Polinômios

Sofia Pinheiro

1 Introdução:

Os polinômios são expressões algébricas fundamentais na matemática, com ampla aplicação em diversas áreas. Seu estudo envolve a análise de gráficos, raízes e desigualdades, permitindo entender o comportamento dessas funções. Além disso, ferramentas como as relações de Girard e as somas de Newton fornecem métodos para relacionar os coeficientes de um polinômio com suas raízes, facilitando cálculos e investigações algébricas. Este material abordará esses conceitos de forma clara e objetiva, explorando suas propriedades e aplicações.

2 Gráficos, raízes e desigualdades entre polinômios:

Aprofundaremos nosso conhecimento em relação ao estudo dos gráficos dos polinômios. Primeiramente, para um determinado $P(x)$ de grau n, podemos afirmar que:

1. $P(r) = 0$ para cada raiz r;

2. $P(x)$, quando x tende a mais infinito, vai também para infinito, conservando o grau do coeficiente linear;

3. $P(x)$ quando x tende a menos infinito, poderá ir para mais infinito ou para menos infinito dependendo do seu coeficiente linear e de sua paridade;

Vamos começar falando sobre polinômios que possuem apenas raízes reais e simples. Com algum conhecimento técnico encontrado em livros universitários (o que foge do escopo deste material), podemos concluir que o gráfico desses polinômios "serpenteia"ao longo do eixo x, alternando de sinal a cada raiz.

Se o coeficiente líder for positivo (o raciocínio para coeficiente líder negativo é semelhante), o gráfico deve se estender para o infinito positivo. Com isso, conseguimos esboçar uma ideia de como ele deve se comportar.

Para ilustrar, apresentamos os gráficos de polinômios de graus 1 a 3. Observe atentamente o comportamento do gráfico antes da primeira raiz e depois da última.

1º grau $P(x) = a_1 + a_0$, a_1 maior do que 0 e 1 raiz real r (linear)

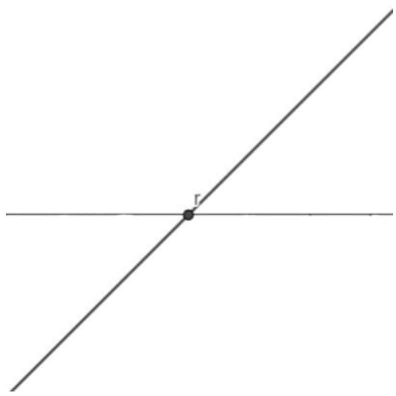

Figura 1: Linear

2º grau $P(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ com a_2 maior do que 0 e duas raízes reais r_1, r_2 (parábola)

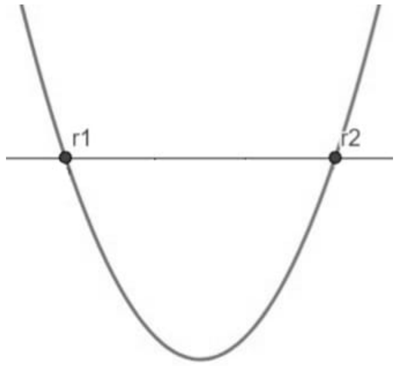

Figura 2: Parábola

3º grau $P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ com a_3 maior do que 0 e três raízes reais r_1, r_2, r_3

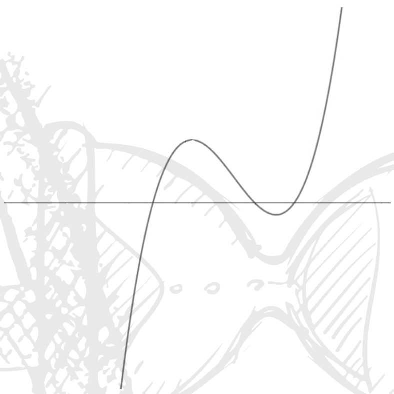

Figura 3: Cúbica

3 Teoremas

Valor intermediário Seja $I = [a,b]$ intervalo do conjunto dos reais e seja $f : I -> \mathbb{R}$função contínua neste intervalo. Daí, para todo u pertencente ao intervalo $(minf(a), f(b), maxf(a), f(b))$ existe um $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = u$

A prova para este teorema envolve uma álgebra além da que pretendemos adotar aqui. No entanto, uma ideia de prova, menos formal, é tranquila de ser vista: basta perceber que para ligar os pontos $f(a)$ e $f(b)$ será necessário cortar, pelo menos, uma vez a reta horizontal.

