Aprofundamento em Cálculo

Arthur Alencar Spuri

1 Introdução

Seja bem vindo(a) a este material! Agora que passamos pela parte introdutória do cálculo, vamos finalmente avançar para suas aplicações em olimpíadas!

Caso você tenha dificuldade em compreender qualquer parte desse material, recomendo voltar ao meu primeiro material, onde explico as definições e provo algumas regras que usarei aqui.

Tendo dito isso, desejo a você uma ótima leitura, e boa sorte em seus estudos!

2 Derivadas em uma dimensão

Aqui, veremos inicialmente como usar derivadas para resolver problemas matemáticos, e provar relações de maneiras alternativas às que você provavelmente aprendeu anteriormente. Espero que você já esteja mais confortável em operar derivadas, e portanto vou apenas colocar a resposta final dos cálculos das derivadas, sem explicar como a conta funciona.

2.1 Revisitando desigualdades conhecidas com cálculo

Primeiramente, provemos a desigualdade de Jensen. Caso você não a conheça, ela diz:

Desigualdade de Jensen: Seja $f: I \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes continuamente diferenciável em um intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$, tal que $f''(x) \geq 0$ para todo $x \in I$. Se $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$ e $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in [0,1]$ são tais que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1,$$

então:

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i).$$

Prova: Para $n = 2$, definimos a função auxiliar:

$$g(\lambda) = f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2), \quad \lambda \in [0,1].$$

Pela regra da cadeia, temos:

$$g'(\lambda) = f'(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)(x_1 - x_2),$$

$$g''(\lambda) = f''(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)(x_1 - x_2)^2.$$

Como $f''(x) \geq 0$ e $(x_1 - x_2)^2 \geq 0$, concluímos que $g''(\lambda) \geq 0$, ou seja, g é convexa. Logo, para todo $\lambda \in [0,1]$:

$$g(\lambda) \leq \lambda g(1) + (1-\lambda)g(0),$$

o que implica:

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2).$$

Para o caso geral, utilizamos indução. Suponha que a desigualdade valha para n pontos. Mostremos que ela vale para $n+1$ pontos.

Sejam $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1} \in [0,1]$ com $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$. Defina

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i, \quad \mu_i = \frac{\lambda_i}{\alpha} \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Note que $\sum_{i=1}^{n} \mu_i = 1$. Pela hipótese de indução:

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu_i f(x_i).$$

Definimos $\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i$. Usando o caso de dois pontos para os valores $\bar{x}$ e x_{n+1}, temos:

$$f(\alpha \bar{x} + (1-\alpha)x_{n+1}) \leq \alpha f(\bar{x}) + (1-\alpha)f(x_{n+1}).$$

Combinando com a desigualdade anterior:

$$\alpha f(\bar{x}) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i),$$

portanto:

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(x_i).$$

E terminamos.

Note que para funções côncavas, a mesma relação é válida, apenas com o sentido da desigualdade invertido, configurando Jensen para funções côncavas.

Podemos usar essa desigualdade para provar outras desigualdades importantes. Agora, vamos provar MA-MG, uma das desigualdades mais conhecidas e úteis na matemática. Ela nos diz que para $A, B \geq 0, \frac{A+B}{2} \geq \sqrt{A * B}$, com a igualdade ocorrendo em $A = B$.

Prova:

Considere a função $f(X) = \ln X$. Como a função logaritmo natural é côncava. Por Jensen para funções côncavas, temos:

$$f(\frac{A+B}{2}) \geq \frac{1}{2} * (f(A) + f(B)) = \frac{1}{2} * (\ln A + \ln B) = \ln \sqrt{AB}$$

logo, elevando e aos dois lados, obtemos nosso famoso MA-MG:

$$\frac{A+B}{2} \geq \sqrt{AB}$$

2.2 Probleminhas com derivadas para praticar.

Agora, vou mostrar uma questão da Olimpíada Cearense de Matemática que pode ser resolvida, dentre outras maneiras, por cálculo.

Problema 1:

Seja (a_n) uma sequência de números reais definida por $a_1 = 1$ e:

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{4} + \frac{3}{a_n},$$

para todo $n \geq 1$.

Mostre que $a_{2n-1} \leq 2 \leq a_{2n}$ para todo $n \geq 1$

Solução:

Provemos pela seguinte indução:

Hipótese: para todo $0,6 \leq a_n \leq 2$, teremos $2 \leq a_{n+1} \leq 5,15$, e o contrário também é válido, para todo $2 \leq a_n \leq 5,15$, teremos $0,6 \leq a_{n+1} \leq 2$

Note que se provarmos isso, acabamos, pois $a_1 = 1$, então o próximo número será maior que 2, e o próximo menor, e assim por diante.

Definindo $f(x) = \frac{x}{4} + \frac{3}{x}$, temos que a derivada será:

$$f'(x) = \frac{1}{4} - \frac{3}{x^2}$$

Note que para $0,6 \leq x \leq 2$, teremos $0,36 \leq x^2 \leq 4$, logo a derivada será sempre negativa no intervalo. Portanto, o máximo da função no intervalo será em 0,6, e o mínimo será em 2. Calculando, temos:

$$f(2) = \frac{2}{4} + \frac{3}{2} = 2,$$

e

$$f(0,6) = \frac{0,6}{4} + \frac{3}{0,6} = 5,15.$$

Provamos assim a primeira parte! Agora, para a segunda parte, note que essa derivada possui um ponto crítico no intervalo de 2 a 5,15, precisamente em $x = 2\sqrt{3}$. Portanto, temos 3 pontos para testar pelos limites do novo intervalo: 2, 5,15, e $2\sqrt{3}$. Testando:

$$f(2) = 2$$
$$0,6 \leq 2 \leq 2$$
$$f(5,15) = \frac{5,15}{4} + \frac{3}{5,15} = 1,87002...$$
$$0,6 \leq 1,87002... \leq 2$$
$$f(2\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3};$$
$$0,6 \leq \sqrt{3} \leq 2$$

Note que todos esses números estão no intervalo desejado, e portanto terminamos.

Com isso, resolvemos um dos problemas mais díficeis da OCM nível 2 desse ano com apenas umas contas bestas. Bem legal, não é? Em geral, podemos resolver esse tipo de questões por cálculo encontrando o intervalo de valores que uma função pode ocupar, dependendo de seu domínio, como fizemos, ou escrevendo o que buscamos como uma função, e usando a técnica de "derivar e igualar a zero". Vejamos mais um exemplo de cálculo para minimização de funções, dessa vez com o segundo método:

Problema 2:

considere uma elipse de semieixos a e b. Queremos inscrever um retângulo nessa elipse. Qual é a área máxima desse retângulo, em função de a e b?

