Lemas de Incentro/Ex-incentro

João Victor Silva dos Santos

1 Introdução

1.1 Incentro e Ex-incentro

Questões com muitas bissetrizes, ponto médio de arcos e circunferências tangentes aos lados geralmente vai envolver eles: o *Incentro* e os *Ex-incentros*. Esse material é muito um material de configuração, iremos resolver problemas clássicos que de algum modo vai envolver alguns desses pontos, iremos ver configurações grandes e complexas e também mexer com projetiva em algumas partes. Espero que gostem, aproveitem e se divirtam com esse material!!

2 Propriedades básicas

A parte de propriedades básicas provavelmente vai ser a parte com mais informações, depois disso, veremos algumas configurações mais especificas e questões de treinamento, é bom que você tente as questões de olimpíadas, que apesar de dificeis, você tente e entenda todos os passos.

2.1 Bissetriz só existe uma! (ou duas)

Já ouviu falar que "mãe só existe uma"? Com as bissetrizes, isso é falso, dado um ângulo, existe duas bissetrizes: a interna e a externa. Vamos usar elas duas para definir as coisas e provar tudo que temos que provar inicialmente. Primeiro vamos definir e provar a existência do incentro e dos ex-incentros. O incentro é o encontro das três bissetrizes internas de um triângulo, já o ex-incentro é o encontro da bissetriz interna de um vértice e bissetriz externa dos restantes, então esse ponto é chamado o ex-incentro desse vértice (por exemplo, se você pegar a bissetriz interna de $\hat{A}$ e a externa de $\hat{B}$ e $\hat{C}$, então esse ponto de encontro vai ser o ex-incentro de A). Perceba que nem sempre três retas concorrem, então vamos mostrar que essas concorrem.

Inicialmente, vamos provar a existência do incentro: em um triângulo, um ponto está na bissetriz se e somente se a distância dele para os lados são iguais (ou seja, ao traçar a perpendicular do ponto até os lados, o tamanho desses segmentos são iguais), você pode provar isso usando congruência de triângulo com o caso ângulo, lado, ângulo (ALA) supondo que o ponto esteja na bissetriz e o caso cateto-hipotenusa supondo que a distância para as retas seja igual.

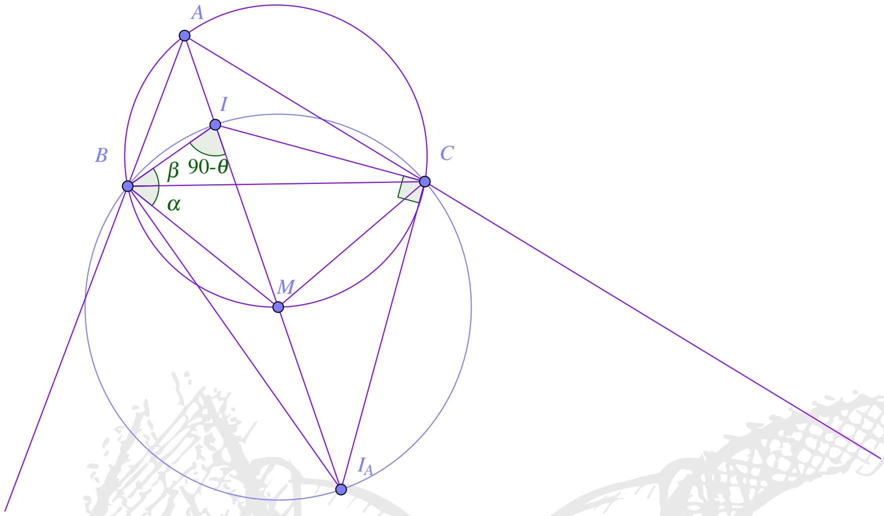
Então, se I for o encontro da bissetriz de $\hat{A}$ e $\hat{B}$, então a distância de I até AC é igual a distância dele até AB e a distância até AB é a mesma até BC, logo a distância dele até BC e AC é a mesma, então está na bissetriz de $\hat{C}$ também. Isso também mostra a existência da circunferência inscrita, ou seja, a circunferência tangente aos três lados do triângulo. Agora considere o seguinte lema onde vamos definir os ex-incentros de um modo diferente e depois provar que eles estão na bissetriz externa:

Teorema do Incentro/Ex-incentro. Seja I o encontro das bissetrizes internas de um triângulo $\triangle ABC$, esse ponto é chamado de **incentro** do triângulo. Seja M a interseção de AI com (ABC), com $M \neq A$. Seja I_A a reflexão de I por M, esse ponto é o **ex-incentro de** A. Então

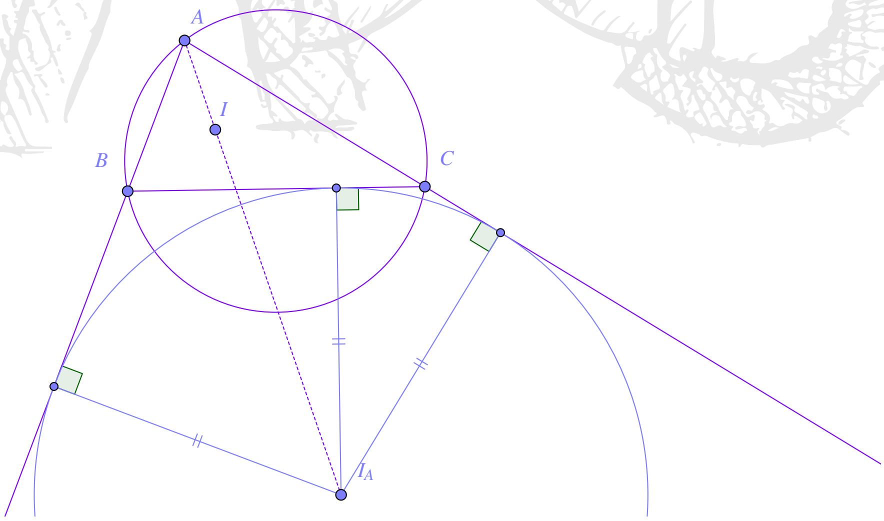
- Os pontos I, B, C e I_A estão em um mesmo circulo de diametro II_A e centro M.
- As retas BI_A e CI_A são bissetrizes externas do $\triangle ABC$.

Prova. Vamos provar $MI = MB$, isso prova a primeira parte pois, analogamente, $MC = MI$, e $MI = MI_A$. Note que se $\hat{A} = 2\alpha$, $\hat{B} = 2\beta$ e $\hat{C} = 2\theta$, com $\alpha+\beta+\theta = 90$, então $\angle MBI = \alpha+\beta = 90-\theta$ pois $\angle MBC = \angle MAC = \alpha$ e como $\angle BMI = \angle BMA = \angle BCA = 2\theta$, assim $\angle MIB = 180-(90-\theta)-(2\theta) = 90-\theta = \angle MBI$, logo $MB = MI$ e a primeira parte tá feita.

Agora, como II_A é diametro, $\angle I_ABI = 90$ e $\angle I_ABC = 90-\beta$, pois $\angle IBC = \beta$, logo BI_A é bissetriz externa pois $\angle I_ABC$ é metade do ângulo externo de $\hat{B}$ e analogamente para CI_A. ■



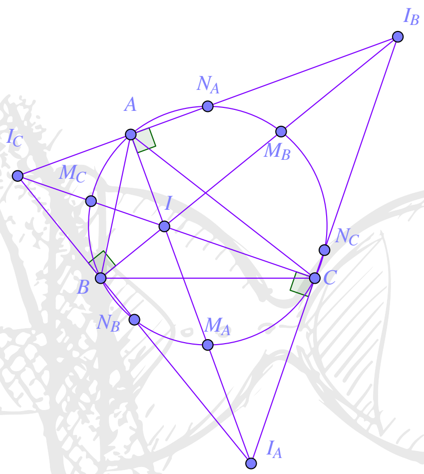
Um funfact sobre o ex-incentro é que, como ele está na bissetriz externa de B e de C, a distância dele até AB é igual a distância dele até BC, que por sua vez é igual a distância dele até AC, logo existe um circulo com centro em I_A que tangência AB e CA externamente e BC internamente (internamente e externamente eu digo dentro e fora do segmento, respectivamente), esse circulo é chamado de **ex-incirculo de** A. Você define os ex-incentros e ex-incirculos de B e C de forma analoga.



Perceba que o último lema também provamos que a bissetriz interna corta o arco $\widehat{BC}$, que não contém A, no ponto médio, ou seja, no ponto M tal que $MB = MC$. Porém, conseguimos provar que a bissetriz externa de A corta o arco $\widehat{BC}$, que contém A, no ponto médio também. Para isso, basta ver que como a bissetriz interna e a externa são perpendiculares, então a bissetriz externa toca a circunferência em um ponto N tal que $\angle NAM = 90$, sendo M o encontro da bissetriz interna com a circunferência. Logo M, N e o centro da circunferência são colineares, mas o centro está na mediatriz de BC e vimos que M está na mediatriz de BC, deste modo, N está na mediatriz de BC e está no ponto médio do arco.

