delta X}.$$

Dividimos por ΔX:

$$= \lim_{\Delta X \to 0} \left(N X^{N-1} + \mathcal{O}(\Delta X) \right).$$

Como $\mathcal{O}(\Delta X) \to 0$ quando $\Delta X \to 0$, obtemos:

$$\frac{d}{dX}X^N = NX^{N-1}.$$

3.3.3 Derivada da função exponencial

Seja $h(X) = e^X$. Pela definição:

$$\frac{d}{dX}e^X = \lim_{\Delta X \to 0} \frac{e^{X+\Delta X} - e^X}{\Delta X}.$$

Fatoramos e^X:

$$= \lim_{\Delta X \to 0} \frac{e^X e^{\Delta X} - e^X}{\Delta X}.$$

Colocamos e^X em evidência:

$$= e^X \lim_{\Delta X \to 0} \frac{e^{\Delta X} - 1}{\Delta X}.$$

Podemos agora efetuar uma troca de variável. Defina $M = e^{\Delta X} - 1$, logo $\Delta X = ln(M+1)$. Note que quando $\Delta X \to 0, M \to 0$, portanto, podemos reescrever o limite:

$$= e^X \lim_{M \to 0} \frac{M}{ln(M+1)} = e^X \lim_{M \to 0} \frac{1}{\frac{1}{M} ln(M+1)}.$$

Usando a propriedade de logaritmos que nos diz que $A * log_B(C) = log_B(C^A)$, obtemos:

$$= e^X \lim_{M \to 0} \frac{1}{ln[(M+1)^{\frac{1}{M}}]} = e^X \frac{1}{ln[\lim_{M \to 0}(1+M)^{\frac{1}{M}}]}$$

Note, porém, que por definição do número de Euler e temos $e = \lim_{U \to \infty}(1 + \frac{1}{U})^U = \lim_{M \to 0}(1 + M)^{\frac{1}{M}}$, onde $M = \frac{1}{U}$. Assim, substituindo:

$$= e^X \frac{1}{ln[\lim_{M \to 0}(1+M)^{\frac{1}{M}}]} = e^X \frac{1}{ln(e)} = e^X \frac{1}{1} = e^X$$

3.3.4 Derivada da função logarítmica

Seja $h(X) = \ln X$. Pela definição:

$$\frac{d}{dX}\ln X = \lim_{\Delta X \to 0} \frac{\ln(X + \Delta X) - \ln X}{\Delta X}.$$

Usamos a propriedade do logaritmo:

$$= \lim_{\Delta X \to 0} \frac{\ln\left(\frac{X+\Delta X}{X}\right)}{\Delta X}.$$

Reescrevemos a fração:

$$= \lim_{\Delta X \to 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{\Delta X}{X}\right)}{\Delta X}.$$

Usando a propriedade $A * log_B(C) = log_B(C^A)$, obtemos:

$$= \lim_{\Delta X \to 0} ln[(1 + \frac{\Delta X}{X})^{\frac{1}{\Delta X}}].$$

Efetuando a substituição de variável $U = \frac{1}{\Delta X}, \Delta X \to 0, U \to \infty$, ficamos com:

$$= ln[\lim_{U \to \infty} (1 + \frac{\frac{1}{X}}{U})^U].$$

No, entanto, sabemos, por definição, que $e^X = \lim_{N\to\infty}(1 + \frac{X}{N})^N$. Logo a expressão se simplifica para:

$$\frac{d}{dX} \ln X = \ln e^{\frac{1}{X}} = \frac{1}{X}$$

3.3.5 Derivada do seno

Seja $h(X) = \sin X$. Pela definição:

$$\frac{d}{dX} \sin X = \lim_{\Delta X \to 0} \frac{\sin(X + \Delta X) - \sin X}{\Delta X}.$$

Usamos a identidade do seno:

$$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B.$$

Aplicamos para $A = X$ e $B = \Delta X$:

$$\sin(X + \Delta X) = \sin X \cos \Delta X + \cos X \sin \Delta X.$$

Substituímos na definição:

$$= \lim_{\Delta X \to 0} \frac{\sin X \cos \Delta X + \cos X \sin \Delta X - \sin X}{\Delta X}.$$

Fatoramos $\sin X$:

$$= \lim_{\Delta X \to 0} \left[\sin X \frac{\cos \Delta X - 1}{\Delta X} + \cos X \frac{\sin \Delta X}{\Delta X} \right].$$

