Manipulações I

Roberto César Cucharero Peregrina

1 Fatoração Avançada

1.1 Fatoração de polinômios

Fatoração de polinômios é uma ferramenta poderosa e essencial no arsenal de qualquer estudante em preparo para olímpiadas de matemática. Dominar técnicas de fatoração não apenas simplifica expressões complexas , mas também revela estruturas ocultas que podem ser exploradas para resolver problemas desafiadores. Neste texto, exploraremnos estratégias eficientes e truques criativos para fatorar polinômios, abordando desde casos clássicos, como diferença de quadrados e trinômios quadrados perfeitos, até métodos mais avançados, como o uso de raízes racionais e fatoração por agrupamento . Prepare-se para desvendar os segredos dessa técnica e elevar seu desempenho em competições matemáticas”””

1.1.1 Exemplo 1 : AHSME-1954

Os fatores de $x^4 + 64so$:
a) $(x^2+8)^2$
b) $(x^2+8)(x^2-8)$
c) $(x^2+2x+4)(x^2-8x+16)$
d) $(x^2-4x+8)(x^2-4x-8)$
e) $(x^2+4x+8)(x^2-4x+8)$
Resolução
Observe que $x^4 = (x^2)^2$ e $64 = 8^2$. Podemos perceber que se somarmos o dobro do produto do primeiro termo sem estar ao quadrado com o segundo termo formamos um quadrado perfeito. Vamos experimentar esta técnica de **somar e subtrair termos** para buscar a fatoração:
$(x^2)^2 + 8^2 + 2x^2.8 - 2x^2.8$
Fatorando o trinômio do quadrado perfeito :
$(x^2+8)^2 - 16x^2$, aplicando o caso de fatoração da diferença de dois quadrados :
$(x^2+8-4x)(x^2+8+4x)$, que organizando fica:
$(x^2-4x+8)(x^2+4x+8) = (x^2+4x+8)(x^2-4x+8)$

1.1.2 Exemplo 2 : Fatoração de $a^3+b^3+c^3-3abc$ (Identidade de Gauss)

Reconhecemos como uma expressão cúbica $a^3+b^3+c^3-3abc$ como integrantes de uma identidade algébrica.
$(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3.(a+b+c)(ab+ac+bc)-3abc$
$(a+b+c)^2(a+b+c) = a^3+b^3+c^3+3.(a+b+c)(ab+ac+bc)$
$a^3+b^3+c^3 = (a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc)(a+b+c)-3(a+b+c)(ab+ac+bc)+3abc$
$a^3+b^3+c^3 = (a+b+c)[a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc-3(ab+ac+bc)]+3abc$
$a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$

1.2 Identidades Algébricas

As identidades algébricas são ferramentas poderosas e fundamentais para resolver problemas desafiadores em competições matemáticas, como as olímpiadas. Elas permitem simplificar expressões , fatorar polinômios e estabelecer relações entre variáveis de forma eficiente. Dominar essas identidades não só agiliza os cálculos, mas também abre portas para soluções criativas e elegantes. Neste texto , exploraremos como a manipulação algébrica, aliada ao uso estratégico de identidades, pode ser aplicada para resolver problemas complexos, destacando sua importância no desenvolvimento do raciocínio matemático necessário para competições de alto nível.

1.2.1 Exemplo 3 : OBM XXXI - 2ªFase - Nível 2

Determine ax^5+by^5 se os números reais a,b,x e y satisfazem as equações $ax+by=1$, $ax^2+by^2=2$, $ax^3+by^3=5$, ax^4+by^4.

Solução Queremos ax^5+by^5

Inicialmente temos $ax+by=1$. Multiplicando essa expressão por $x+y$ obtemos ;

$ax^2+axy+bxy+by^2=x+y$

$2+(a+b)(xy)=x+y$

Vamos fazer o mesmo processo para todas as expressões :

$ax^2+by^2=2$

$ax^3+ax^2y+by^2x+bx^3=2.(x+y)$

$5+xy(ax+by)=2.(x+y)$ (1)

$ax^3+by^3=5$

$ax^4+ax^3y+by^3x+bx^4=5.(x+y)$

$6+2xy=5(x+y)$ (2)

$ax^4+by^4=6$

$ax^5+ax^4y+by^4x+bx^5=6.(x+y)$

De (1) e (2) podemos montar o seguinte sistema : $\begin{cases} 6 & +2xy & =5.(x+y) \\ 5 & +xy & =2(x+y) \end{cases}$

