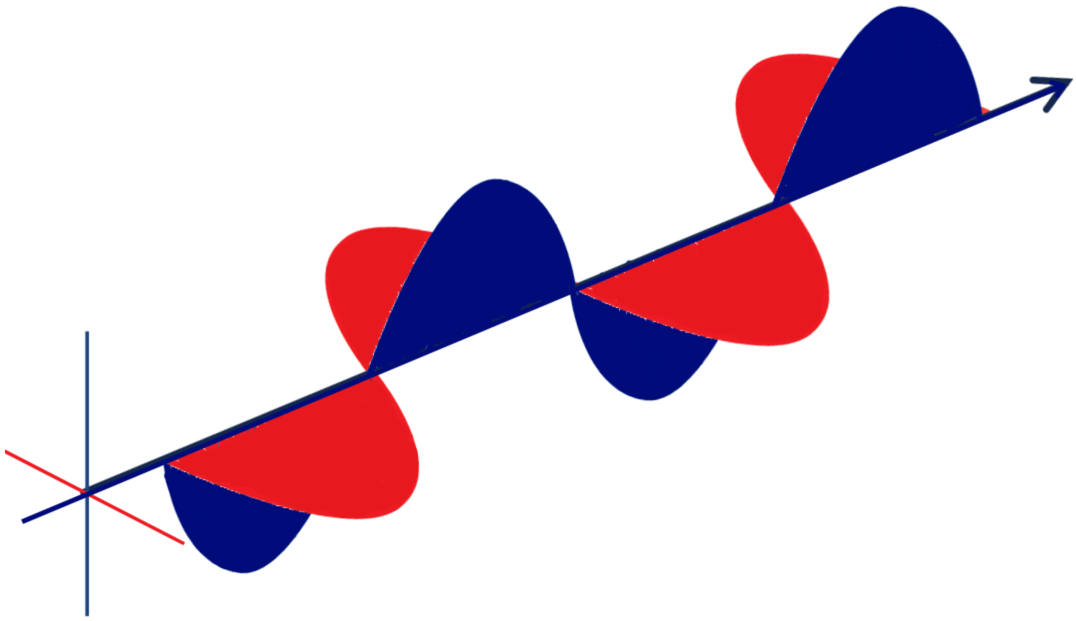
Prova da Segunda Fase CNF Nível 1

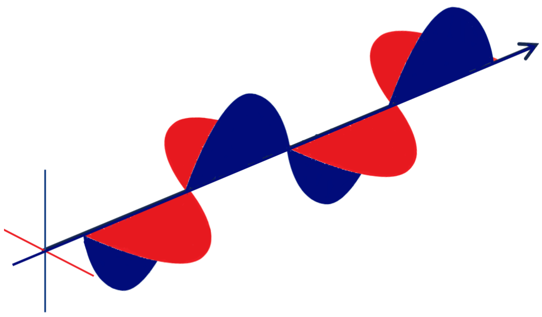


A prova tem duração recomendada de 3h.

Tabela de constantes

Constante	**Valor**
Velocidade da Luz (c)	299.792.458 m/s
Constante de Planck (h)	$6,63 \times 10^{-34}$ J · s
Constante Gravitacional (G)	$6,67 \times 10^{-11}$ m^3 kg^{-1} s^{-2}
Carga do Elétron (e)	$1,60 \times 10^{-19}$ C
Constante de Boltzmann (k)	$1,38 \times 10^{-23}$ J/K
Número de Avogadro (N_A)	$6,02 \times 10^{23}$ mol^{-1}
Raio da Terra($R_\oplus$)	$6,378 \times 10^6$ m
Massa da terra($M_\oplus$)	$5,97 \times 10^{24}$ kg
Constante dielétrica no vácuo(ϵ_0)	8,85 $\times 10^{-12}$ C^{2}N^{-1}m^{-1}
Constante de Stefan-Boltzmann (σ)	$5,67 \times 10^{-8}$ W/m^2 K^4

ATENÇÃO!! Só é necessário o envio de três questões e portanto caso haja o envio de mais que isso serão corrigidas apenas as três primeiras.