Sabemos que:

$$\lim_{\Delta X \to 0} \frac{\sin \Delta X}{\Delta X} = 1, \quad \lim_{\Delta X \to 0} \frac{\cos \Delta X - 1}{\Delta X} = 0.$$

Portanto,

$$\frac{d}{dX} \sin X = \cos X.$$

3.3.6 Derivada do cosseno

Seja $h(X) = \cos X$. Pela definição:

$$\frac{d}{dX}\cos X = \lim_{\Delta X \to 0} \frac{\cos(X+\Delta X) - \cos X}{\Delta X}.$$

Usamos a identidade do cosseno:

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B.$$

Aplicamos para $A = X$ e $B = \Delta X$:

$$\cos(X+\Delta X) = \cos X \cos \Delta X - \sin X \sin \Delta X.$$

Substituímos na definição:

$$= \lim_{\Delta X \to 0} \frac{\cos X \cos \Delta X - \sin X \sin \Delta X - \cos X}{\Delta X}.$$

Fatoramos $\cos X$:

$$= \lim_{\Delta X \to 0} \left[\cos X \frac{\cos \Delta X - 1}{\Delta X} - \sin X \frac{\sin \Delta X}{\Delta X}\right].$$

Sabemos que:

$$\lim_{\Delta X \to 0} \frac{\sin \Delta X}{\Delta X} = 1, \quad \lim_{\Delta X \to 0} \frac{\cos \Delta X - 1}{\Delta X} = 0.$$

Portanto,

$$\frac{d}{dX}\cos X = -\sin X.$$

Concluímos assim as derivadas de bolso para você levar para sua vida. Qualquer outra derivada pode ser obtida partindo dessas mais simples, exceto quando é introduzida uma nova função. Nesses casos, porém, a definição da derivada surge para lhe salvar! Mostrarei a seguir um exemplo de como utilizar as regras de derivação para calcular a derivada de uma função composta

Exemplo: Dada a função

$$f(X) = \frac{X^3 \sin X}{e^X}$$

Calcule $\frac{df}{dX}$

Solução:

Inicialmente, note que, definindo $g(X) = X^3 \sin X$ e $h(X) = e^X$, temos que $f(X) = \frac{g(X)}{h(X)}$, logo, pela regra do quociente:

$$\frac{df}{dX} = \frac{g(X)\frac{dh}{dX} - h(X)\frac{dg}{dX}}{g^2(X)}$$

Temos, usando nossas derivadas de bolso:

$$\frac{dh}{dX} = \frac{d}{dX}e^X = e^X$$

e, pela regra do produto:

$$\frac{dg}{dX} = \frac{d}{dX}X^3 \sin X = X^3 \frac{d}{dX} \sin X + \sin X \frac{d}{dX} X^3 = X^3 \cos X + 3X^2 \sin X.$$

Substituindo na expressão original:

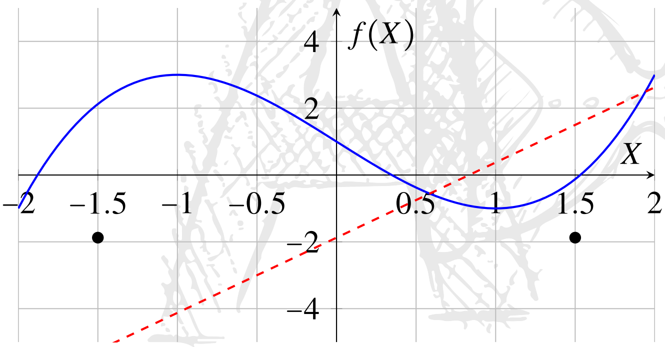
$$\frac{df}{dX} = \frac{X^3 e^X \sin X - e^X (X^3 \cos X + 3X^2 \sin X)}{X^6 \cos X} = \frac{X e^X \sin X - e^X (X \cos X + 3 \sin X)}{X^4 \cos X}$$

Deixando e^X em evidência:

$$= e^X \frac{X \sin X - X \cos X + 3 \sin X}{X^4 \cos X} = e^X \left(\frac{X+3}{X^4} \tan X - \frac{1}{X^3}\right)$$

Com isso, concluímos a seção de cálculo de derivadas! Agora, pare um pouco, feche os olhos... Não! Não feche os olhos, como você vai ler de olhos fechados? Enfim... Tente se lembrar da pergunta inicial que nos fez descobrir o conceito de derivadas... Se lembrou? A pergunta era: como calcular a taxa de variação de uma função em um ponto específico, ou a reta tangente ao gráfico da função naquele ponto. Na subseção a seguir, voltaremos um pouco para essa pergunta, e provaremos alguns fatos sobre o comportamento de uma função, baseando-se apenas em sua derivada.