Teorema de Bolzano Seja $I = [a,b]$ intervalo do conjunto dos reais e seja $f : I -> \mathbb{R}$ uma função contínua neste intervalo tal que $f(a)f(b) < 0$ (isto é, $f(a)$ e $f(b)$ tem sinais trocados. Então existe, pelo menos, um ponto $r \in (a,b)$ que $f(r) = 0$ Ou seja, se f for um polinômio, então tal polinômio tem, pelo menos, uma raiz entre a e b.

4 Relações de Girard

Durante os estudos de raízes, há um teorema muito importante sobre as raízes. Vejamos ele: Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ as raízes do polinômio:$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$ E sejam s_i as seguintes

somas:
$s_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$

$s_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n$
$\vdots s_n = x_1x_2 \cdots x_n$

Em outras palavras, s_t é a soma de todos os possíveis produtos das t raízes. Então, podemos afirmar que:

$s_1 = -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \quad s_2 = \frac{a_{n-2}}{a_n}, \quad \ldots \quad s_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$ Isto é, temos a seguinte forma geral:

$$s_t = (-1)^t \frac{a_{n-t}}{a_n}, \quad \text{para todo } 1 \leq t \leq n.$$

Prova: Basta expandir

$$P(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$$

e comparar os termos de mesmo expoente.

A partir das relações de Girard, ou fórmulas de Vieta, temos três importantes conclusões sobre as raízes de um polinômio:

Raízes inteiras: Seja r uma raiz inteira do polinômio $P(x)$, com coeficientes **inteiros**, e coeficiente independente a_0. Então, podemos assegurar que $r \mid a_0$.

Prova: É um caso particular do próximo teorema.

Raízes racionais: Seja $\frac{p}{q}$ uma raiz racional, em forma simplificada, isto é, com $\gcd(p, q) = 1$, do polinômio $P(x)$, com coeficientes **inteiros**, e coeficientes líder a_n e independente a_0. Então, podemos garantir que $p \mid a_0$ e $q \mid a_n$.

Prova: Tomemos um polinômio $P(x)$ com coeficientes inteiros:

$$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0, \quad a_t \in \mathbb{Z}, \quad \forall 1 \leq t \leq n.$$

Se $\frac{p}{q}$ é raiz de $P(x)$, então, com algum algebrismo e lembrando que $\gcd(p, q) = 1$, temos:

$$0 = P\left(\frac{p}{q}\right) = a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \cdots + a_1\left(\frac{p}{q}\right) + a_0.$$

Rearranjando os termos:

$$\begin{cases} a_np^n - a_{n-1}qp^{n-1} - \cdots - a_1q^{n-1}p = -a_0q^n \Rightarrow p \mid a_0, \\ q\left(a_{n-1}p^{n-1} + a_{n-2}p^{n-2} + \cdots + a_0q^{n-1}\right) = -a_np^n \Rightarrow q \mid a_n. \end{cases}$$

5 Somas de Newton

Por vezes, encontramos questões que tratam de somas de potências de números. Nestas questões, uma ideia que pode ser interessante é olhar para as somas de Newton. Para entender este assunto, optemos por estudar, inicialmente, como funciona para três números. Deste modo, considere a, b, c números dados e considere a soma de potências de S_n definida como:

$S_n = a^n + b^n + c^n$, para todo n pertencente aos inteiros não negativos. Alem disso, consideremos as fórmulas definidas pelas relações de Girard. Para isso, definamos $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ como: $\sigma_1 = a + b + c$; $\sigma_2 = ab + bc + ac$; $\sigma_3 = abc$

Conforme já estudamos, temos que a, b, c são as raízes do polinômio $P(x)$, tal que:

$$P(x) = x^3 - \sigma_1x^2 + \sigma_2x - \sigma_3$$

A multiplicação de $P(x)$ por x^{n-3} não faz com que a, b, c deixem de ser raízes. Dessa forma, podemos concluir que:

$$a^n - \sigma_1 a^{n-1} + \sigma_2 a^{n-2} - \sigma_3 a^{n-3} = 0$$

$$b^n - \sigma_1 b^{n-1} + \sigma_2 b^{n-2} - \sigma_3 b^{n-3} = 0$$

$$c^n - \sigma_1 c^{n-1} + \sigma_2 c^{n-2} - \sigma_3 c^{n-3} = 0$$

Somando as três expressões acima e seguindo nossa definição de somas S_n, temos que:

$$S_n - \sigma_1 S_{n-1} + \sigma_2 S_{n-2} - \sigma_3 S_{n-3} = 0$$

E, assim, obtemos uma fórmula para as somas de potências para três números. Ressaltamos que:

$$S_0 = a^0 + b^0 + c^0 = 3$$

De forma completamente análoga, é possível generalizar para quaisquer quantidades de termos. Deixamos para o leitor, caso queira ou precise fazê-lo.