Agora perceba algo engraçado, note que se I_A, I_B e I_C são os ex-incentros de A, B e C, respectivamente, então I_BI_C passa por A, pois ambos estão na bissetriz externa de A, de modo analogo, I_AI_C passa por B e I_AI_B passa por C e além disso, $AI_A \perp I_BI_C$, pois a bissetriz interna é perpendicular a externa, então, analogamente, $BI_B \perp I_AI_C$ e $CI_C \perp I_AI_B$, ou seja, saímos de uma configuração de incentro para uma configuração de ortocentro!!! Onde I é o ortocentro de $\triangle I_AI_BI_C$ e o triângulo $\triangle I_AI_BI_C$ é chamado de **triângulo excentral** do triângulo $\triangle ABC$.

Agora note que a circunferência (ABC) virou o circulo de nove-pontos do $\triangle I_AI_BI_C$, ou seja, já sabiamos que o ponto médio de II_A, II_B e II_C estavam na circunferência ABC (acabamos de ver isso no último teorema) e, além disso, os pontos médios dos arcos que contém os três pontos são os pontos médio dos lados, ou seja, N_A, N_B e N_C são os pontos médio de I_BI_C, I_AI_C e I_AI_B, respectivamente. Ou seja, além de $N_AB = N_AC$, temos $N_AB = N_AC = N_AI_B = N_AI_C$, pois se N'_A for o ponto médio de I_BI_C, então $N'_AB = N'_AC = N'_AI_B = N'_AI_C$ por ser o ponto médio das hipotenusas de $\triangle I_BI_CB$ e $\triangle I_BI_CC$, porém, existe apenas um ponto X em I_BI_C tal que $XB = XC$, que é o N_A, assim $N_A = N'_A$.

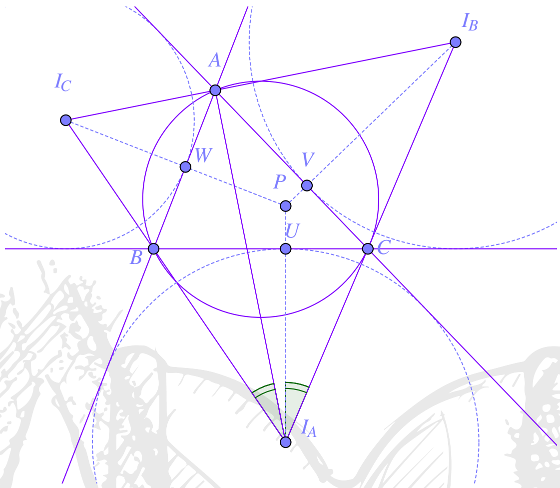


Ou seja, acabamos de provar que essa circunferência, a (ABC), é o circulo de nove-pontos do $\triangle I_AI_BI_C$, pois temos o ponto médio dos lados, os pés das alturas e o ponto médio dos vértices até o ortocentro I (perceba que no total, há de fato nove pontos, três de cada categoria). Para quem conhece a circunferência de nove-pontos, sabe que o centro do nove-pontos de um triângulo é o ponto médio entre seu circuncentro e seu ortocentro, ou seja, sendo O o circuncentro de $\triangle ABC$ e consequentemente o centro do nove-pontos, o circuncentro de $\triangle I_AI_BI_C$ vai ser o reflexo de I por O, também conhecido como o **ponto de Bevan** (Bevan point) do triângulo ABC. Assim, se alguma questão pegar o reflexo de I por O, vale a pena usar os ex-incentros. Frequentemente, quando a reta OI aparece, é muito útil também usar homotetias, como veremos no exemplo 4.

Durante todo esse material, frequentemente olharemos para as questões no modo configuração de ortocentro, então é bom que fique claro tudo que foi apresentado aqui e o do porque isso é verdade. Agora, para finalizar essa configuração introdutória, iremos ver um lema sobre o bevan point, porém, como questão da olimpíada brasileira de matemática de 2020.

Exemplo 1. (OBM 2020 Nível 3 Problema 4) Seja ABC um triângulo. Os círculos ex-inscritos (que tangenciam um lado e os prolongamentos de outros dois lados) tocam os lados BC, CA e AB nos pontos U, V e W, respectivamente. Sejam r_u a reta que passa por U e é perpendicular a BC, r_v a reta que passa por V e é perpendicular a CA e r_w a reta que passa por W e é perpendicular a AB. Prove que as retas r_u, r_v e r_w passam por um mesmo ponto.

Solução. Inicialmente, note que r_u é literalmente a reta que passa pelo A ex-incentro e U, pois $I_AU \perp BC$ pois é o ponto de tangência. Ou seja, podemos tirar os incírculos e trabalhar totalmente com informações que sabemos trabalhar mais, que é concorrência de alturas.



Agora olhe para a questão como configuração de ortocentro, que nem falei anteriormente, onde a questão fica exatamente do seguinte jeito: seja $I_AI_BI_C$ um triângulo e A, B e C os pés das alturas de I_A, I_B e I_C, respectivamente. Prove que as perpendiculares de I_A à BC, I_B à AC e I_C à AB concorrem. (Spoiler, essas retas irão concorrer no centro de $I_AI_BI_C$, mais conhecido como o bevan point do triângulo ABC).

Sabemos que I_CBCI_B é cíclico (configuração de ortocentro), pois $\angle I_CCI_B = 90 = \angle I_CBI_B$, logo $\angle I_ACB = \angle I_AI_CI_B$. Porém, como $\angle I_AUC = 90 = \angle I_AAI_C$, então $\angle UI_AC = \angle AI_AI_C$, ou seja, I_AU é isogonal da altura I_AA do triângulo $I_AI_BI_C$ (lembre-se que a isogonal de uma reta que passa por um vértice de um triângulo é a reflexão da mesma pela bissetriz interna do triângulo). Analogamente I_BV é isogonal da altura I_BB e I_CW é isogonal da altura I_CC, deste modo, é conhecido que a isogonal da altura é a reta que passa pelo vértice e o ortocentro do triângulo e o conjugado isogonal do ortocentro, é o circuncentro. Assim, as retas r_u, r_v e r_w concorrem no circuncentro de $I_AI_BI_C$. ■

Um outro jeito de ter acabado essa questão também é ter tomado P para ser a interseção de I_AU e I_BV e visto que, como I_ABAI_B é cíclico, PI_A e PI_B são isogonais de alturas do triângulo $I_AI_BI_C$, então $\angle PI_AI_B = \angle AI_AB = \angle AI_BB = \angle PI_BI_A$, logo $PI_A = PI_B$ e como $\angle I_API_B = 180 - \angle PI_AI_B - \angle PI_BI_A = 180 - 2\angle PI_AI_B = 180 - 2\angle AI_AI_C = 180 - 2(90 - \angle I_BI_CI_A) = 2\hat{I_C}$, assim, se O é o centro de $I_AI_BI_C$, então I_APOI_B é cíclico com P e O no mesmo semiplano em relação a I_AI_B (isso pois $\angle I_API_B = 2\hat{I_C} = \angle I_AOI_B$ e eu me refiro o mesmo semiplano como o mesmo "lado" em relação a reta I_AI_B), e P e O na mediatriz de I_AI_B, assim, $P = O$ por ponto fantasma. Assim r_u e r_v passam pelo centro de $I_AI_BI_C$ assim como qualquer duas retas entre r_u, r_v e r_w. Assim, todas elas passam pelo centro de $I_AI_BI_C$, que é o bevan point do triângulo ABC (também conhecido como a reflexão do incentro de ABC pelo circuncentro do mesmo).

Existe uma outra solução um pouco divergente deste material usando Teorema de Carnot, não vou apresentar, mas caso haja curiosidade vale a pena pesquisar. É uma solução usando conta com segmento muito bacana.

Agora que já fomos brevemente apresentados aos pontos de contato dos ex-incirculos, vamos ficar um pouco mais intimos desses pontos de contatos, conhecer mais eles e suas propriedades.