Solução:

Vamos dar uma olhada nos graus de liberdade que temos: primeiro, escolhemos um ponto da elipse. Podemos escolher qualquer um sem qualquer problema. Após isso, escolhemos um segundo ponto e o conectamos ao primeiro, formando o primeiro lado do retângulo. Então, tudo está determinado, pois fazemos as perpendiculares a esse lado passando por cada um desses dois pontos e vemos onde elas se encontram, e torcemos para que sejam em dois pontos a uma mesma distância do primeiro lado, pois caso contrário não teremos um retângulo. é possível provar que esse retângulo só existe se seus lados forem paralelos aos semieixos da elipse, algo que você poderia apenas assumir como verdade, mas eu provarei usando geometria analítica por completude.

Sem perda de generalidade, assumimos que o retângulo é centrado na origem. Sejam $u, v > 0$ as semi-dimensões do retângulo e θ o ângulo de inclinação em relação ao eixo x.

Os vértices do retângulo podem ser escritos como:

$$\vec{r}_{\pm,\pm} = R(\theta)\begin{bmatrix} \pm u \\ \pm v \end{bmatrix}, \quad \text{onde } R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \text{ é a matriz de rotação.}$$

Um vértice genérico após rotação possui coordenadas:

$$x = u\cos\theta - v\sin\theta, \quad y = u\sin\theta + v\cos\theta.$$

Substituindo na equação da elipse, temos:

$$\frac{(u\cos\theta - v\sin\theta)^2}{a^2} + \frac{(u\sin\theta + v\cos\theta)^2}{b^2} = 1.$$

Expandindo os termos:

$$\frac{u^2\cos^2\theta - 2uv\cos\theta\sin\theta + v^2\sin^2\theta}{a^2} + \frac{u^2\sin^2\theta + 2uv\cos\theta\sin\theta + v^2\cos^2\theta}{b^2}.$$

Agrupando:

$$u^2\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{b^2}\right) + v^2\left(\frac{\sin^2\theta}{a^2} + \frac{\cos^2\theta}{b^2}\right) + uv\cdot 2\cos\theta\sin\theta\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right) = 1.$$

Note que ao trocar o sinal de u ou de v, o termo uv muda de sinal, enquanto os termos u^2 e v^2 permanecem os mesmos.

Assim, os quatro vértices do retângulo só satisfarão simultaneamente a equação da elipse se o termo linear em uv for nulo. Isto ocorre se:

$$\cos\theta\sin\theta\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right) = 0.$$

Como assumimos que $a \neq b$, temos $\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \neq 0$. Logo, para o termo ser nulo, deve-se ter:

$$\cos\theta \sin\theta = 0 \Rightarrow \theta \in \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \dots\right\}.$$

Ou seja, o retângulo deve estar alinhado com os eixos coordenados.
A única forma de inscrever um retângulo com vértices sobre uma elipse é:

- o retângulo estar alinhado com os eixos principais da elipse, ou
- a elipse ser um círculo ($a = b$), caso em que qualquer orientação é permitida.

Portanto, provamos que não é possível inscrever um retângulo inclinado em uma elipse com todos os vértices sobre a curva, exceto se ele estiver alinhado com os eixos ou a elipse for um círculo. Agora, sendo x e y as semi-dimensões do retângulo, como os lados são paralelos aos eixos, podemos dizer que suas coordenadas são $(\pm x, \pm y)$, e queremos maximizar $4xy$. Usando a equação da elipse no vértice (x, y), temos:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y = \frac{b\sqrt{a^2 - x^2}}{a}$$

A área então será:

$$4xy = \frac{4bx\sqrt{a^2 - x^2}}{a}$$

Maximizar isso equivale a maximizar $x\sqrt{a^2 - x^2}$.
derivando e igualando a zero, obtemos:

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

Assim, a área será $4xy = 2ab$, e terminamos.

Podemos resolver esses e muitos outros problemas e máximos-mínimos usando apenas as derivadas em sua forma mais simples, mas inevitavelmente chegaremos a um ponto onde isso não basta. No caso das olimpíadas, isso muitas vezes acontece quando desejamos achar os pontos críticos de uma função com 2, 3 ou mais variáveis, pois como podemos derivar e igualar a zero quando consideramos 3 variáveis diferentes? esse é o temido cálculo multivariável. Antes de continuarmos, porém, gostaria de fechar o conteúdo de derivadas em uma variável com um resultado muito impressionante, que possibilita escrever virtualmente qualquer função como uma polinomial, as **Séries de Taylor.**

2.3 Séries de Taylor

Pense em uma função arbitrária $f(x)$. Desejamos construir um polinômio $P(x)$ que seja equivalente a ela. Como podemos fazer isso? Bom, inicialmente, podemos tentar aproximar essa função com termos iniciais de grau baixo, e melhorar cada vez mais essa aproximação acrescentando termos de grau cada vez maior. Explicarei isso mais a fundo a seguir.

Bom, comecemos escolhendo um ponto ao redor do qual faremos essa aproximação, chame-o de x_0. O mínimo que essa aproximação deve fazer é satisfazer $P(x_0) = f(x_0)$, logo fixamos o termo de grau 0 para ser x_0. Para a função e^x, por exemplo, isso ficaria assim:

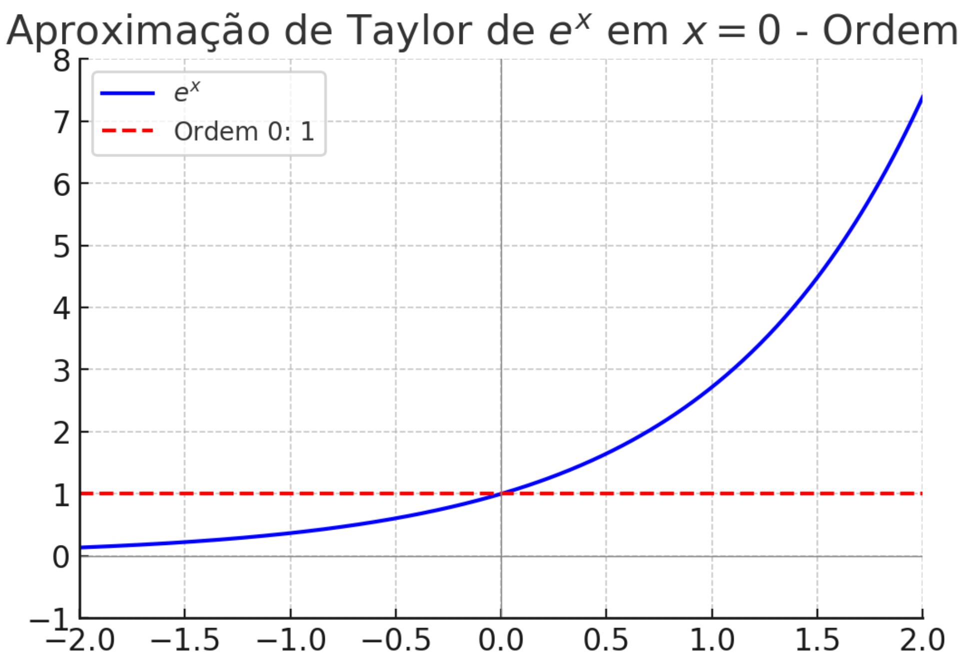

Figura 1: Aproximação de Taylor de ordem 0: 1

Agora, queremos que a taxa de variação da função em x_0) seja igual à do polinômio, logo $P'(x_0) = f'(x_0)$. Isso pode ser feito adicionando um termo $f'(x_0) * (x - x_0)$ ao polinômio. Notavelmente, esse termo zera ao calcularmos P em $x = x_0$, então o polinômio ainda satisfaz a primeira condição. Agora, ao derivarmos P, obtemos apenas $f'(x_0)$, pois o resto é constante em x, logo satisfazemos a segunda condição. O resultado disso será:

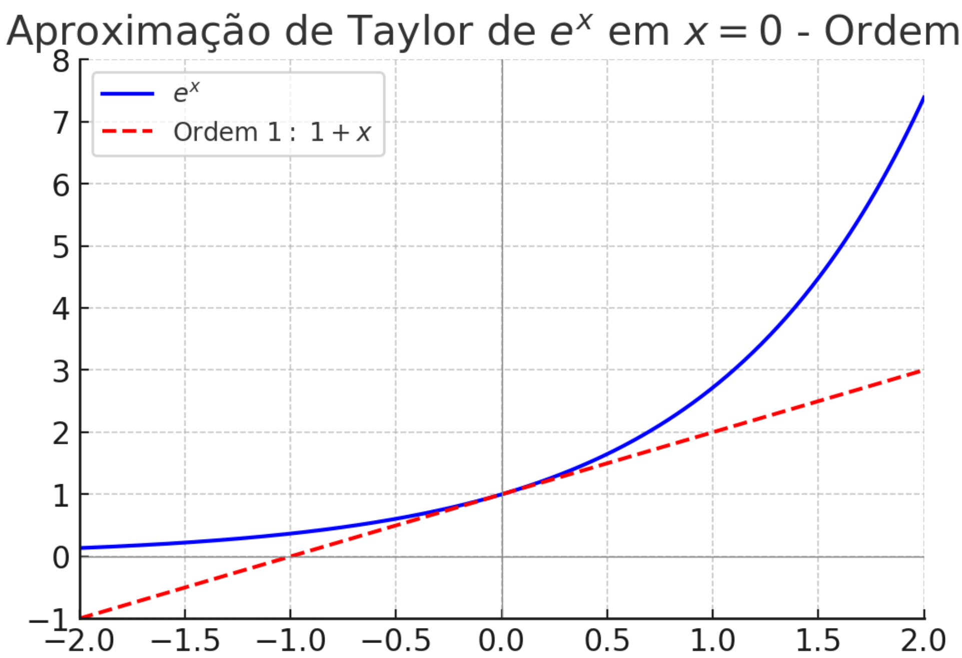

Figura 2: Aproximação de Taylor de ordem 1: $1 + x$

Podemos formar quantas condições quisermos dessa forma (a segunda derivada das duas em x_0

deve ser igual, assim como a terceira, a quarta, a quinta...), e com cada condição satisfeita nosso polinômio se comporta mais e mais com a função inicial. Podemos adicionar um termo para que a enésima derivada seja igual, que será:

$$\frac{\frac{d^n f}{dx^n}(x_0) * (x - x_0)^n}{n!}$$

Deixarei para você verificar o porquê da enésima derivada desse termo ser a enésima derivada de $f(x)$, aplicada em x_0, assim como a razão para ela ser 0 em todos os outros pontos. Com isso, podemos formar aproximações cada vez melhores, como evidenciado abaixo, com exemplos do polinômio em graus 2, 3 e 6:

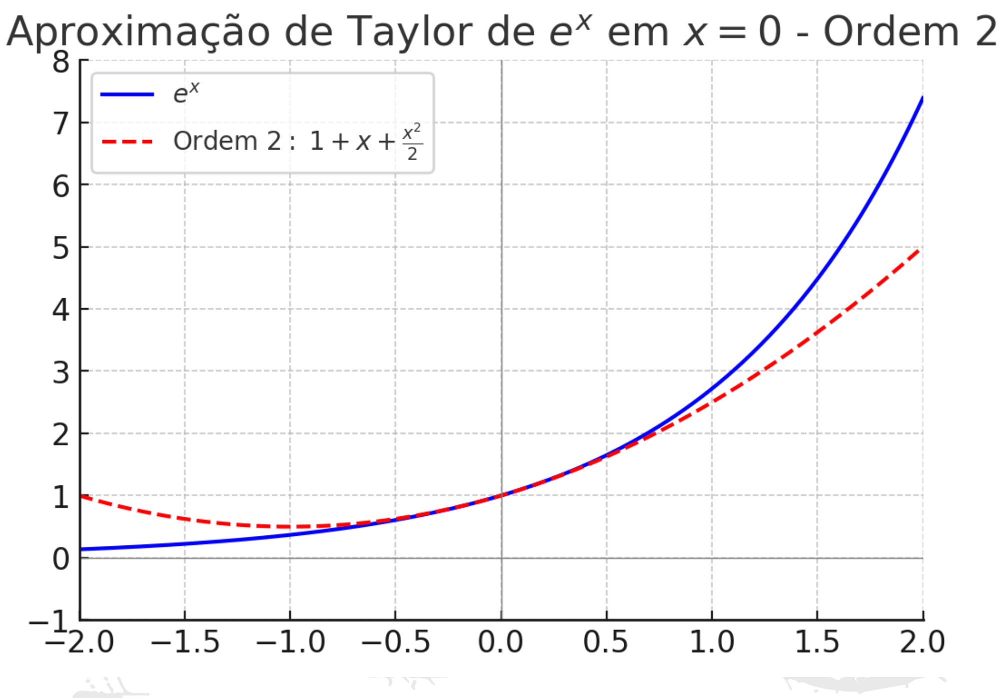

Figura 3: Aproximação de Taylor de ordem 2: $1 + x + \frac{x^2}{2}$

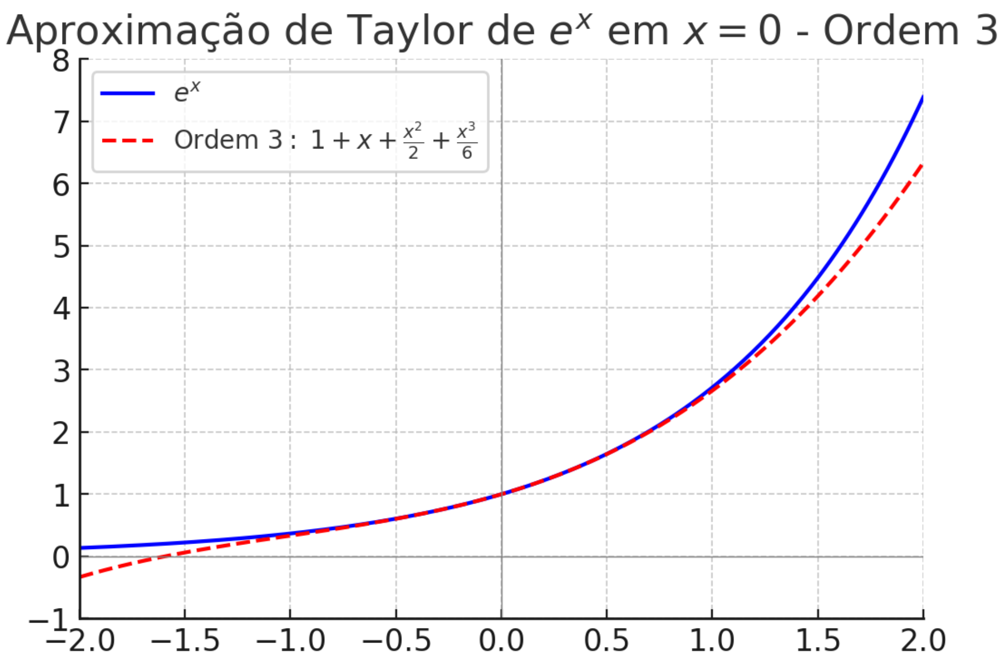

Figura 4: Aproximação de Taylor de ordem 3: $1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$

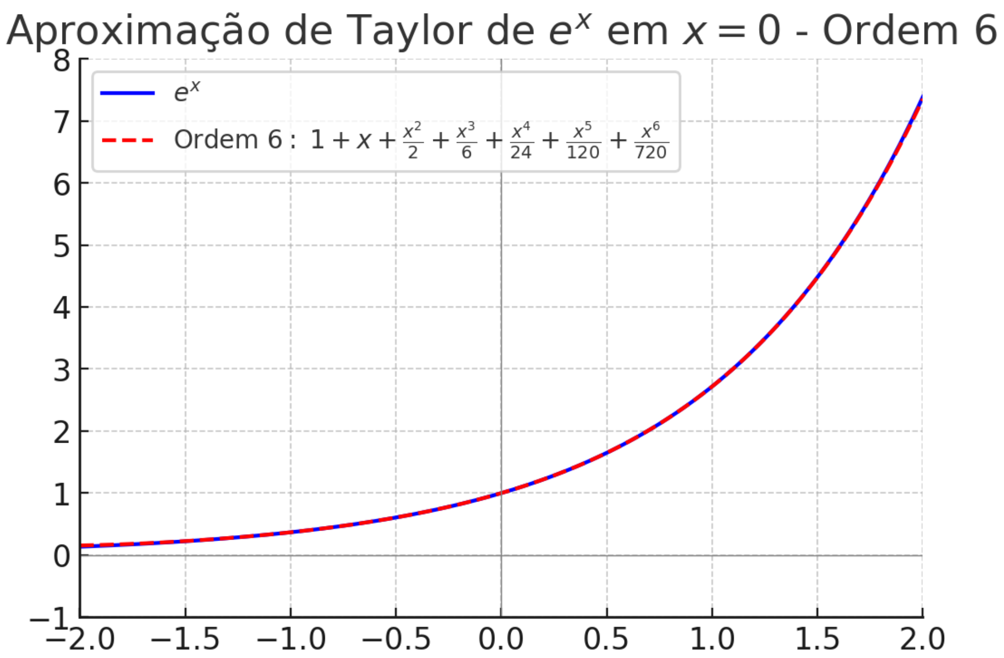

Figura 5: Aproximação de Taylor de ordem 6: $1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{120}+\frac{x^6}{720}$

Como podemos ver, a aproximação em grau 6 já é incrivelmente boa, mas ainda erra para pontos muito distantes do ponto de referência... Como você resolveria isso? Se você disse "podemos fazer um polinômio de grau infinito!"Você estaria absolutamente correto! No infinito, o polinômio representará perfeitamente a função em todos os pontos, caracterizando assim a **Série de Taylor**, cuja fórmula é apresentada abaixo:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Podemos usar essa fórmula para diversas situações, e diversos problemas são resolvidos notando que um somatório infinito é apenas a expansão em série de Taylor de uma função simples, ou fazer o contrário, expandindo uma função mais chata de se trabalhar por um polinômio, no qual muitas vezes podemos desprezar os termos de ordem maior se apenas nos importamos com valores de x bem próximos ao valor de referência. Como um pequeno adendo, chamamos uma Série de Taylor centrada na origem $x = 0$ A seguir, colocarei alguns problemas para você treinar isso:

Problemas sobre Séries de Taylor

2.3.1 Problemas

1. Reescreva a seguinte série como a função original correspondente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

2. Reescreva a seguinte série como a função original correspondente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

3. Expanda a função abaixo em série de Taylor centrada em $a = 0$ até a ordem 4:

$$f(x) = \ln(1+x)$$

4. Expanda a função abaixo em série de Taylor centrada em $a = 0$ até a ordem 5:

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

2.3.2 Soluções

Solução: Esta é a série de Taylor da função cosseno centrada em $x = 0$. Portanto:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = \cos(x)$$

Solução: Esta é a série de Taylor da função logaritmo natural $\ln(1-x)$, derivada e com sinal ajustado. De fato:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x), \quad \text{para } |x| < 1$$

Solução: A expansão da função $\ln(1+x)$ em torno de $x = 0$ é dada por:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

Portanto, até a ordem 4:

$$\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$$

Solução: Podemos escrever a função como uma série geométrica modificada:

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, \quad \text{para } |x| < 1$$

Portanto, até a ordem 5 (ou seja, até o termo x^4):

$$\frac{1}{1+x^2} \approx 1 - x^2 + x^4$$

E terminamos! Agora, vamos para a próxima fase nesse mundo do cálculo, o cálculo multivariável!