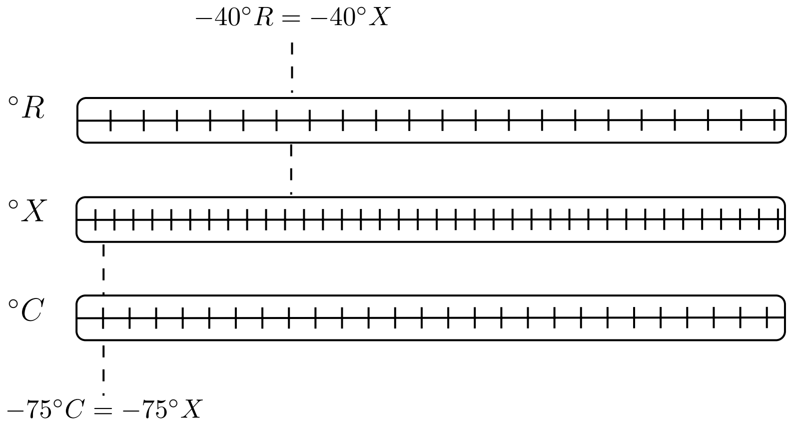
Boa Prova a Todos!

A próxima questão é apenas para a 8° série

Questão 1. Febril (10 pontos)

Uchoa decidiu variar um pouco e teve uma brilhante ideia: ficar doente (como se isso não acontecesse sempre). Ele sentia dor de cabeça, corpo e febre (calma... não é uma prova de biologia). Ele então pega um termêmetro na sua casa e mede sua temperatura que é exibida como sendo $86°X$, o que o assusta, já que é impossível um ser humano chegar nessa temperatura em Celsius. Mas ele tem uma sacada, a escala do termômetro não é Celsius!

Na escala termométrica arbitrária X, verificou-se que a temperatura de $-40°X$ coincide com o mesmo valor na antiga escala de temperatura Réaumur, que adota respectivamente $0°R$ e $80°R$ para os pontos fixos fundamentais (ponto do gelo e ponto do vapor). Verificou-se ainda que a temperatura de $-75°X$ coincide com o mesmo valor na escala Celsius.



A.1	Determine na escala X a leitura correspondente a $0°R$ e a $80°R$.	1,5pt

A.2	Determine na escala X a leitura correspondente a $0°C$ e a $100°C$.	1,5pt

Tratamos apenas de duas escalas termométricas até agora, Celsius e Réaumur, no entanto, outros cientistas já utilizaram outros métodos para medir temperatura, como a escala Fahrenheit (°F). Na próxima parte você irá analisar a relação dessa escala com a escala °F. Sabemos que o 0°C em Fahreinhet é 32°F e 100°C é 212°F. Zero absoluto equivale à 0K $= -273,15°C$.

A.3	Determine na escala X a leitura correspondente ao ponto de gelo e ao ponto de vapor na escala Fahrenheit $°F$.	1,5pt

A.4	Determine o valor do zero absoluto na escala X.	1,5pt

A.5	Determine as 4 fórmulas de conversão entre a escala X e as escalas: 1) Réaumur 2) Celsius 3) Fahrenheit 4) Kelvin	3,0pt

A.6	Com esses resultados, qual foi a temperatura medida de Uchoa em $°C$?	1,0pt

A próxima questão é apenas para a 8° e 9° séries

(Exclusiva para 8° e 9° anos)

Questão 2. Física ou matemática? (10 pontos)

A física é uma das mais belas ciências e busca descrever os fenômenos da natureza, como do porquê de sempre cairmos ao pularmos. Porém ela não se limita a explicações teóricas, mas também tenta descrever esse fenômeno por meio de equações, de modo que sabemos o que vai acontecer mesmo sem que precisemos pular. Portanto, é inegável que a matemática, junto de suas equações e propriedades, é uma forte aliada dos físicos para conseguirem descrever suas teorias. Visto isso, veremos exemplos de questões onde a matemática é diretamente aplicada na física:

Boia ou não boia? (7 pontos)

Gisela é uma garota que ama animais. Pensando nisso, seus pais a presentearam com um aquário. Mas tem um problema: cadê os peixinhos? Seus pais se esqueceram da parte mais importante! Mas tudo bem, pois, enquanto esperava a vinda dos peixinhos, Gisela decidiu brincar com o aquário. Inspirada em uma aula de física que acabara de assister em seu colégio, Gisela começou a colocar objetos no aquário para saber se eles flutuariam ou não.