2.2 Incirculo e ex-incirculo

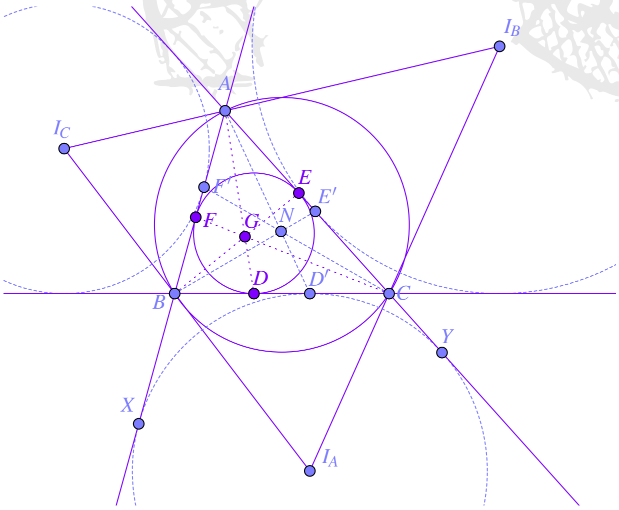
Não é possível falar dos incentros e ex-incentro sem falar de suas circunferências, não é mesmo? Iremos ver muita coisa e lemas nessa subseção, e apresentar ele: o triângulo de contato.

Seja D, E e F os pontos de contato do incírculo com BC, AC e AB, respectivamente, então o triângulo $\triangle DEF$ é chamado de **triângulo de contato** do $\triangle ABC$. Defina também D', E' e F' o contato dos ex-incirculos de A, B e C com BC, AC e AB, respectivamente (os nossos U, V e W da última questão). Existe três coisas legais que eu gostaria de falar inicialmente para vocês sobre esses pontos:

Lema. Seja D, E e F o contato do incírculo e D', E' e F' o contato dos ex-incírculos, então:

- AD, BE e CF concorrem no **ponto de Gergonne**;
- AD', BE' e CF' concorrem no **ponto de Nagel**;
- $BD = CD'$, $BD' = CD$, $AE = CE'$, $AE' = CE$, $AF = BF'$ e $AF' = BF$.

Prova. Vamos primeiro provar a última observação pois ela ira provar as duas primeira praticamente imediatamente.



A ideia dessa prova é usar um teorema muito importante: o **Teorema do Bico**, Sabemos que $AE = AF = a$, $BD = BF = b$ e $CE = CD = c$ pelo teorema do bico, assim o perímetro do triângulo vai ser $AF + BF + BD + CD + CE + AE = 2(a+b+c)$. Porém, note que BD' é igual a outra distância de B até o ponto de contato do A ex-incírculo com AB, ou seja, seja X e Y o contato do A ex-incírculo com AB e AC respectivamente, então $BD' = BX$ e $CD' = CY$, logo o perímetro do triângulo que era $AB + BD' + CD' + Ac = AB + BX + CX + AC = AX + AY$, porém, pelo teorema do bico, $AX = AY$, assim o perímetro fica $2AX = 2(a+b+c) \Rightarrow AX = a+b+c = AB + BX = AB + BD'$. Porém, como

$AB = AF + BF = a + b$, então $BD' = c = CD$ e consequentemente $BD = CD'$. Deste modo, fazendo o raciocínio analogo, temos as relações observadas em terceiro.

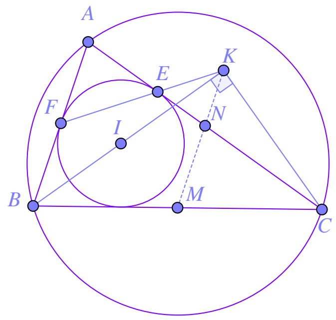
Agora para as duas primeiras, elas ficam de imediato se usarmos outro teorema conhecido, o **Teorema de Ceva**. Por ceva, temos que AD, BE e CF concorrem se e somente se, $\frac{DB}{DC} \cdot \frac{EC}{EA} \cdot \frac{FA}{FB} = 1$, mas sabemos que $AE = AF = a$, $BD = BF = b$ e $CE = CD = c$, então temos que isso é verdade e de fato concorrem. E a segunda observação é a mesma coisa, a diferença é que agora sabemos que $BF' = CE' = a$, $CD' = AF' = b$ e $BD' = AE' = c$, logo temos que $\frac{D'B}{D'C} \cdot \frac{E'C}{E'A} \cdot \frac{F'A}{F'B} = 1$, desde modo, AD', BE' e CF' concorrem. ■

Algo interessante sobre isso, é que podemos obter mais concorrências que não são tão comumente usadas, por exemplo, temos que, assim como os pontos de contato do incirculo e seus respectivos vértices concorrem, isso acontece para os ex-incirculos, por exemplo, temos que AD', BY e CX concorrem, os mesmos X e Y usados na prova da última observação, pois por ceva, temos que $\frac{D'B}{D'C} \cdot \frac{YC}{YA} \cdot \frac{XA}{XB}$, e sabemos que $D'B = XB = c$, $D'C = YC = b$ e $YA = XA = a + b + c$, assim, temos que o produto de frações é 1 e AD', BY e CX concorrem.

Raramente algo vai ser muito particular do incentro, se algo vale para o incentro, então provavelmente vai valer ou vai ter uma versão para os ex-incentros e ex-incírculos também. Esse tipo de concorrência mostrada anteriormente vai ser muito útil para quando a gente for mexer com projetiva, já que, para quem sabe projetiva, sabe que quando você tem uma concorrência assim de cevianas, fica legal de construir quadruplas harmônicas, mas mesmo sem usar projetiva, já é um resultado muito legal. Iremos agora ver um lema não muito usual e bem específico de incentro, porém, que usa uma solução muito básica e seu uso facilita muito alguns problemas.

Lema da Camisa / Lema do Iran. (Não me pergunte do porque no Brasil é conhecido como lema da camisa) O incírculo, de centro I, de um triângulo $\triangle ABC$ é tangente a BC, CA e AB em D, E e F, respectivamente. Seja M e N os pontos médios de BC e AC, respectivamente. A reta BI toca EF em K. Então $BK \perp CK$ e K está em MN.

Prova.



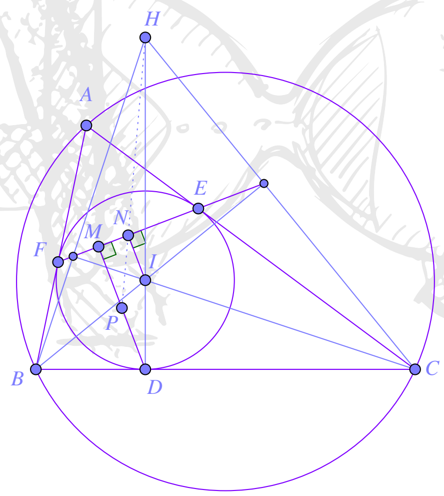
Note que se $\hat{A} = 2\alpha$, $\hat{B} = 2\beta$, então $\hat{C} = 180 - 2\alpha - 2\beta$. Como $AE = AF$ pelo teorema do bico e $\angle EAF = 2\alpha$, então $\angle AEF = \angle AFE = 90 - \alpha$ e $\angle BFK = 90 + \alpha$. Como $\angle FBK = \beta$, então $\angle BKF = \angle IKE = 180 - (90 + \alpha + \beta) = 90 - \alpha - \beta = \angle ICE$, assim $EKCI$ é cíclico e como $\angle CEI = 90$, então $\angle CKI = \angle CKB = 90$. Agora note que $MB = MC = MK$ e $\angle MKB = \angle MBK = \angle KBA = \beta$, logo $MK \parallel AB$, assim K está na base média de AB. ■

Essa prova está correta para a figura usada, porém tem casos que BI corta o segmento EF, e não seu prolongamento, dai a diferença é que $\angle BKF = 180 - \angle IKE$ ao inves de $\angle BKF = \angle IKE$ (mas então teremos que a soma dos ângulos opostos é 180 e da certo por ângulo direcionado). Aproveitando o momento para mostrar o problema que deu o nome a esse lema e outro problema que usa esse mesmo lema.

Exemplo 2. (Iran TST 2009 Dia 3 Problema 3) Em um triângulo ABC, D, E e F são os pontos de tangência do incirculo de centro I com BC, CA e AB, respectivamente. Seja M o pé da perpendicular de D até EF. P está em DM tal que $DP = MP$. Se H é o ortocentro de BIC, prove que PH bissecta EF.