3.4 Comportamentos de funções com derivadas



Considere uma função arbitrária, como a da figura acima. Ao conectarmos dois pontos quaisquer desse gráfico(reta vermelha tracejada), formamos uma reta. o ângulo θ que essa reta faz com o eixo X pode ser calculado trivialmente pela fórmula: $\theta = \arctan(\frac{\Delta Y}{\Delta X})$, onde ΔY e ΔX são as diferenças na cordenada Y e na coordenada X dos pontos, respectivamente. Ao calcularmos uma derivada, estamos fazendo a mesma conta, porém para dois pontos tão próximos que são essencialmente o mesmo ponto, fazendo com que a reta que os conecta seja a reta tangente ao gráfico naquele ponto específico. Assim, podemos escrever:

$$\frac{df}{dX} = \tan \theta$$

Isso nos traz implicações muito interessantes. Vou enumerar essas observações, deixando a prova como exercício para o leitor.

- Quando a derivada é positiva, a função está crescendo
- Quando a derivada é negativa, a função está decrescendo
- Quando a derivada é nula, a função está constante

Provemos agora, baseando-se nessas observações, o seguinte fato:
Afirmação:
Quando a derivada de uma função é nula, estamos em um dentre 3 casos:
Caso 1:
A função está em um máximo local
Caso 2:
A função está em um mínimo local
Caso 3:
A função está em um ponto de inflexão
Prova:
Temos 5 casos a considerar:

- Caso 1: a derivada é positiva quando diminuímos X e volta a ser positiva quando aumentamos X:

  Isso significa que a função estava crescendo antes de chegar ao ponto X, se torna horizontal no momento que chega em X e volta a crescer quando passa de X, caracterizando um **ponto de inflexão**.

- Caso 2: a derivada é negativa quando diminuímos X e volta a ser negativa quando aumentamos X:

  O mesmo raciocínio feito no caso anterior nos permite inferir que estamos em um **ponto de inflexão** novamente.

- Caso 3: a derivada é positiva quando diminuímos X e se torna negativa quando aumentamos X:

  Isso quer dizer que a função estava crescendo até chegar em X, para de crescer e se torna constante quando chega em X, e começa a diminuir após passar por X, caracterizando um ponto de **Máximo local**.

- Caso 4: a derivada é negativa quando diminuímos X e se torna positiva quando aumentamos X:

  Isso quer dizer que a função estava diminuindo até chegar em X, para de diminuir e se torna constante quando chega em X, e começa a crescer após passar por X, caracterizando um ponto de **Mínimo local**.

- Caso 5: A derivada é nula em ao menos uma das direções(aumentando ou diminuindo X)

  Poderíamos dividir em mais 5 casos e considerar cada um deles, mas claramente ou a função será constante, ou estará em um mínimo local, ou estará em um máximo local, ou em um ponto de inflexão no intervalo, sendo que qualquer ponto em um gráfico de uma função constante é máximo local, mínimo local e ponto de inflexão, pois é igual aos seus pontos adjacentes.

Com isso, verificamos nossa afirmação, e terminamos.
Finalizaremos agora com um teorema bem simples e útil, o Teorema de Rolle
Teorema de Rolle
Seja $f(X)$ uma função que satisfaz as seguintes condições:

- $f(X)$ é contínua em um intervalo $[a,b]$;
- $f(X)$ é diferenciável em (a,b), isto é, sua derivada existe em todos os pontos desse intervalo;

- $f(a) = f(b)$.

Então, existe pelo menos um ponto $c \in (a,b)$ tal que:

$$\left.\frac{df}{dX}\right|_{X=c} = 0.$$

OBS: o símbolo $\Big|_{X=c}$ significa "aplicado em", logo, $\left.\frac{df}{dX}\right|_{X=c}$ quer dizer "a derivada da função, aplicada no ponto X = c".

Prova:

Suponha, por absurdo, que o teorema está incorreto, ou seja, não há um ponto cuja derivada é zero no intervalo. Note que a derivada possuirá sinal constante, pois caso contrário em algum momento sua derivada seria zero, pela continuidade da função e de sua derivada. Logo, temos dois casos a considerar:

- Caso 1: A derivada é sempre positiva no intervalo.