Resolvendo o sistema obtemos :

$x+y=-4$ e $xy=-13$. Portanto : $ax^5+ax^4y+by^4x+bx^5=6.(x+y)$, logo $ax^5+by^5=6.(-4)+5.13=41$

1.2.2 Exemplo 4 :Identidade de Sophie Germain

Identidade muito útil em olímpiadas internacionais com uso também em congruência modular

$a^4+4b^4=(a^2+2ab+2b^2)(a^2-2ab+2b^2)$ **Demonstração**:

$a^4+4b^4=a^4+4b^4+4a^2b^2-4a^2b^2$

Aplicando a fatoração do trinômio do quadrado perfeito

$a^4+4b^4=(a^2+2b^2)^2-4a^2b^2$

Utilizando diferença de quadrados :

$a^4+4b^4=(a^2+2b^2+2ab)(a^2+2b^2-2ab)$

1.3 Fatoração por agrupamento

Ferramenta poderosa e versátil usada em olímpiadas para simplificar expressões algébricas e resolver equação de forma eficiente. Úti para lidar com polinômios de quatro ou mais termos , onde não é possível aplicar diretamente métodos de fatoração.

Agrupa-se os termos do polinômio em pares ou grupos menores, de modo que cada grupo tenha um fator comum. Extrai-se o fator comum de cada grupo , obtendo uma nova expressão comum a todos os grupos.É uma evidência da evidência.

Exemplo: $2x+4x^2-2x^4-x^3$. Inicialmente fazemos o fator comum x em evidência $2x+4x^2-2x^4-x^3=x.(2+2x-2x^3-x^2)$. A seguir tomamos os pares e colocamos os fatores comuns em evidência : $x.(2.(1+2x)-x^2(1+2x)$, $x.(1+2x)(2-x^2)$

1.3.1 Exemplo 5 : AOPS

Fatore $2ab^3 + a^2c^2 + b^2c^2 - a^2b^2 - 2abc^2 - b^4$

Resolução

$2ab^3 + a^2c^2 + b^2c^2 - a^2b^2 - 2abc^2 - b^4 = -2ab.(c^2 - b^2) + a^2.(c^2 - b^2) + b^2.(c^2 - b^2)$

Aplicando a fatoração por agrupamento e o trinômio do quadrado perfeito junto com a diferença de quadrados em seguida :

$(c^2 - b^2)(a^2 - 2ab + b^2) = (c - b)(c + b)(a - b)^2$

1.4 Fatoração de Expressões Simétricas

A fatoração de expressões simétricas é uma técnica essencial para resolver problemas desafiadores em competições matemáticas , como as Olímpiadas . Expressões simétricas são aquelas que permanecem inalteradas quando suas variáveis são permutadas.

Exemplo $x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz$.

Sabemos que $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2.(xy + yz + xz)$. Subtraindo $3.(xy + yz + xz)$ de cada lado temos :

$x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz = (x + y + z)^2 - 3.(xy + yz + xz)$

Outra fatoração possível é : $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$, analogamente $(x - z)^2 = x^2 - 2xz + z^2$ e $(z - y)^2 = z^2 - 2yy + y^2$. Somando as três equações e dividindo pela metade :

$x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz = \frac{1}{2}.[(x - y)^2 + (z - y)^2 + (x - z)^2]$

2 Manipulação de Expressões Racionais

2.1 Simplificação de frações algébricas

Simplificar frações algébricas é fundamental em matemática avançada, especialmente no contexto olímpico onde eficiência e clareza são fundamentais.Frações algébricas aparecem na álgebra, teoria dos números e até mesmo geometria. Dominar essa técnica não apenas facilita a manipulação de equações e inequações como apresenta estruturas matemáticas subjacentes cruciais para resolver um problema.

Neste contexto, a simplificação vai além da mera redução de termos. Além da fatoração e divisibilidade diversos teoremas de polinômios e teoria dos números podem ser utilizados para resolver as questões. Padrões e simetrias corroboram no manuseio das frações algébricas.

Veremos alguns exemplos de manipulações básicas e avançadas no manuseio de frações algébricas utilizados em olímpiadas. Acompanhe os exemplos desafiadores que mais do que o conheimento teórico em si exigem também criatividade e pensamento crítico.