Solução. Gostaria de fazer uma pequena observação que a minha solução e as mais comuns que eu encontrei para esse problema, usam projetiva, então caso você não seja familiarizado com projetiva, aconselho pular para o próximo exemplo. O lema da camisa vai basicamente ajudar a gente a construir a figura, depois disso, vai ser usar projetiva uma vez e acabou :)

Inicialmente, pelo teorema da camisa, sabemos que o pé da altura de C até IB (que seria o nosso K quando mostramos o lema) e o pé da altura de C até IB estão na reta EF, e essa condição vai ser suficiente. Assim, a figura fica algo parecido com isso aqui:



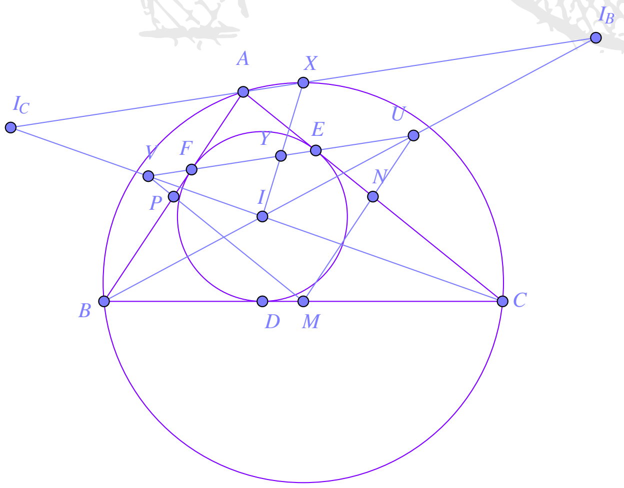
Perceba que o lema da camisa foi usado para ver que BH, CI e EF concorrem, assim como CH, BI e EF (não foi nem usado a condição desse ponto de concorrência estar na base média, para tu ver como o lema da camisa é muito mais forte). Perceba também que H, I e D são colineares pois $ID \perp BC$. Agora vamos para a parte projetiva, para quem já sabe, quando você tem um ponto médio um pouco aleatório, que é o P como ponto médio de DM, então faz sentido projetar por um ponto em que queremos a paralela, e como queremos que passe por N, o ponto médio de EF, então vamos projetar por N ou H, porém a paralela a DM por H é feia, assim vamos projetar por N, pois pelo menos essa paralela passa por I, pois $IN \perp EF$ porque I é o centro de $\triangle DEF$.

Projetando por I e sendo $P_{\infty DM}$ o ponto do infinito da reta DM, temos que $-1 = (M, D; P, P_{\infty DM}) \overset{N}{=} (NM, ND; NP, NI) \overset{HD}{=} (NM \cap HD, D; NP \cap HD, I)$, assim para P, N e H serem colineares, basta $(NM \cap HD, D; H, I) = -1$, o que é verdade por configuração de ortocentro e fatos conhecidos de projetiva nessa configuração, mas para ver isso, você pode projetar por um dos pés das alturas de B ou C ao triângulo BIC, pois seja K e L eles, respectivamente, então ao projetar por K na reta BC temos que ter $(NM \cap HD, D; H, I) = (KL \cap BC, D; C, B)$, que é conhecido que é harmônico pela construção da quadrupla harmônica (dois vértices de um lado, um pé da altura e a interseção dos outros dois pés com o lado). ■

Existe também uma prova muito interessante para esse problema usando um lema que provaremos posteriormente na seção de lemas projetivos. Basicamente você se lembra quando pegamos uma configuração de incentro e transformamos em uma configuração de ortocentro? Então, podemos fazer a mesma coisa, só que agora ao contrário. Temos que seja K e L os pontos em EF tal que K é o pé da altura de B em CI e L o pé da altura de C em BI. Sabemos que assim como H é ortocentro de BIC, temos que I é ortocentro de BHC e os pés das alturas são K, L e D, então I é o incentro dos pés das alturas e B, C e H são os ex-incentros de K, L e D, respectivamente (aqui transformamos a configuração de ortocentro do triângulo BHC na de incentro do triângulo DKL). Por fim, pelo nosso lema que iremos provar na parte de projetiva, sabemos que o ponto médio da altura de D, o ponto de contato do incirculo com KL e o D ex-incentro do $\triangle DKL$ são colineares, que isso é respectivamente P, N e H.

Exemplo 3. (USAJMO 2014 Problema 6) Seja ABC um triângulo com incentro I, incirculo ω e circuncirculo Γ. Seja M, N, P os pontos médios dos lados BC, CA, AB e seja E, F os pontos de tangencia de ω com CA e AB, respectivamente. Seja U, V as interseções das retas EF com MN e MP, respectivamente, e seja X o ponto médio do arco BAC de Γ.
(a) Prove que I está em CV.
(b) Prove que a reta XI bisecta UV.

Solução. Perceba que o item (a) é **literalmente** o lema da camisa, então o item (a) sai de imediato e temos que CI, EF e MP concorrem em V, assim como BI, EF e MN concorrem em U. Aqui uma observação interessante, pode ser que como o item sai de imediato por algum lema, tem competições que aceitam a solução usando apenas o lema porém tem algumas que não aceita sem a prova do lema, então por via das dúvidas, sempre escreva a solução do lema que mata o problema.



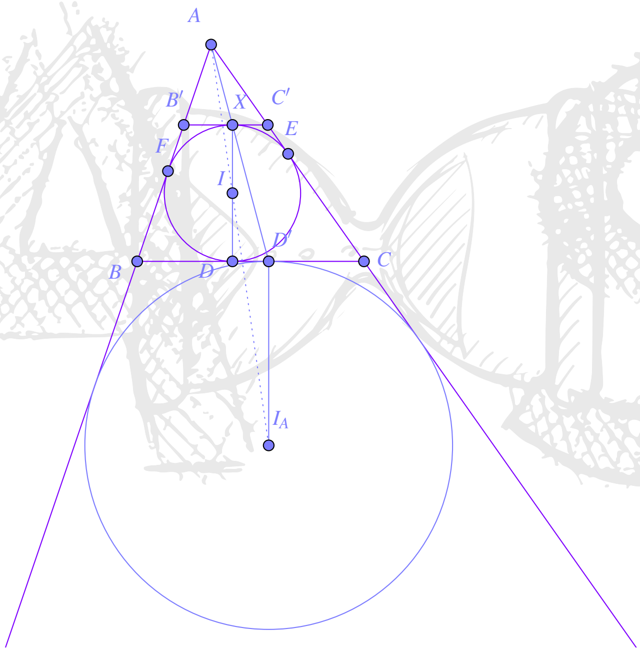
Agora para o item (b) acredito que a solução que pareça que vai funcionar é usando projetiva, já que você sabe projetar por I a quadrupla $(U, V; Y, P_{\infty EF})$, sendo Y a interseção entre UV e IX, e sabemos projetar muito bem isso, porém, aqui nessa solução iremos fazer sem projetiva, apesar da minha intuição vir da mesma. Note que pelo item anterior (ou pelo lema da camisa), temos que C, I e V são colineares, mas CI passa pelo C ex-incentro e de modo analogo, B, I, U e I_B são colineares, com I_B sendo o B ex-incentro.

Por fim, sabemos que I_BI_C passa por A e por X e além disso, $EF \parallel I_BI_C$, pois $IA \perp I_BI_C$ (pois elas são a bissetriz interna e externa), porém $IA \perp EF$, pois $IE = IF$ e $AE = AF$ por bico, logo AI é mediatriz de EF, ou seja, por teorema de tales e semelhança (ou homotetia para os mais queridos), temos $\frac{XI_B}{XI_C} = \frac{YU}{YV}$, porém $XI_B = XI_C$ pela configuração que vimos no começo do material (se lembra lá no começo que provamos que $N_AI_B = N_AI_c = N_AB = N_AC$? Então, temos que $X = N_A$ aqui, que era o ponto médio do arco BAC). Assim temos $YU = YV$ e IX bissecta UV. $\blacksquare$

Esses paralelismos são legais e vão ser úteis no próximo exemplo, então fique ligado para quando for trabalhar com homotetias em configuração de incentro. Agora iremos continuar com dois leminhas bem famosos quando o assunto é lemas de incentro/ex-incentro:

Lema. (Incentro's Version) Seja ABC um triângulo e DEF seu triângulo de contato. Seja X a antípoda de D no incirculo, então AX passa por D', o ponto de contato do ex-incirculo de A com BC.

Prova.