  Nesse caso, a função está sempre crescendo no intervalo, o que implica que $f(b) > f(a)$, contrariando nossa hipótese inicial, um absurdo!

- Caso 2: A derivada é sempre negativa no intervalo.

  Nesse caso, a função esté sempre decrescendo no intervalo, e portanto temos que $f(b) < f(a)$, novamente contrariando nossa hipótese inicial, novamente um absurdo!

Dessa forma, chegamos em um absurdo em ambos os casos, provando o teorema, e encerrando essa subseção.

4 O fim do começo(ou o começo do fim?)

Para finalizar esse material, agora que lhe expliquei limites e derivadas e algumas de suas aplicações, quero fechar esse ciclo ensinando um último truque, truque esse que vai trivializar (quase)qualquer questão de limites que você encontrar. Esse truque se chama "Regra de L'Hôpital"

4.1 Regra de L'Hôpital

Enunciado:

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções deriváveis em um intervalo I contendo um ponto a (exceto possivelmente em a próprio). Suponha que:

1. $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ ou $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$ (caso de indeterminação).
2. $g'(x) \neq 0$ em um intervalo adequado.
3. O limite $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe (ou tende a $\pm\infty$).

Então, temos:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

O mesmo vale para $x \to \pm\infty$.

4.2 Prova da regra de L'Hôpital

Para provar essa regra, precisamos antes provar outro teorema, o Teorema do Valor Médio de Cauchy(TVMC):

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções contínuas em um intervalo fechado $[a,b]$ e diferenciáveis(deriváveis) no intervalo aberto (a,b), com $\frac{dg}{dx} \neq 0$ em (a,b). Então, existe um ponto $c \in (a,b)$ tal que:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=c}}{\left.\frac{dg}{dx}\right|_{x=c}}.$$

4.3 Prova do TVMC

Passo 1: Definir uma função auxiliar Definimos a função:

$$H(x) = f(x) - \lambda g(x),$$

onde λ é uma constante a ser determinada.

Passo 2: Aplicar o Teorema de Rolle Queremos que $H(x)$ satisfaça as hipóteses do Teorema de Rolle. Para isso, escolhemos λ de modo que:

$$H(a) = H(b).$$

Ou seja:

$$f(a) - \lambda g(a) = f(b) - \lambda g(b).$$

Resolvendo para λ:

$$\lambda = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

Agora, temos $H(a) = H(b)$, então pelo Teorema de Rolle, existe um $c \in (a,b)$ tal que:

$$\left.\frac{dH}{dx}\right|_{x=c} = 0.$$

Derivando $H(x)$:

$$\frac{dH}{dx} = \frac{df}{dx} - \lambda \frac{dg}{dx}.$$

Logo, $\left.\frac{dH}{dx}\right|_{x=c} = 0$ implica:

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=c} - \lambda \left.\frac{dg}{dx}\right|_{x=c} = 0.$$

Substituindo λ:

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=c} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \left.\frac{dg}{dx}\right|_{x=c}.$$

Rearranjando:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=c}}{\left.\frac{dg}{dx}\right|_{x=c}}.$$

Isso prova o Teorema do Valor Médio de Cauchy.

Agora, podemos provar a regra de L'Hôpital!

Passo 1: Definir a razão entre as funções Queremos avaliar:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}.$$

Se $f(a) = g(a) = 0$, podemos reescrever:

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}.$$

Aplicamos o Teorema do Valor Médio de Cauchy a $f(x)$ e $g(x)$, garantindo que existe um $c \in (a,x)$ tal que:

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=c}}{\left.\frac{dg}{dx}\right|_{x=c}}.$$

Fazendo $x \to a$, então $c \to a$, e se o limite $\lim_{c\to a}\frac{\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=c}}{\left.\frac{dg}{dx}\right|_{x=c}}$ existe, temos:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c\to a}\frac{\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=c}}{\left.\frac{dg}{dx}\right|_{x=c}}.$$

Se $f(X), g(X) \to \pm\infty$ basta realizar uma mudança de variáveis, voltando para o caso $\frac{0}{0}$ e repetir o argumento acima.

Isso prova a Lei de L'Hôpital!

Com isso, encerro este material, que usou limites para criar as derivadas, e as derivadas para ajudar a resolver os limites. Espero que tenha gostado, e até mais!