Exemplo (Olímpíada do Canadá - 1969) Mostre que se $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$ e p_1, p_2, p_3 não são todos nulos, então :

$(\frac{a_1}{b_1})^n = \frac{p_1a_1^n + p_2a_2^n + p_3a_3^n}{p_1b_1^n + p_2b_2^n + p_3b_3^n}$

para todo inteiro positivo n.

Utilizando algumas propriedades de proporção podemos construir a sentença com frações algébricas :

De $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$ sabemos que $(\frac{a_1}{b_1})^n = (\frac{a_2}{b_2})^n = (\frac{a_3}{b_3})^n$ que com a propriedade de multiplicar e dividir por um fator comum não nulo fica $(\frac{a_1}{b_1})^n = (\frac{a_2}{b_2})^n = (\frac{a_3}{b_3})^n = \frac{p_1a_1^n}{p_1b_1^n} = \frac{p_2a_2^n}{p_2b_2^n} = \frac{p_3a_3^n}{p_3b_3^n}$ que utilizando a propriedade que a proporção é preservada na soma dos termos proprocionais gera $(\frac{a_1}{b_1})^n = (\frac{a_2}{b_2})^n =$

$(\frac{a_3}{b_3})^n = \frac{p_1 a_1^n}{p_1 b_1^n} = \frac{p_2 a_2^n}{p_2 b_2^n} = \frac{p_3 a_3^n}{p_3 b_3^n} = \frac{p_1 a_1^n + p_2 a_2^n + p_3 a_3^n}{p_1 b_1^n + p_2 b_2^n + p_3 b_3^n}$ que é o resultado desejado usando a primeira e a última sentença.

2.2 Decomposição em frações parciais

A decomposição em frações parciais é uma técnica poderosa para simplificar expressões racionais, frequentemente utilizada em problemas de olimpíadas de matemática. O objetivo é expressar uma fração da forma $(\frac{P(x)}{Q(x)})$, onde $P(x)$ e $Q(x)$ são polinômios, como uma soma de frações mais simples, cujos denominadores são fatores de $Q(x)$.

2.2.1 Passos básicos:

1. Fatorar o denominador $Q(x)$: Decomponha $Q(x)$ em fatores lineares ou quadráticos irredutíveis. Por exemplo, se $Q(x) = (x-a)(x-b)$, os fatores são $(x-a)$ e $(x-b)$.

2. Escrever a decomposição: Para cada fator, atribua uma fração parcial. Se $Q(x) = (x-a)(x-b)$, a decomposição será:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b},$$

onde A e B são constantes a serem determinadas.

3. Determinar as constantes: Iguale a expressão original à soma das frações parciais e resolva o sistema de equações para encontrar A e B. Por exemplo:

$$\frac{P(x)}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}.$$

Multiplique ambos os lados por $Q(x)$ e substitua valores convenientes de x para encontrar A e B.

4. Simplificar e integrar (se necessário): Após encontrar as constantes, a expressão estará decomposta em frações parciais, pronta para ser utilizada em cálculos ou integrações.

2.2.2 Exemplo : (OBMU - 2019)

Calcule o resultado da seguinte soma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4n^2+8n+3}$

Seja $4n^2+8n+3 = (2n+1)(2n+3)$, assim $\frac{2}{4n^2+8n+3} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3}$. Utilizando soma telescópica até certo valor k temos :

$\frac{1}{2+1} - \frac{1}{2+3} + \dots + \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+3}$

$\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2k+3}$

Passando o limite $s = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2k+3}$ o que leva a segunda fração a 0

Logo o valor da expressão é $\frac{1}{3}$

3 Problemas para treinar

Questão 1 - Irlanda /1997
Encontre todos os pares de inteiros (x, y) tais que :
$1 + 1996x + 1998y = vy$

Questão 2 - HARVARD - MIT - 2012 Sejam a e b números complexos tais que $2a + 3b = 10$ e $4a^2 + 9b^2 = 20$, determine o valor de ab

Questão 3 - Gandhi :
Fatore $15x^3ya^2b - 5x^3yab^2 - 15x^2y^2a^2b + 5x^2y^2ab^2$

Questão 4 - Carlos Gomes Fatore $(x+y+z)^3 - (x^3+y^3+z^3)$

Questão 5 Olímpiada de Campina Grande - 2000 Se $x \neq 0, y \neq 0$ e $2x + \frac{y}{2} \neq 0$ então $(2x + \frac{y}{2})^{-1}.[(2x)^{-1} + (\frac{y}{2})^{-1}]$ é igual a :

4 Gabarito e Resolução

Verifique a parte II deste artigo.