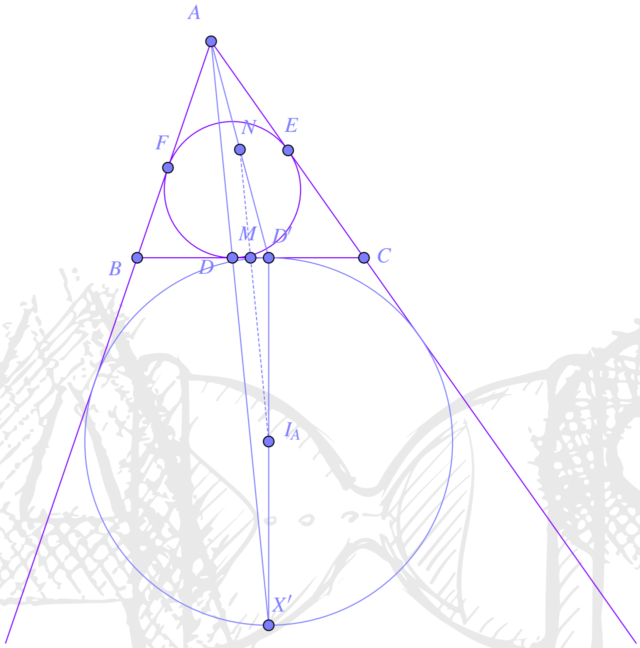
Tome B' e C' as interseções da tangente por X ao incírculo com AB e AC, respectivamente, então temos que $B'C' \parallel BC$ pois $\angle B'XD = 90 = \angle XDC$. Assim, existe uma homotetia de centro A que leva $B'C'$ em BC (para quem nunca ouviu falar de homotetia, pode imaginar como você mover o segmento $B'C'$ linearmente nas retas AB e AC até ficar do tamanho do BC), e deste modo o incírculo vira uma circunferência tangente ao segmento BC e o prolongamento de AB e AC, ou seja, vira o A ex-incírculo e X vira D' na homotetia, ou seja, A, X e D' são colineares. $\blacksquare$

Você se lembra quando eu disse que é raro um lema valer apenas para o incentro? Bem, esse lema aqui também tem uma versão, não muito conhecida, para ex-incírculo. O enunciado é bem analogo, você tem **um triângulo** ABC **e** D' **o contato do** A **ex-incírculo com** BC**. Seja** X' **a antípoda de** D' **no ex-incírculo, então** AX' **passa por** D**, o ponto de contato do incírculo com** BC. Alguns lemas aqui vão ter uma versão para incentro e outra para ex-incentro, só vou provar uma delas e colocar o enunciado da outra, porém, fica a cargo do leitor demonstrar a outra.

Um resultado muito bacana desse último lema é que, **se M for o ponto médio de BC, então M, I e o ponto médio de AD são colineares, sendo D o contato do incírculo com BC**. Porém, vou provar o lema para ex-incentro, e fica a cargo do leitor mostrar para o incentro.

Lema. (Ex-incentro's Version) Seja M o ponto médio do lado BC de um $\triangle ABC$, se I_A for o A ex-incentro e D' o ponto de contato do A ex-incírculo com BC, então M, I_A e o ponto médio de AD' são colineares.

Prova.

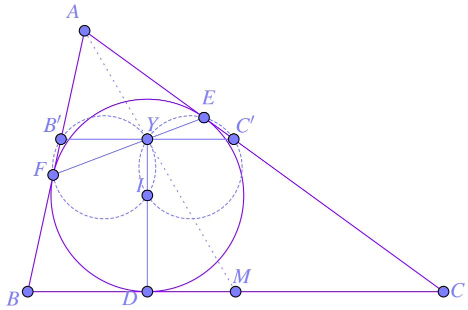


Seja X' a antípoda de D' no A ex-incírculo, pelo lema anterior na ex-incentro's version, se D é o contato do incírculo com BC, então A, D e X' são colineares. Porém, sabemos que $BD = CD' \Rightarrow MD = MD'$ e $I_AX' = I_AD'$, assim a reta I_AM corta AD' no ponto médio, pois é a base média do triângulo $\triangle DD'X'$. ■

Para finalizar nossos lemas mais básicos antes de ver outro um pouco mais complicado, iremos apresentar o último como incentro's version, e o enunciado como ex-incentro é da seguinte forma: **seja D', E' e F' o ponto de contato do A ex-incírculo com BC, AC e AB, respectivamente. Seja Y' a interseção de $E'F'$ com $D'I_A$, então AY' passa pelo ponto médio de BC.**

Lema. (Incentro's Version) Seja ABC um triângulo e DEF seu triângulo de contato. Seja Y a interseção de EF com DI, então AY passa pelo ponto médio de BC.

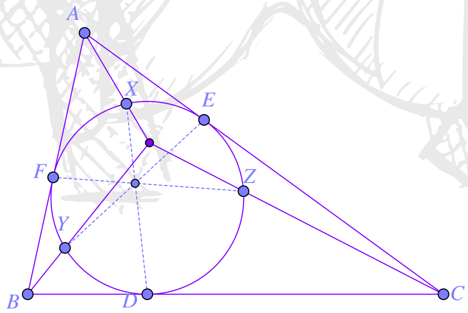
Prova. Inicialmente, tome B' e C' em AB e AC respectivamente tal que X está em $B'C'$ e $B'C' \parallel BC$. Assim, temos $\angle IYB' = \angle IFB' = 90$ e $\angle IYC' = \angle IEC' = 90$, assim, $IFB'Y$ e $IYEC'$ são cíclicos. Deste modo, $\angle B'IY = \angle AFE = \angle AEF = \angle YIC'$, pelas ciclicidades e que $AE = AF$. Ou seja, temos IY é altura e bissetriz do triângulo $B'IC'$, logo é mediana e $YB' = YC'$, e por homotetia de centro A que leva $B'C'$ em BC, ela vai levar Y no ponto médio de BC, assim AY passa pelo ponto médio de BC. ■

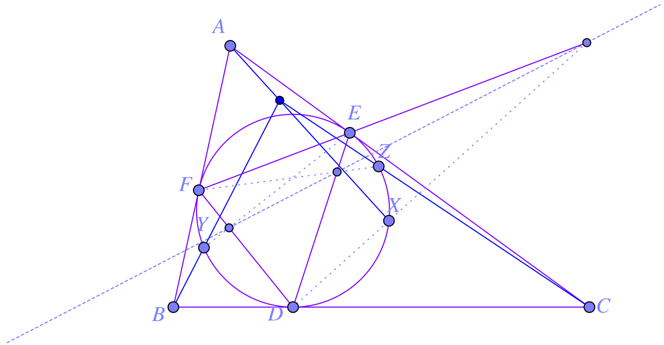


Agora por fim, mas não menos importante, um teorema um pouco “aloprado”, ele é bem legal, sua prova da versão forte é um pouco complicado porém seu uso pode ser útil em problemas um pouco mais difíceis, então se você não entender muito bem a prova, achar muito carteada, então não se preocupe em apenas apreciar o lema e sua versão mais fraca. Se você perceber, a condição de “se, e somente se” é um pouco esquisita... existe uma solução da ida usando muita trigonometria e ceva/menelaus, poir isso dá a concorrência ou a colineariedade, porém, aqui irei apenas mostrar a vola, ou seja, se for concorrente ou colinear, temos a concorrência com segmento, e irei fazer isso usando tranformação projetiva.

Teorema de Steinbart. Seja ABC um triângulo e DEF o seu contato. Seja X, Y e Z pontos no incírculo, assim, temos que AX, BY e CZ concorrem se, e somente se DX, EY e FZ concorrem **ou** $DX \cap EF$, $EY \cap DF$ e $FZ \cap DE$ serem colineares.

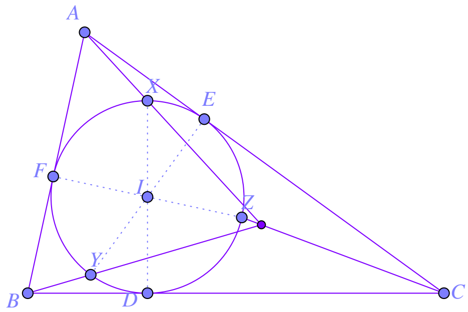
Prova. (Esse “ou” sempre me quebra)



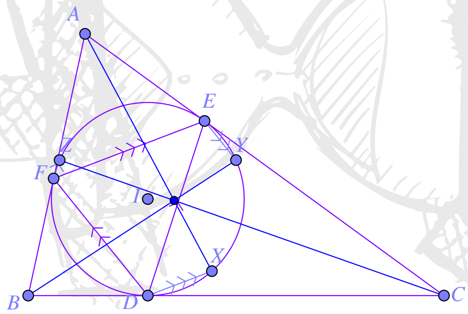


Iremos provar apenas a volta, ou seja, se DX, EY e FZ concorrem ou $DX \cap EF$, $EY \cap DF$ e $FZ \cap DE$ são colineares, então AX, BY e CZ concorrem. Inicialmente, suponha que DX, EY e FZ concorrem, iremos fazer nossa prova baseada em uma ferramenta de geometria projetiva muito interessante: as tranformações projetivas, ou homografias para os mais nobres.

Inicialmente, se DX, EY e FZ concorrem em P e seja I o incentro de ABC, como o problema é puramente projetivo (inclusive, o problema vale para qualquer cônica tangente aos lados do triângulo), pois so temos interseções, tangências e uma cônica, então podemos tomar a transformação projetiva que leva P em I e preserva o círculo, pois isso é uma tranformação projetiva. Assim, X, Y e Z vira a antípoda de D, E e F, e vimos que AX passa pelo contato do A ex-incírculo com BC, então de fato AX, BY e CZ concorrem, e eles concorrem no ponto de Nagel, como vimos no primeiro lema dessa subseção. Assim, vale para todo ponto P que não esteja na circunferência (se estiver na circunferência, então $X = Y = Z = P$ e claramente AX, BY e CZ concorrem).