3 Cálculo multivariável

3.1 Introdução 2.0

Vou começar esse capítulo como eu geralmente começo quando introduzo um novo conceito: imagine uma função f... Dessa vez, no entanto, com a diferença de que essa função possui N variáveis: X_1, X_2, X_3.... Como fica o gráfico dessa função? podemos tentar colocar novos eixos, um eixo z, além do x e do y... Mas isso não nos ajuda ao passarmos de 2 variáveis. Para escrever tal gráfico com mais de 2 variáveis, precisaríamos de um gráfico 4-dimensional, o que não conseguimos nem compreender como meros seres humanos que somos. Não apenas isso, a situação apenas piora conforme aumentamos o número de variáveis. Mesmo assim, não podemos permitir que nossos limites físicos atrapalhem os objetivos de nossa mente, e portanto iremos estudar essas funções de qualquer jeito!

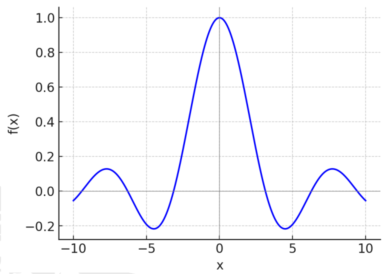

Figura 6: Gráfico 1: $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

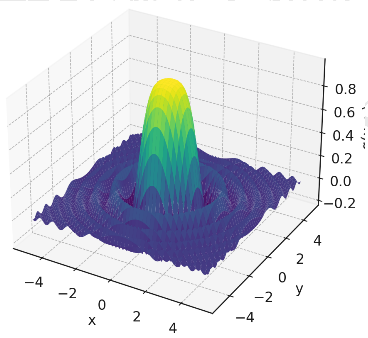

Figura 7: Gráfico 2: $g(x,y) = \frac{\sin x^2+y^2}{x^2+y^2}$

?

Figura 8: "Gráfico"3: uma função h tridimensional

3.2 A volta dos que não foram

Vamos começar nosso estudo dessas funções adaptando as ferramentas que desenvolvemos em uma dimensão para nossa nova situação. Comecemos pelas derivadas, já que elas são a essência do cálculo em uma dimensão e, portanto, devem ser importantes para esse novo universo que estamos explorando.

Daqui para frente, ter um conhecimento prévio de vetores se mostrará muito importante para facilitar o seu entendimento desse material. Nada muito avançado, apenas ter uma boa capacidade de visualização para compreender o que está acontecendo e não ficar perdido no meio do caminho.

3.2.1 Derivadas parciais

Pense no seguinte: temos várias variáveis a considerar, então como podemos definir uma derivada? Uma "tangente ao gráfico"? Surpreendentemente, isso não é uma tarefa tão complexa, pois podemos apenas considerar um eixo do gráfico (o eixo x_1, por exemplo), e calcular a reta tangente ao gráfico no ponto desejado, considerando apenas aquele eixo. Fazemos isso para cada eixo, e determinamos a "tangente ao gráfico"como sendo o hiper-espaço delimitado por esse conjunto de retas, que são normais uma à outra pois os eixos de um gráfico são definidos assim. Como a derivada é definida como a tangente ao gráfico em um determinado ponto, descobrimos como definir a derivada! Agora, porém, nos deparamos com um novo problema... Como descrevemos isso formal e quantitativamente? Pense um pouco sobre isso antes de ler a resposta.

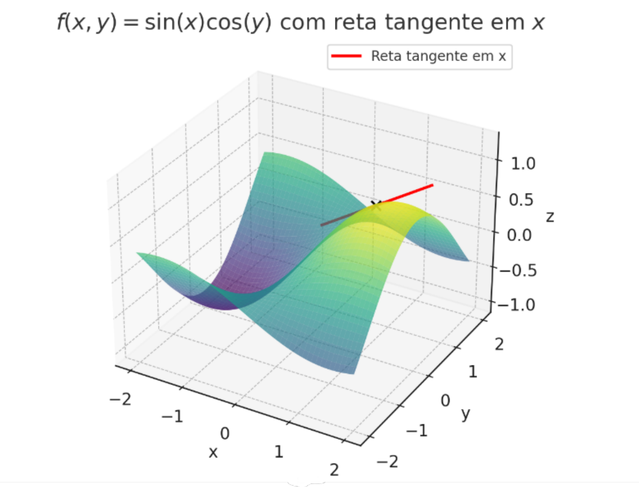

Figura 9: Gráfico 4: fixando um eixo e calculando a tangente naquele ponto

Bom, ao olharmos apenas para um eixo do gráfico, isto é, fixando um eixo e variando apenas a variável correspondente, sem mexer com as outras, é como se estivéssemos avaliando uma função de apenas uma variável, enquanto as outras se tornam meras constantes. Por exemplo, na função $f(x,y,z) = x^2 - yz + 3$, podemos fixar o eixo x em $y = 10, z = 7$, teremos:

$$f(x) = x^2 - 67,$$

Uma função de apenas uma variável. Agora, podemos derivar essa função por x, obtendo a equação da reta tangente ao gráfico naquele eixo quando $y = 10, z = 7$. Podemos fazer isso para os eixos y e z também, agora escolhendo um valor para x e usando os valores pré-fixados de y e z, obtendo então um conjunto de equações que nos fornecem as inclinações da tangente em relação ao eixo x, y e z. A partir daqui, sempre me referenciarei a isso como "a tangente", tendo em vista que outras palavras deixam de representar correta ou intuitivamente esse conceito quando aumentamos as dimensões. No exemplo que forneci, escolhendo $x = 3$, teríamos:

$$f(y) = -7y + 6; f(z) = -10z + 6.$$

Podemos derivar cada uma dessas em relação à variável correspondente, obtendo, para $f(x), f(y)$ e $f(z)$, 6, -7 e -10, que são as tangentes dos ângulos de inclinação da tangente. Chamamos essa operação que fizemos para cada variável de **Derivada Parcial**, denotada $\frac{\partial f}{\partial x}$, que carrega o mesmo sentido da derivada, porém apenas para uma variável dentre as variáveis da função. Em resumo, você simplesmente trata as outras variáveis como constantes (como se fosse um π ou outra constante matemática) e deriva em relação a variável escolhida. Seguem alguns exemplos para treinar(por ser só mais do mesmo, apenas calcular as derivadas, vou colocar mais problemas, e apenas as respostas certas no final):