6 Irredutibilidade de Polinômios

Para terminar nossos estudos sobre polinômios, falemos sobre Irredutibilidade. Dizemos que um polinômio $P(x)$ é **irredutível** sobre os inteiros quando não é possível escrevê-lo como produto de dois polinômios, não constantes, ambos com coeficientes inteiros. Definições análogas podem ser feitas para irredutibilidade sobre os racionais, os reais e etc.

Por exemplo, o polinômio $P(x) = x^2 - 4x + 1$ é irredutível sobre os inteiros e sobre os racionais, mas não é irredutível sobre os reais, pois, sendo $(2 \pm \sqrt{3})$ as raízes, temos que:

$$x^2 - 4x + 1 = \left[x - (2 + \sqrt{3})\right]\left[x - (2 - \sqrt{3})\right]$$

Enquanto isso, o polinômio $Q(x) = x^2 + 2x + 2$ é irredutível sobre os reais, pois suas raízes são $(1 \pm \sqrt{-1})$.

A ideia de procurar raízes para verificar irredutibilidade de polinômios é interessante e, por exemplo, permite concluir que todo polinômio com coeficientes reais é redutível sobre os complexos.

No entanto, não se trata apenas de procurar raízes. Por exemplo, o polinômio $x^4 + 5x^2 + 4$ é redutível sobre os inteiros, apesar de não ter raízes reais, pois podemos fatorá-lo da seguinte forma:

$$x^4 + 5x^2 + 4 = (x^2 + 1)(x^2 + 4)$$

Continuando nossos estudos, vejamos um lema interessante:

Lema (Gauss): Um polinômio $P(x)$, com coeficientes inteiros, é irredutível sobre os inteiros se, e somente se, ele também é irredutível sobre os racionais.

Prova: A parte de ele ser irredutível sobre os racionais implicar em irredutibilidade sobre os inteiros é evidente, pois o conjunto dos racionais contém os inteiros. Então, vamos nos concentrar na outra parte.

Suponhamos que a ida não é verdade, isto é, que existem polinômios $P(x)$, com coeficientes a_i inteiros, e $Q(x) \in \mathbb{Q}[x]$, polinômios não constantes, com coeficientes racionais tais que:

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = Q(x)R(x)$$

Sejam q e r os menores números naturais, diferentes de 1, tais que os polinômios:

$$qQ(x) = \sum_{j=0}^{s} g_j x^j \quad \text{e} \quad rR(x) = \sum_{k=0}^{t} r_k x^k$$

têm coeficientes inteiros. Daí, temos que o polinômio $qrP(x)$ é redutível sobre os inteiros, pois $qrP(x) = qQ(x)rR(x)$. Para concluir o absurdo, busquemos uma fatoração para $P(x)$.

Seja p um divisor primo qualquer de q. Todos os coeficientes de $qrP(x)$ são divisíveis por p. Seja u o menor índice tal que p não divide q_u. Em termos matemáticos, u é tal que:

$$p \mid q_0, q_1, \ldots, q_{u-1} \quad \text{e} \quad p \nmid q_u.$$

Daí, como p divide todos os coeficientes de $qrP(x)$, temos que:

$$p \mid qra_u = q_0 ru + \cdots + q_u r_0 \equiv q_u r_0 \pmod p$$

e, portanto, $p \mid r_0$. Analogamente, podemos concluir que:

$$p \mid qra_{u+1} = q_0 ru + 1 + \cdots + q_u r_1 \equiv q_u r_1 \pmod p$$

E assim sucessivamente, podemos concluir que $p \mid r_k$ para todo $0 \leq k \leq t$.

Portanto, o polinômio $\frac{rR(x)}{p}$ tem coeficientes inteiros e, consequentemente, o polinômio $\frac{qr}{p}P(x)$ é redutível sobre os inteiros.

Podemos ir fazendo este procedimento de ir pegando os fatores primos de q e até não poder mais, sem perder a redutibilidade nos inteiros. Como tal quantidade de fatores primos é finita, uma hora este procedimento acaba. Quando isto acabar teremos uma fatoração de $P(x)$ para outros dois polinômios inteiros, fato contraditório.