Agora, suponha que $DX \cap EF$, $EY \cap DF$ e $FZ \cap DE$ são colineares, então tome a tranformação projetiva que leva essa reta na reta do infinito, pois então $DX \parallel EF$, $EY \parallel DF$ e $FZ \parallel DE$. Porém, note que $EF \perp AI$ e como $ID = IX$ com $DX \perp AI$, então X vai estar na isogonal de AD, ou seja, AD e AX são isogonais, assim como BE e BY e também CF e CZ, assim temos que AX, BY e CZ concorrem no conjugado harmônico do ponto de Gergonne. ■

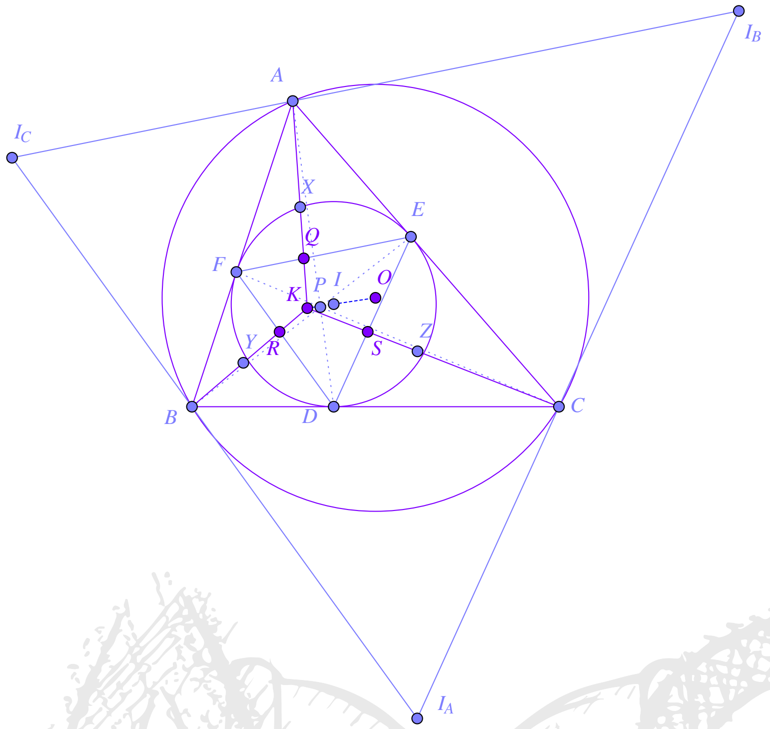


E para a surpresa de mais ninguém, esse teorema **também** tem uma versão para ex-incentro e ex-incírculo, e o enunciado é a mesma coisa: **se D', E' e F' é o contato do A ex-incírculo com BC, AC e AC, respectivamente, e seja X', Y' e Z' pontos no A ex-incírculo, então AX', BY' e CZ' concorrem se e somente se $D'X'$, $E'Y'$ e $F'Z'$ concorrem ou $D'X' \cap E'F'$, $E'Y' \cap D'F'$ e $F'Z' \cap D'E'$.**

Se lembra que prometemos um problema que se usa homotetia e a reta OI? Então aqui está como prometido, eu apresento a vocês ele, o Problema 6 da Olimpíada Brasileira de Matemática de 2013:

Exemplo 4. (OBM 2013 Nível 3 Problema 6) O incírculo do triângulo ABC toca os lados BC, CA e AB nos pontos D, E e F respectivamente. Seja P o ponto de interseção das retas AD e BE. As reflexões de P em relação a EF, FD e DE são X, Y e Z, respectivamente. Prove que as retas AX, BY e CZ têm um ponto comum pertencente à reta IO, sendo I e O o incentro e o circuncentro do triângulo ABC.

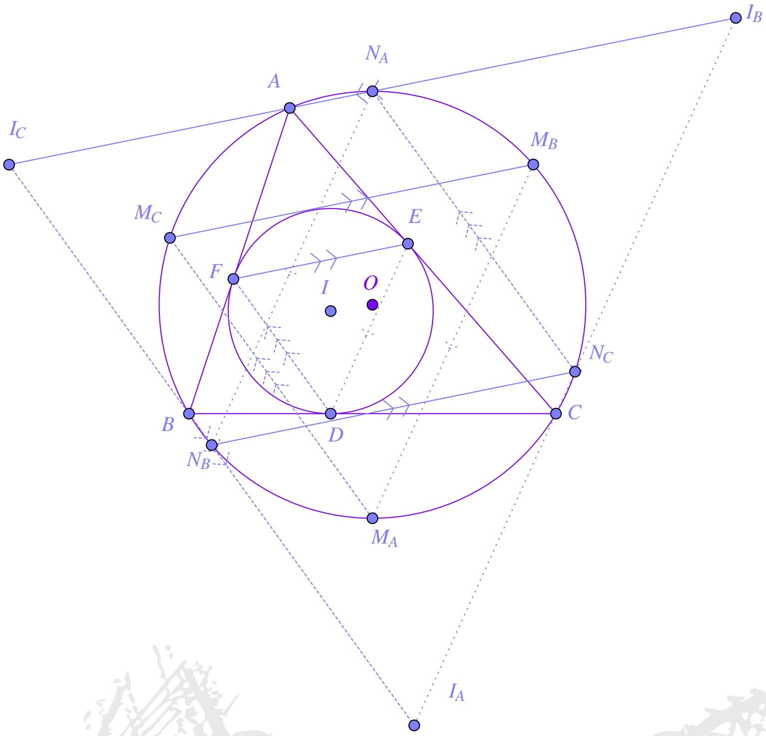
Solução. A solução desse problema vai requer um pouco de projetiva e homotetia, então é bom que você já tenha alguma noção para entender bem essa solução. Esse é o tipo de problema que, caso você esteja sem ideia ou não saiba o que fazer, tente pegar os ex-incentros, até porque vimos que a reta IO tem muito haver com eles.



Inicialmente, perceba que P é o ponto de gergonne do $\triangle ABC$ (ele não está em OI, apesar de parecer) e antes de mexer com homotetia, iremos provar um lema, que não é de incentro, porém vai nos ajudar muito na solução: seja Q o pé da altura de D em EF, então A, X e Q são colineares. A prova disso é bem simples usando um pouco de projetiva, basta ver que $-1 = (P, X; EF \cap PX, P_{\infty PX}) \overset{Q}{=} (P, QX \cap DA; EF \cap DA, D)$, logo basta $(P, A; EF \cap DA, D) = -1 \overset{E}{=} (EP \cap (DEF), E; F, D)$, o que é verdade pois EP é simediana. Assim, se R é o pé da altura de E e S o pé da altura de F, então basta AQ, BR e CS concorrerem.

Agora chegamos na parte de homotetia. Se você perceber, $DQ \perp EF$ e $I_AA \perp I_BI_C$, só que a parte boa é que $EF \parallel I_BI_C$, pois ambos são perpendiculares a IA, então $AI_A \parallel DQ$, então seria muito bom se o centro da homotetia que leva DEF em $I_AI_BI_C$ estivesse em OI, pois então A iria no Q e passaria pelo centro de homotetia, que está em OI, só que isso é verdade!! Para isso vamos lembrar do bevan point, aquele visto no problema da OBM no começo do material, lembra que ele é o centro de $(I_AI_BI_C)$? Por conta do nove pontos, e também está na reta OI, assim seja K o centro da homotetia que leva DEF em $I_AI_BI_C$, assim leva I no Bevan, então K, I e Bevan são colineares, porém essa reta também passa por O. Assim terminamos, pois A vai no Q e respectivos, assim AX, BY e CZ concorrem em K, que está em OI. $\blacksquare$

Uma coisa legal é que esse ponto K de concorrência é bem famosinho, ele é o conjugado isogonal do mittenpunkt e tem muitas propriedades com ele (se por acaso você querer alguma suspeita estranha para uma concorrência em OI, ele é um ótimo candidato). Outra coisa é que se M_A é o ponto médio do arco BC que não contém A, M_B e M_C analogos, então $M_AM_BM_C$ é homotético com DEF e com $I_AI_BI_C$ (fácil ver que $AI \perp M_BM_C$ e consequentemente $EF \parallel M_BM_C \parallel I_BI_C$), e o centro de homotetia positivo dele para os dois triângulos está em OI. O centro de $M_AM_BM_C$ para $I_AI_BI_C$ é o I e o de $M_AM_BM_C$ para DEF é o centro da homotetia que leva o incírculo no circuncírculo, ou seja, leva I no O.