3.2.2 Questões para treinar

1. Seja $f(x,y,z,u,v) = xyz + \sin(u^2 + v)$. Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial z}$.

2. Seja $g(a,b,c,d,e) = a^2b + \ln(cd + e^2)$. Calcule $\dfrac{\partial g}{\partial e}$.

3. Seja $h(x,y,z,w,t) = e^{x+y}\cos(z) + wt^3$. Calcule $\dfrac{\partial h}{\partial x}$.

4. Seja $F(p,q,r,s,t,u) = pq + r^2s - \arctan(tu)$. Calcule $\dfrac{\partial F}{\partial s}$.

5. Seja $H(m,n,o,p,q) = \dfrac{m^2 + n^2}{o + pq}$. Calcule $\dfrac{\partial H}{\partial q}$.

Gabarito

1. $\frac{\partial f}{\partial z} = xy$
2. $\frac{\partial g}{\partial e} = \frac{2e}{cd+e^2}$
3. $\frac{\partial h}{\partial x} = e^{x+y}\cos(z)$
4. $\frac{\partial F}{\partial s} = r^2$
5. $\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{(m^2+n^2)p}{(o+pq)^2}$

Com isso, encontramos uma versão parecida, embora um pouco mais chata e menos poderosa, das nossas derivadas! Agora podemos seguir para a próxima parte, onde faremos um pouco mais de desenvolvimento matemático para então encontrar a operação que nos será mais útil para esse tipo de análise com várias dimensões, o **Gradiente**. Antes disso, porém, buscaremos a **Série de Taylor multivariável.** E os **Limites multivariáveis**

3.3 Séries de Taylor 2: O retorno

Você ainda se lembra da ideia que usamos para montar a série de Taylor? Caso tenha esquecido, nós escolhemos um ponto de referência para fazer nossa aproximação e, a partir dele, escolhemos o termo de cada ordem i forçando uma condição da forma "A i-ésima derivada do polinômio deve ser igual à da função", obtendo assim cada termo dessa série infinita.

Para expandir isso para mais variáveis, podemos usar a mesma ideia, e usar como condições que a enésima derivada parcial em relação à cada variável das duas deve ser igual, além das derivadas cruzadas. Assim, obtendo, pelas mesmas contas, a seguinte expressão para a série de Taylor multivariável:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \sum_{(k=0)}^{\infty} \sum_{\substack{(a_1+a_2+\cdots+a_N=k \\ a_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ \forall\ i)}} \frac{\partial^k f}{\partial^{a_1}x_1 \partial^{a_2}x_2 \cdots \partial^{a_N}x_N} \cdot \prod_{i=1}^{N} \frac{(x_i - b_i)^{a_i}}{a_i!}$$

Aqui, usei a notação de que $\frac{\partial^k f}{\partial^{a_1}x_1 \partial^{a_2}x_2 \cdots \partial^{a_N}x_N}$ representa a operação de derivar parcialmente a função em relação à variável x_i, a_i vezes, para cada i entre 1 e N, e chamamos de b_i o valor de referência para a variável x_i

Onde cada X_i representa uma das N variáveis da função f, e cada a_i representa a i-ésima coordenada do ponto de referência.

Essa ferramenta não será tão útil em olimpíadas de matemática, e aparece mais em olimpíadas de física, então não se preocupe em memorizá-la, pois seu uso se dá principalmente para aproximar funções, o que não condiz com o rigor matemático requisitado para olimpíadas de matemática avançadas. Por isso, não dedicarei muita atenção a ela, apenas a apresentando para poder obter a expressão do gradiente. Seguem alguns problemas para você praticar:

3.3.1 Indagações

1. Expanda em série de Taylor até a ordem 2 a função

$$f(x,y) = e^{x+y}$$

centrada no ponto $(0,0)$.

2. Determine a aproximação de ordem 2 da função

$$f(x,y) = \ln(1 + x^2 + y^2)$$

no ponto $(0,0)$. Em seguida, use a aproximação para estimar $f(0.1, -0.1)$ e, usando uma calculadora ou algum outro método, verifique se a aproximação foi precisa ou não.

3. Seja

$$f(x,y) = x^2y + xy^2$$

Calcule o polinômio de Taylor de ordem 3 centrado em $(0,0)$.

4. Encontre a série de Taylor até ordem 2 da função

$$f(x,y) = \sin(x)\cos(y)$$

centrada no ponto $(x_0, y_0) = (0,0)$.

3.3.2 Gabarito

1. $f(x,y) \approx 1 + (x+y) + \frac{1}{2}(x+y)^2$

2. $f(x,y) \approx x^2 + y^2 - \frac{1}{2}(x^2+y^2)^2$, Logo, $f(0.1,-0.1) \approx 0.02 - 0.0002 = 0.0198$. Testando a aproximação, vemos que o valor exato é $f(0.1,-0.1) = 0.019802627...$ Assim, confirmamos que nossa aproximação foi precisa, errando por menos de $1,5\%$ do valor correto!

3. Note que $f(x,y)$ já é um polinômio, então "escrever essa função como um polnômio", que é o objetivo da série de Taylor, é uma tarefa que podemos fazer sem precisar operar aquela fórmula, pois sabemos que $f(x,y)$ é a própria série de Taylor, e essa é nossa resposta.

4. $f(x,y) \approx x - \frac{x^3}{6} - \frac{1}{2}xy^2$

Agora que introduzimos a série de Taylor multivariável, podemos passar para a próxima ferramenta que será importante, os **Limites multivariáveis**.

3.4 Limites multiváriaveis

Você se lembra dos limites? Foi onde nossa aventura por esse universo do cálculo começou de fato, e agora voltaremos a isso. Tente pensar um pouco sobre o que você faria se eu lhe perguntasse "qual o valor de $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2+y^2+z^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+1}-1}$?". Veja que agora não temos apenas dois caminhos para se calcular o limite, como antes. Dessa vez, temos infinitos caminhos. Como podemos avaliar esse limite?