Critério de Eisenstein Generalizado. Consideremos um polinômio $P(x)$ tal que:

$$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \quad \text{com } a_i \in \mathbb{Z} \quad \forall 0 \leq i \leq n$$

Se existe um número primo p e um inteiro k, com $0 \leq k \leq n-1$, tal que:

$$p \mid a_0, a_1, \ldots, a_k \quad \text{e} \quad p \nmid a_{k+1} \quad \text{e} \quad p^2 \nmid a_0$$

então $P(x)$ tem um fator irredutível de grau maior que k.

Em particular, se existe um primo p tal que $k = n-1$, então $P(x)$ é irredutível sobre os inteiros.

Prova: Analogamente ao feito na prova do Lema de Gauss, suponhamos, por absurdo, que $P(x)$ tenha um fator redutível de grau k, no máximo.

Deste modo, tomemos os polinômios $P(x)$, $Q(x)$ e $R(x)$, todos com coeficientes inteiros, tais que:

$$P(x) = Q(x) \cdot R(x) \quad \text{com} \quad Q(x) = \sum_{i=0}^{k} q_i x^i \quad \text{e} \quad R(x) = \sum_{j=0}^{t} r_j x^j.$$

Daí, como $p \mid q_0r_0$ e $p^2 \nmid q_0r_0$, então temos que apenas um dos dois, q_0 ou r_0, é múltiplo de p. Suponhamos que $p \mid q_0$ e $p \nmid r_0$. (O caso $p \nmid q_0$ e $p \mid r_0$ é análogo.)

Com isso, podemos concluir que:

$$p \mid a_1 = q_0r_1 + q_1r_0 \implies p \mid q_1r_0.$$

Como $p \nmid r_0$, concluímos que $p \mid q_1$.

E assim sucessivamente, temos que $q_0, q_1, \ldots, q_k$ são divisíveis por p. Daí, poderíamos concluir que:

$$a_{k+1} = \sum_{m=1}^{k} r_m q_{k+1-m} \implies p \mid a_{k+1},$$

algo contraditório com $p \nmid a_{k+1}$.

Portanto, a suposição de que $P(x)$ tem um fator redutível de grau k leva a uma contradição, logo $P(x)$ tem um fator irredutível de grau maior que k.

Exemplos:

Exemplo 1. Sejam a, b, c números que satisfaçam o sistema:

$$a + b + c = 2$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 26$$

$$a^3 + b^3 + c^3 = 38$$

Determine o valor de $a^5 + b^5 + c^5$.

Solução: Notemos que determinar as soluções deste sistema poderia ser trabalhoso e não é necessário.

Busquemos determinar os σ's:

$$\sigma_1 = a + b + c = 2$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{2}\left[(a+b+c)^2 - (a^2+b^2+c^2)\right] = -11$$

Um meio de determinar σ_3 é pela fórmula da soma de Newton para $n = 3$.

Agora, temos a fórmula completa da soma de Newton.

$S_n - 2S_{n-1} - 11S_{n-2} + 12S_{n-3} = 0$

Daí é só calcular.

Fazendo as contas, concluímos que: $S_4 = 338; S_5 = 782$

Exemplo 2. Considere dois polinômios cúbicos mónicos

$$P(x) = x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 \quad \text{e} \quad Q(x) = x^3 + b_1x^2 + b_2x + b_3.$$

Todas as oito raízes reais das equações $P(x) = 0$, $Q(x) = 0$ e $P(x) = Q(x)$ são escritas numa lista, de forma que aparecem oito números distintos em tal lista. Prove que não é possível que os números mínimo e máximo desta lista não podem ser, ambos, raízes de $P(x)$.

Solução

Suponhamos, por absurdo, que seja possível. Daí, como $P(x)$ e $Q(x)$ podem ter até três raízes, pois são de grau 3, e

$$P(x)-Q(x)=(a_1-b_1)x^2+(a_2-b_2)x+(a_3-b_3)$$

tem, no máximo, duas raízes, pois é de grau 2. Temos, então, que todas as equações possuem raízes simples, ou seja, raízes de multiplicidade um.

Sejam $r<s<t$ as três raízes de $P(x)$.

Suponhamos, inicialmente, que $a_1>b_1$, isto é, que $P(x)=Q(x)$ gera uma concavidade "para cima".

Para $x=t$, temos que:

$$P(t)-Q(t)>0 \Rightarrow \underbrace{Q(t)<0}$$

No entanto, para x suficientemente grande, temos que $Q(x)>0$, pois $Q(x)$ é um polinômio cujo coeficiente líder é positivo.