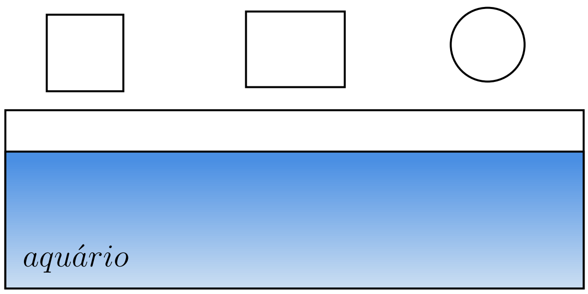
Sabendo que:

- Se o objeto tiver densidade maior que a da água, ele afundará na água;
- Se o objeto tiver densidade menor que a da água, ele flutuará na água;
- Se o objeto tiver densidade igual à da água, ele não afundará e nem flutuará na água;
- A densidade da água é de $\rho = 1\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.

A.1 Gisela colocou um cubo de massa $m = 1$ kg e aresta $a = 0,55$ m, conforme a figura a seguir, no aquário. Calcule a densidade do cubo. 2pt

A.2 Gisela colocou um paralelepiedo de massa $m = 3$ kg e dimensões $1,15$ m $\times$ $1,55$ m $\times$ $2,05$ m. Calcule a densidade do paralelepípedo. 2pt

A.3 Gisela colocou uma esfera de massa $m = \frac{4\pi}{3}$ kg e raio $r = 1$ m no aquário. Calcule a densidade da esfera. *Dica: o volume da esfera de raio R é $V = \frac{4\pi}{3}R^3$.* 2pt



A.4	A partir das informações calculadas anteriormente, conclua o que acontecerá com cada um dos objetos ao serem colocados no aquário.	1pt

Encontrando o caminho mais rápido (3 pontos)

No estudo da física, um conceito importante é de que uma linha reta entre dois pontos é sempre o jeito mais rápido de se transportar entre eles. João é um maratonista que não entende muito de física e está bolando maneiras para melhorar o tempo em sua maratona. Sabendo que a partir de um triângulo, conforme a figura a seguir, e da leis dos cossenos

$$A^2 = B^2 + C^2 - 2BC\cos(\theta)$$

podemos provar que a linha reta é mais curta, portanto mais rápida, do que os outros possíveis caminhos.

B.1	Convença João que $A \leq B + C$ e, assim, que a linha reta é o caminho mais curto.	3pt

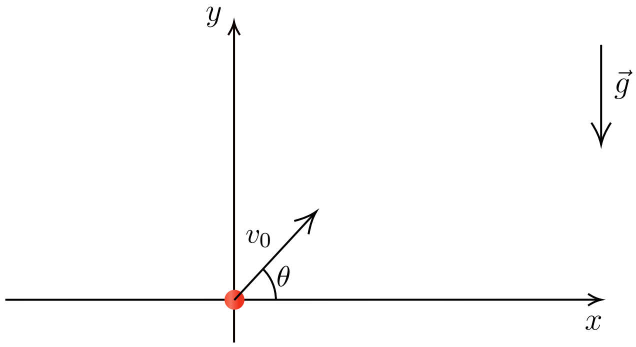
A partir daqui, as questões são para todos

Questão 3. Brincando Com Fogo (10 pontos)

Em um de seus vídeos, o youtuber MrGurjeast irá explodir uma bomba de 1 milhão de dólares. Ele, no entanto, levanta um questionamento. Quais são as regiões em que seus drones de última geração poderão ficar para que eles consigam gravar a explosão em segurança, sem o perigo de serem atingidos por destroços? Ele olha a embalagem da bomba e encontra a informação de que os destroços podem atingir uma velocidade inicial de lançamento de até v_0. Ele conta essa situação para seu colega youtuber, João, e ele apresenta-lhe o conceito de parábola de segurança. Ela trata-se do envelope imaginário que delimita todos os pontos possíveis de serem atingidos no lançamento de um projétil de uma certa posição com uma certa velocidade. Nessa questão iremos desenvolver vários resultados fundamentais sobre o lançamento oblíquo, desprezando quaisquer atritos e perdas de energia. A partir desses resultados faremos as análises necessárias para obtermos a equação da parábola de segurança e ajudarmos o nosso amigo MrGurjeast.