Calcular limites desse tipo pode ser complicado, principalmente na parte de provar que o limite existe. A definição de um limite multivariável é análoga à definição para uma variável, dizendo:

Seja $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, e seja $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ um ponto do domínio de f. Dizemos que o limite de $f(\vec{x})$ quando $\vec{x} \to \vec{a}$ é igual a $L \in \mathbb{R}$, e escrevemos

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x}) = L,$$

se, e somente se,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tal que } 0 < \|\vec{x}-\vec{a}\| < \delta \Rightarrow |f(\vec{x}) - L| < \varepsilon.$$

Devemos, portanto, provar duas coisas para calcular o valor de um limite: que ele existe(geralmente a parte mais difícil) e então calculá-lo. Calcular um limite é a parte mais fácil, dado que ele existe, pois podemos escolher um caminho qualquer para se aproximar do ponto desejado, e portanto podemos apenas fixar todas as variáveis menos uma delas, e então o limite se torna um limite de apenas uma variável, que você sabe resolver.

3.4.1 Provar que um limite multivariável existe

Para isso, existem alguns métodos mais utilizados, listados abaixo:

- Teorema do Confronto(ou do sanduíche)

  A ideia dessa técnica é se aproveitar da definição de limite e mostrar que a função está sempre entre um valor L e uma função auxiliar cujo limite é conhecido por você e igual a L, logo como $L \leq \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) \leq L \to \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$.

  Exemplo:

  $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$$

  Solução:

  Sabemos que:

  $$0 \leq \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \leq \frac{x^2y^2}{\min(x^2,y^2)} = \max(x^2,y^2) \leq x^2+y^2 = \|\vec{x}\|^2$$

  Como $\|\vec{x}\|^2 \to 0$ quando $(x,y) \to (0,0)$, segue do Teorema do Confronto que:

  $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = 0$$

- Substituição de Variáveis

  Essa ideia coniste em realizar uma troca de variáveis para deixar o limite com apenas uma variável, que nós sabemos resolver.

  Exemplo:

  $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x-y}$$

  Solução:

  Tome $u = x-y$, $v = x+y$. Então:

  $$x^2-y^2 = uv$$

  Logo:

  $$\frac{x^2-y^2}{x-y} = \frac{uv}{u} = v \to 0 \quad \text{quando } u,v \to 0$$

  Portanto, o limite é 0.

Esses dois métodos são os principais para se provar que os limites existem. Com esses dois métodos, é possível resolver efetivamente qualquer limite, caso ele exista. Para provar que um limite não existe, eu sinto em lhe informar que desconheço qualquer método definitivo que garanta que você provará isso, mas posso lhe mostrar um método de teste e erro que geralmente é suficiente.

A ideia de provar a inexistência de um limite é semelhante à que usamos no primeiro material: mostrar que, ao nos aproximarmos do valor desejado por um caminho específico, obtemos um valor, enquanto ao escolhermos outro caminho, obtemos uma resposta diferente, obtendo um absurdo. O problema é que, embora com uma variável pudéssemos apenas testar ambas as possibilidades e chegar na conclusão correta, agora que temos múltiplas variáveis, existem infinitos caminhos.

Escolher um "caminho"equivale a escrever todas as outras variáveis como função de uma delas, obtendo um limite de uma variável que é solucionável. A substituição que mais poderá lhe ajudar é da forma: $X_i = m_i X_1^{K_i} \forall i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, onde m_i e K_i são parâmetros arbitrários. A vantagem dessa substituição é que se você obter um resultado dependente de ao menos um desses parâmetros ao calcular o limite de uma variável que surge, você sabe que o limite não existe, pois poderíamos alterar os parâmetros, isto é, escolher outro caminho, e obter um resultado diferente.

Embora essa substituição resolverá muitos desses limites, é possível que você precise usar outra para resolver, mas a ideia segue a mesma, deixar cada variável em relação da variável inicial e certos parâmetros, e verificar se a resposta depende desses parâmetros.

Em resumo, quando você se deparar com um desses limites, você deve primeiro tentar resolvê-lo, assumindo que ele existe. Caso você não esteja conseguindo de jeito nenhum, tente provar que ele não existe buscando dois caminhos que dão resultados diferentes.

Com isso explicado, não se preocupe tanto com a incerteza por trás da solução de um limite, pois é extremamente raro que você se depare com um desses em um problema de olimpíada, e se você encontrar um, ele provavelmente será resolvido pelos métodos que lhe expliquei, afinal, não faz muito sentido pedir para você calcular um limite que não possui resposta no âmbito de uma olimpíada de matemática para alunos de ensino médio ou abaixo. Agora, com as ferramentas que desenvolvemos anteriormente, podemos partir para o conceito de gradiente!

3.5 Operadores diferenciais: o gradiente

Imagine uma função arbitrária de N variáveis $f(x_1, x_2 ... x_N) = f(\vec{l})$. Eu então lhe pergunto: quanto essa função aumenta se eu somar ao vetor resultante dessas variáveis um vetor infinitesimal $\Delta\vec{l}$? A princípio, essa pergunta não faz sentido, pois você não especificou como você vai variá-las. Você poderia, por exemplo, dizer que $\Delta\vec{l} = \Delta l\hat{x}_1$, ou igual a $\Delta l\hat{x}_2 \cdots$ e cada uma dessas direções me daria uma resposta diferente, logo essa pergunta não faz sentido. E se eu lhe especificar como o vetor $\Delta\vec{l}$ é? Agora a situação mudou, não é mesmo? Digamos que:

$$\Delta\vec{l} = \sum_{i=0}^{N} r_i \Delta l \hat{x}_i = \sum_{i=0}^{N} \Delta x_i \hat{x}_i,$$

Onde $\sum_{i=0}^{\infty} r_i^2 = 1$. Agora, podemos escolher como caminho andar de $f(\vec{l})$ para $f(\vec{l} + \Delta\vec{l})$ linearmente na direção do vetor unitário $\hat{\Delta l} = \frac{\vec{\Delta l}}{\Delta l}$. Agora que temos um caminho definido, podemos usar a definição de derivada, agora que estamos em um caminho linear, obtendo:

$$\frac{df}{dl} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{f(\vec{l} + \vec{\Delta l}) - f(\vec{l})}{\Delta l}$$