Daí, podemos concluir que existe um número real u suficientemente grande tal que $Q(u)>0$. Pelo teorema de Bolzano, podemos afirmar que há, pelo menos, uma raiz de $Q(x)$ no intervalo (t,u), algo contraditório com nossa suposição inicial, pois isto implica que $Q(x)$ tem uma raiz maior que $P(x)$.

Analogamente, o outro caso $a_1<b_1$ implica que $Q(x)$ tem uma raiz menor que $P(x)$. Isto conclui a solução.

Exemplo 3. (IME/2005) Determine o valor das raízes comuns das equações

$$x^4-2x^3-11x^2+18x+18=0$$

e

$$x^4-12x^3-44x^2-32x-52=0.$$

O autor ainda não conhecia ou não lembrou do teorema das raízes racionais na época. Na prova, foram testados $\pm1,\pm2$ e não teve sucesso, o autor não conseguiu fazer coisas produtivas na questão. Foi triste perceber, depois, que a solução estava próxima.

Solução Pelo teorema das raízes racionais, temos que as possíveis raízes racionais do polinômio

$$P(x)=x^4-2x^3-11x^2+18x+18$$

são $\pm1,\pm2,\pm3,\pm6,\pm9,\pm18$. Testando, vemos que ±3 são raízes de $P(x)$.

Daí, dividindo $P(x)$ por (x^2-9) para achar as outras raízes de $P(x)$, encontramos que:

$$P(x)=(x^2-9)(x^2-2x-2).$$

As raízes de (x^2-2x-2) são $(1\pm\sqrt{3})$.

Daí, precisamos testar cada uma destas quatro raízes em

$$Q(x)=x^4-12x^3-44x^2-32x-52.$$

Testando, vemos que ±3 não são raízes de $Q(x)$.

Pelo teorema das raízes irracionais, temos que se um dos valores de $(1\pm\sqrt{3})$ for raiz de $Q(x)$, o outro também é. Por consequência, $Q(x)$ será múltiplo de x^2-2x-2.

Porém, fazendo a divisão de polinômios, podemos concluir que:

$$\underbrace{x^4-12x^3-44x^2-32x-52}_{Q(x)}=(x^2-2x-2)(x^2-10x-62)+(-176x-176).$$

Portanto, como $Q(1\pm\sqrt{3})\neq0$, temos que os polinômios do enunciado não possuem raízes comuns.

7 Problemas

Problema 1.(Hong Kong/TST - 2019) Sejam a,b,c números reais positivos tais que $57a+88b+125c \geq 1148$ Calcule o valor mínimo da expressão: $a^3+b^3+c^3+5a^2+5b^2+5c^2$

Problema 2.(Coreia do Sul/2019) Encontre todos os pares de números reais (p, q) para os quais a equação: $x^4+2px^2+qx+p^2-36=0$

possui quatro raízes inteiras, podendo eventualmente haver raízes iguais.

Problema 3. (Canadá/2005) Uma tripla ordenada de inteiros positivos (a,b,c) é chamada de n-canadense quando $a \leq b \leq c$ $mdc(a,b,c)=1$ e $a^n+b^n+c^n$ é divisível por $a+b+c$. Por exemplo , $(1,2,2)$ é uma tripla 5-canadense.

a) Determine todas as triplas ordenadas (se existir) que são n-canadenses, para $n \leq 1$

b) Determine todas as triplas ordenadas (se existir) são 2004-canadenses e 2005-canadenses, mas não são 2007-canadenses.

Problema 4. Sejam $a_1,a_2,\ldots,a_n$ inteiros dados, distintos dois a dois. Prove que o polinômio

$$P(x)=(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)-1$$

é irredutível nos inteiros.

Problema 5.(Irã/2013) Sejam $a_0,a_1\ldots,a_n$ números inteiros positivos dados. Prove que existem números inteiros positivos $b_0,b_1\ldots b_n$ tais que $a_i \leq b_i \leq 2a_i$ para todo $0 \leq i \leq n$ o polinômio:

$P(x)=b_0+b_1x+\ldots+b_nx^n$

é irredutível sobre os racionais.

8 Referências Bibliográficas:

8.1 Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo (POTI)

8.2 Algebra do Zero ao IME ITA Cone Sul EGMO - Armando Barbosa

8.3 Tópicos de Matemática (IME-ITA-Olimpíadas) - Carlos A. Gomes e José Maria Gomes.