Além disso, podemos tomar N_A o ponto médio do arco BAC, N_B e N_C analogos, então $N_AN_BN_C$ também vai ser homotético com esses três triângulos, porém, agora com homotetia negativa, mas isso não deixa os centros de homotetia se manter na reta OI. O de $N_AN_BN_C$ para $M_AM_BM_C$ é o O, para o $I_AI_BI_C$ é o baricentro de $I_AI_BI_C$ pois N_A, N_B e N_C é o ponto médio dos lados, e o baricentro está na reta OI (reta de euler do triângulo $I_AI_BI_C$). e por fim, o centro de homotetia de $N_AN_BN_C$ para o DEF está em OI por monge, que é um teorema que enunciaremos mais a frente.

Ah, por último, note que a reta de euler desses 4 triângulos é a reta OI, isso é mais fácil de ver por homotetia usando circuncentro e o baricentro, pois o baricentro de todo mundo tá em OI e o circuncentro também, então temos esse resultado, e com isso conseguimos coisas do tipo que o ortocentro de DEF tá em OI.

Espero que tenham gostado dessa seção, existe também muitas propriedades de incentro e ex-incentro envolvendo a circunferência mixtilinear e seu ponto de tangência, porém, logo teremos um material apenas para essa circunferência contendo todas essas propriedades. Agora, para terminar a parte de propriedades básicas, iremos ver propriedades de um ponto muito amigo do incentro: o ponto do tubarão diabolico!!

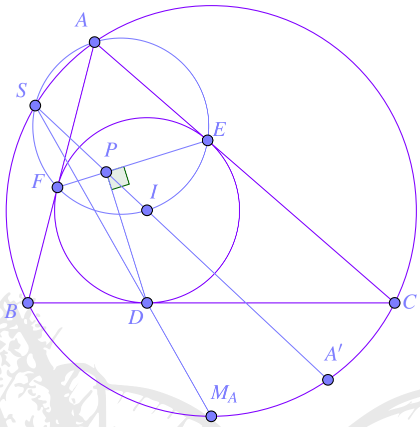
2.3 Sharky Devil point

Nós do ampulheta já temos um material completo de Sharky Devil, você pode conferir por esse link aqui: sharky devil point (só clicar aqui).

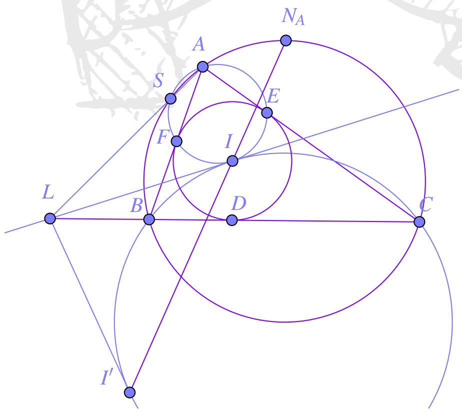
Mas de qualquer modo, vou colocar aqui nesse material os lemas apresentados de sharky devil (a prova dos lemas e problemas de sharky você pode encontrar diretamente no link acima)

Lema. Tome o triângulo $\triangle ABC$, $\triangle DEF$ seu triângulo de contato e incentro I. Seja S o A-sharky-devil, ou seja, a interseção entre (ABC) e $(AEIF)$. Seja M_A o ponto médio do arco BC que não contém A da circunferência (ABC). Se A' é a antípoda de A e P é o pé da altura de D em EF, então:

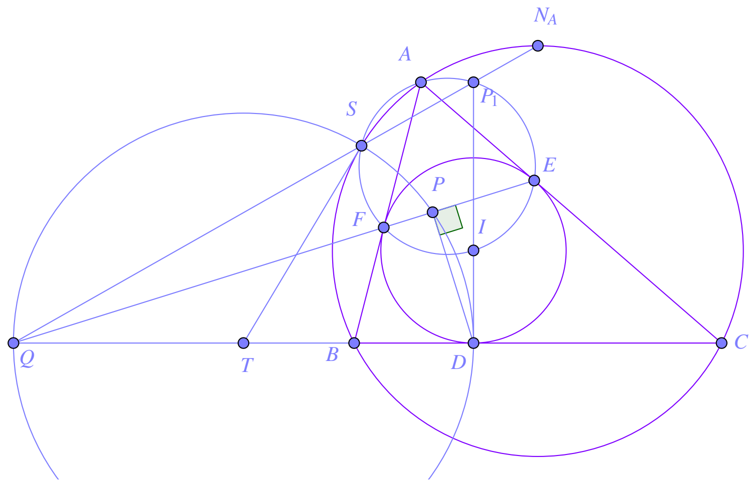
- S, D e M_A são colineares, assim como
- S, P, I e A' são colineares.



Lema. Seja I' a segunda interseção de IN_A com a circunferência (BIC). Então temos que (ASI) e (BIC) são tangentes, e essa tangente comum em I juntamente com a tangente de I' a (BIC), AS e BC concorrem.

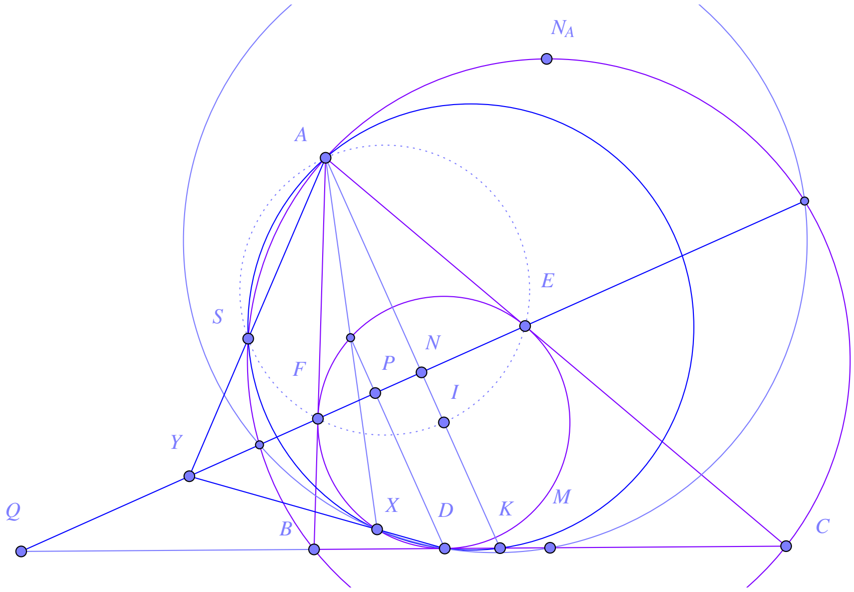


Lema. Seja $Q = EF \cap BC$, N_A o ponto médio do arco BAC, $P_1 = DI \cap (AEF)$ e T a interseção da tangente por S a (ABC) e BC, então temos que N_A, S, P_1 e Q são colineares e $QSPD$ é cíclico com centro T.



Lema. Defina a nossa estrela da noite como a interseção entre (DEF) e (ASD), sendo todos esses pontos, os mesmos definidos nos lemas anteriores, ou seja, ABC triângulo, DEF o contato, P o pé da altura de D em EF, Q a interseção de BC com EF, N_A o ponto médio do arco BAC e M_A o ponto médio do outro arco. Chame esse nosso ponto de X. Defina também K, M e N como o pé da bissetriz de A, o ponto médio de BC e o ponto médio de EF. Então temos infinitas propriedades:

- PD e AX concorrem no incírculo;
- DX, EF e AS concorrem em Y, onde $YA \cdot YS = YP \cdot YN = YE \cdot YF = YX \cdot YD$ e $(Y,P;F,E) = -1$;
- A, S, X, D e K são concíclicos;
- IN_A é mediatriz de DX;
- (MDX) e (ABC) tem eixo radical EF, ou seja, a interseção dessas duas circunferências está em EF.



Assim, terminamos a parte de propriedades básicas!! Sei que algumas coisas não foram tão básicas (teorema de steinbart cof cof), mas espero que tenha aproveitado, só com as informações dessa seção você já consegue fazer 90% dos problemas de incentro, geralmente eles usam muito a configuração dos ex-incentros e as de homotetias, no máximo, alguma envolvendo o sharky devil.

E assim terminamos a parte 1 de lemas de incentro/ex-incentro, nas próximas partes, iremos ver alguns lemas projetivos, configurações famosas e lemas de incentro com quadriláteros.