Podemos, agora, usar o fato que Δl vai a zero para nos permitir aproximar $f(\vec{l} + \vec{\Delta l})$ como sua série de Taylor em torno de $f(\vec{l})$ expandida apenas até a primeira ordem, obtendo:

$$f(\vec{l} + \vec{\Delta l}) \approx f(\vec{l}) + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i} r_i \Delta l$$

Note, agora, que os $f(\vec{l})$ irão se cancelar no numerador, e todos os outros termos estão sendo multiplicados por Δl, logo o Δl no denominador irá se cancelar também, e o resto sai do limite, sobrando:

$$\frac{df}{dl} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i} r_i$$

Agora vem o pulo do gato: essa expressão lhe lembra alguma operação vetorial? A resposta é sim! Lembra o produto escalar de dois vetores, nos permitindo escrever:

$$\frac{df}{dl} = (\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i} \hat{x}_i) \cdot (\sum_{i=1}^{N} r_i \hat{x}_i)$$

E nasceu o gradiente! Definimos o gradiente, denotado por $\vec{\nabla} f$ como $\vec{\nabla} f = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i} \hat{x}_i$, que depende apenas da função, e dado que $\sum_{i=1}^{N} r_i \hat{x}_i = \hat{r}$, por definição, obtemos:

$$\frac{df}{dl} = \vec{\nabla} f \cdot \hat{r}$$

E conseguimos responder à pergunta inicial, pois $df = \vec{\nabla} f \cdot (dl * \hat{r}) = \vec{\nabla} f \cdot \vec{dl}$

O importante que obtivemos disso é a expressão do gradiente, que é dada por:

$$\vec{\nabla} f = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

Como um último detalhe, note que pela definição do produto escalar, se θ é o ângulo entre o vetor do gradiente e o vetor unitário $\hat{r}$, então o valor de $\frac{df}{dl}$ será $|\vec{\nabla} f|\cos\theta$, e, portanto, para maximizar a variação da função, $\hat{r}$ deve apontar na direção do gradiente.

3.5.1 Aplicações do gradiente

Bom, agora você pode estar se perguntando como que isso nos ajuda, e eu lhe respondo: máximos e mínimos multivariáveis! Pense na equação que obtemos relacionando o gradiente à derivada direcional, $\frac{df}{dl} = \vec{\nabla} f \cdot \hat{r}$. Quando estivermos em um ponto de máximo ou mínimo, a derivada será zero para todos os possíveis $\vec{dl}$, logo isso ocorre apenas se o gradiente for zero, pois ele não depende de $\vec{dl}$. Agora, como o gradiente é um vetor, isso quer dizer que cada uma de suas componentes é nula, nos fornecendo um sistema de equações que, ao ser resolvido, nos fornecerá as coordenadas dos máximos/mínimos locais!

Essa ideia, embora simples, é extremamente poderosa, e permite resolver diversos problemas de otimização sem precisar nem pensar, bastando escrever que o gradiente é zero, resolver o sistema, e ficar feliz! Vou colocar a seguir exemplos de problemas de otimização de funções e soluções para você treinar.

3.5.2 Problemas para praticar

- Considere a função:

$$f(x,y) = x^3 - 3xy^2$$

  Encontre todos os seus pontos críticos, e os classifique.

- Prove que no intervalo $[-1,+1]^3$, a função:

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xyz \geq 0$$

- Avalie e classifique os pontos críticos da função:

$$f(x,y,z) = \sin x \cos y + e^{-z^2}$$

3.5.3 Soluções

- Considere a função:

$$f(x,y) = x^3 - 3xy^2$$

  Gradiente:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(3x^2 - 3y^2,\ -6xy\right)$$

  Anulando o gradiente:

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y^2 = 0 \\ -6xy = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = y^2 \\ xy = 0 \end{cases} \Rightarrow (x,y) = (0,0)$$

  Classificação: A função ao longo de $y = 0$ é $f(x,0) = x^3$, que muda de sinal ao redor de $x = 0$. Ao longo de $x = 0$, temos $f(0,y) = 0$. Portanto, o ponto $(0,0)$ é um **ponto de sela**.

- Prove que no intervalo $[-1,1]^3$, a função:

$$f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-xyz \geq 0$$

Gradiente:

$$\nabla f = (2x-yz,\ 2y-xz,\ 2z-xy)$$

Anulando o gradiente:

$$\begin{cases} 2x = yz \\ 2y = xz \\ 2z = xy \end{cases} \Rightarrow xyz(xyz-8) = 0 \Rightarrow xyz = 0$$

Um ponto crítico é $(0,0,0)$, com $f=0$. Como temos apenas um ponto crítico no intervalo, basta avaliar nos limites do intervalo, isto é, nos lados do cubo $[-1,1]^3$, onde temos $f \geq 0$(verifique isso por conta própria). Portanto, o menor valor é 0, e:

$$f(x,y,z) \geq 0 \text{ em todo o intervalo}$$

- Avalie a função:

$$f(x,y,z) = \sin x \cos y + e^{-z^2}$$

Gradiente:

$$\nabla f = \left(\cos x \cos y,\ -\sin x \sin y,\ -2ze^{-z^2}\right)$$

Pontos críticos:

$$\cos x \cos y = 0, \quad \sin x \sin y = 0, \quad z = 0$$

Solução 1: $x = \frac{(2k+1)\pi}{2}$, $y = \frac{n\pi}{2}$, $z = 0 \Rightarrow f = 1+1 = 2$ ou $f = (-1)+1 = 0$.

Solução 2: $x = \frac{n\pi}{2}$, $y = \frac{(2k+1)\pi}{2}$, $z = 0 \Rightarrow f = 0+1 = 1$.

Classificação:

$$\left(\frac{(2k+1)\pi}{2},\ \frac{n\pi}{2},\ 0\right): \text{máximo local caso } \sin x \cos y = 1\text{, ponto de sela caso contrário.}$$

$$\left(\frac{n\pi}{2},\ \frac{(2k+1)\pi}{2},\ 0\right): \text{ponto de sela, pois aumenta de valor ao variarmos x ou y, mas diminui ao variar z.}$$

Acredito que com esses exemplos você pôde ter um vislumbre de como o gradiente nos ajuda a resolver problemas desse tipo sem nem precisar pensar no que estamos fazendo, ao invés de perder um bom tempo buscando alguma desigualdade ou algo do tipo que possa resolvê-lo mais facilmente.

4 Comentário final

Com isso, terminamos finalmente esse material de cálculo! Espero que tenha se divertido e aprendido algo novo no processo, boa sorte em seus futuros estudos, e até mais!