3 Problemas

Por último, chegamos na parte mais importante do nosso material: os problemas propostos. Pensem em muitos dos problemas, tentem aplicar os lemas aqui ensinados, use problemas anteriores e ideias aqui mostradas para fazer os problemas. Os problemas não usam apenas ideia desse material, usa algumas ideias mostradas anteriormente também. Esse material vai possuir todos os problemas propostos, a parte 2 e 3 de lemas de incentro não tera essa parte.

Espero que tenham gostado do material, aproveitem muito e qualquer dúvida ou observação, podem me mandar um e-mail: joaovssantos1003@gmail.com. Fiquem agora com os problemas propostos :)

Problema 1. (G7 IMO Shortlist 2004) Para um triângulo ABC dado, seja X um ponto variável na reta BC tal que C está entre B e X e os incírculos dos triângulos ABX e ACX se intersectam em dois pontos distintos P e Q. Prove que a reta PQ passa por um ponto independente de X.

Problema 2. Seja ABC um triângulo acutângulo cujo incírculo toca os lados AC e AB em E e F, respectivamente. As bissetrizes de ABC e ACB encontram EF em X e Y, respectivamente, e tome o ponto médio de BC para ser Z. Mostre que XYZ é equilatero se e somente se $\hat{A} = 60$.

Problema 3. (G6 IMO Shortlist 2005) Seja ABC um triângulo, e M o ponto médio do lado BC. Tome γ para ser o incírculo de ABC. A mediana AM do triângulo ABC intersecta o incírculo γ em dois pontos K e L. As retas passando por K e L, paralelas a BC, intersectam o círculo γ novamente em pontos X e Y. As retas AX e AY intersectam BC novamente nos pontos P e Q. Prove que $BP = CQ$.

Problema 4. No triângulo ABC, $AB = AC$. Seja D o ponto médio do lado BC, e seja E um ponto na mediana AD. Seja F o pé da perpendicular de E ao lado BC, e seja P um ponto no segmento EF. Tome M e N para ser os pés das perpendiculares de P aos lados AB e AC, respectivamente. Prove que M, E e N são colineares se e somente se $\angle BAP = \angle PAC$.

Problema 5. (APMO 2007 Problema 2) Let ABC be an acute angled triangle with $\angle BAC = 60°$ and $AB > AC$. Let I be the incenter, and H the orthocenter of the triangle ABC . Prove that $2\angle AHI = 3\angle ABC$.

Problema 6. **(IMO 2008 Problema 6)** Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo com $BA \neq BC$. Denote os incírculos dos triângulos ABC e ADC por ω_1 e ω_2 respectivamente. Suponha que existe um círculo ω tangente a reta BA em A and a reta BC em C, e também é tangente as retas AD e CD. Prove que as tangentes externas comuns de ω_1 e ω_2 se intersectam em ω.

Problema 7. **(USAMO 2001 Problema 2** Seja ABC um triângulo e tome ω seu incirculo. Denote por D_1 e E_1 os pontos onde ω tangencia os lados BC e AC, respectivamente. Denote por D_2 e E_2 os pontos nos lados BC e AC, respectivamente, tal que $CD_2 = BD_1$ e $CE_2 = AE_1$, e denote por P o ponto de interseção dos segmentos AD_2 e BE_2. O círculo ω intersecta o segmento AD_2 em dois pontos, o mais próximo do vértice A é chamado de Q. Prove que $AQ = D_2P$.

Problema 8. (IMO 2006 Problema 1) Seja ABC um triângulo com incentro I. Um ponto P no interior do triângulo satisfaz $\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB$. Mostre que $AP \geq AI$, e que a igualdade acontece se e só se $P = I$.

Problema 9. **(G1 IMO Shortlist 2005)** Dado um triângulo ABC satisfazendo $AC + BC = 3 \cdot AB$. O incírculo do triângulo ABC tem centro I e toca os lados BC e CA nos pontos D e E, respectivamente. Seja K e L a reflexão dos pontos D e E em relação a I. Prove que os pontos A, B, K, L estão em um mesmo círculo.

Problema 10. **(IGO 2020 Avançado Problema 2)** Seja $\triangle ABC$ um triângulo acutângulo com incentro I. Suponha que N é o ponto médio do arco $\widehat{BAC}$ do circuncírculo do triângulo $\triangle ABC$, e P é um ponto tal que $ABPC$ é um paralelogramo. Seja Q a reflexão de A por N e R a projeção de A em QI. Mostre que a reta AI é tangente ao circuncírculo do triângulo $\triangle PQR$

Problema 11. **(G7 IMO Shortlist 2002)** O incírculo Ω de um triângulo acutângulo ABC é tangente ao lado BC no ponto K. Seja AD uma altura do triângulo ABC, e seja M o ponto médio de AD. Se N é o ponto em comum de Ω e a reta KM (diferente de K), então prove que o incírculo Ω e o circuncírculo do triângulo BCN são tangentes um ao outro em N.

Problema 12. (USA TSTST 2016 Problema 2) Seja ABC um triângulo escaleno com ortocentro H e circuncentro O. Seja M, N os pontos médios de $\overline{AH}$, $\overline{BC}$. Suponha que o círculo γ com diametro $\overline{AH}$ encontra o circuncírculo de ABC em $G \neq A$, e encontra a reta AN em um ponto $Q \neq A$. A tangente a γ por G encontra a reta OM em P. Mostre que os circuncírculos de $\triangle GNQ$ e $\triangle MBC$ se intersectam em um ponto T em $\overline{PN}$.

Problema 13. (USAMO 2017 Problema 3 Tome ABC um triângulo escaleno com circuncírculo Ω e incentro I. A semireta AI encontra $\overline{BC}$ em D e encontra Ω novamente em M; o círculo com diametro $\overline{DM}$ corta Ω novamente em K. As retas MK e BC se encontram em S, e N é o ponto médio de $\overline{IS}$. Os circuncírculos dos triângulos $\triangle KID$ e $\triangle MAN$ se intersectam em pontos L_1 e L_2. Prove que Ω passa pelo ponto médio de $\overline{IL_1}$ ou $\overline{IL_2}$.

Problema 14. (Taiwan TST 2015 Round 3 Quiz 3 Problema 2) em um triângulo escaleno ABC com incentro I, oincírculo é tangente aos lados CA e AB em pontos E e F. As tangentes ao circuncírculo do triângulo AEF por E e F se encontram em S. As retas EF e BC se intersectam em T. Prove que o círculo de diametro ST é ortogonal ao círculo dos nove pontos do triângulo BIC.

Problema 15. (G4 ELMO Shortlist 2017) Seja ABC um triângulo acutângulo de incentro I e circuncírculo ω. Suponha que um círculo ω_B é tangente a BA e BC, e internamente tangente a ω em B_1, enquanto um círculo ω_C é tangente a CA e CB, e internamnete tangente a ω em C_1. Se B_2 e C_2 são pontos opostos a B e C em ω, respectivamente, e X denota a interseção de B_1C_2 e B_2C_1, prove que $XA = XI$.

Problema 16. (USA TST 2016 Problema 2) Seja ABC um triângulo escaleno com circuncírculo Ω, e suponha que o incírculo de ABC toca BC em D. A bissetriz de $\angle A$ encontra BC e Ω em E e F. O circuncírculo de $\triangle DEF$ intersecta o ex-incírculo de A em S_1, S_2, e Ω em $T \neq F$. Prove que a reta AT passa por S_1 ou S_2.

Problema 17. (USAMO 2016 Problema 3) Tome $\triangle ABC$ um triângulo acutângulo, e tome I_B, I_C, e O denotar o ex-incentro de B, ex-incentro de C, e o circuncentro, respectivamente. os pontos E e Y são selecionados em $\overline{AC}$ tal que $\angle ABY = \angle CBY$ e $\overline{BE} \perp \overline{AC}$. Analogamente, pontos F e Z são selecionados em $\overline{AB}$ tal que $\angle ACZ = \angle BCZ$ e $\overline{CF} \perp \overline{AB}$. As retas I_BF e I_CE se encontram em P. Prove que $\overline{PO}$ e $\overline{YZ}$ são perpendiculares.

Problema 18. (Centroamericana 2016 Problema 6 Seja $\triangle ABC$ um triângulo com incentro I e circuncírculo Γ. Seja $M = BI \cap \Gamma$ e $N = CI \cap \Gamma$, a reta paralela a MN por I corta AB e AC em P e Q. Prove que os circunraios de $\odot(BNP)$ e $\odot(CMQ)$ são iguais.

Problema 19. (Iran TST 2012 Prova 1 Problema 2) Considere ω o circuncírculo de um triângulo acutângulo ABC. D é o ponto médio do arco BAC e I é o incentro do triângulo ABC. DI intersecta BC em E e ω pela segunda vez em F. Seja P um ponto na reta AF tal que PE é paralelo a AI. Prove que PE é bissetriz do ângulo $\angle BPC$.