Analisando um projétil (5,3 pontos)

Considere uma partícula sendo lançada da origem de um sistema de coordenadas cartesianas com velocidade inicial v_0, fazendo um ângulo θ com a horizontal e submetida a um campo gravitacional constante g. Assuma que não haja atritos ou perdas de energia.



A.1	Determine a componente vertical v_{0y} e a horizontal v_{0x} da velocidade inicial da partícula.	0,2pt

A.2	Expresse as funções horárias das posições $x(t)$ e $y(t)$ da partícula, bem como as funções horárias das componentes da velocidade $v_x(t)$ e $v_y(t)$ a partir do lançamento.	1,0pt

A.3	Quanto tempo leva para a partícula atingir o ponto mais alto de sua trajetória? Qual é a duração do lançamento até ela voltar ao chão?	0,5pt

A.4	Qual a altura máxima atingida pela partícula nesse lançamento?	0,3pt

A.5	Qual o alcance desse lançamento?	0,8pt

A.6	Para qual ângulo de lançamento θ teremos o maior alcance? Dado: $2\sin(\theta)\cos(\theta) = \sin(2\theta)$	1pt

Acima descrevemos o movimento a partir de alguns parâmetros muito úteis, mas não encontramos a curva exata descrita pela partícula. É possível fazer isso encontrando relacionando as variáveis que temos: tempo, x e y.

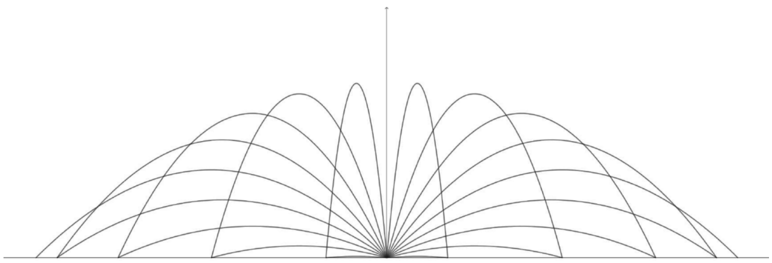
A.7 Mostre que a trajetória da partícula segue a seguinte equação: 1,5pt

$$y(x) = x\tan\theta - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\theta}$$

O resultado acima é conhecido como equação da trajetória.

Encontrando a parábola de segurança (4,7 pontos)

Observe a imagem que obtemos quando plotamos o gráfico de várias trajetórias de lançamento com apenas ângulos de lançamento diferentes a partir da equação obtida em A.7.



Podemos observar que claramente existe uma tendência das curvas de trajetórias não ultrapassarem uma certa barreira limite. Como já citado, essa barreira é a parábola de segurança. Vamos fazer algumas análises para obter a equação da parábola de segurança.

Nessa parte da questão, será necessário explicitar bem o θ como a nossa principal variável.

B.1 Dado que o projétil é lançado com v_0 e passa por um determinado ponto de coordenadas x_0, y_0 reescreva a equação obtida no item A.7 como uma equação do segundo grau para encontrar $\tan(\theta)$. 1,2pt

Dica: $\dfrac{1}{\cos^2(\theta)} = \tan^2(\theta) + 1$

B.2 É possível que a curva de três trajetórias diferentes compartilhem um mesmo ponto diferente da origem em comum? Justifique. 0,5pt

Existem pontos no plano que nunca vão ser atingidos pela partícula, não importa qual seja o ângulo de lançamento. Já em outras regiões encontramos pontos que podem ser atingidos por mais de uma trajetória, ou seja, para mais de um ângulo θ. Entre os pontos que não podem ser atingidos e os pontos que podem ser atingidos mais de uma vez, temos outro conjunto de pontos que separam essas regiões. Esses pontos só podem ser atingidos por um único ângulo de lançamento.

B.3	Os pontos que só podem ser atingidos por um ângulo de lançamento fazem parte da parábola de segurança. A partir de B.1 encontre a função $y(x)$ da parábola de segurança.	2,2pt

Existe uma estratégia para se obter a equação da parábola de segurança mais rapidamente. Primeiro calcule a altura máxima $H_{máx}$ atingida por uma partícula lançada verticalmente com velocidade v_0 do solo. Após isso, calcule a equação da trajetória dessa partícula quando lançada horizontalmente a partir da altura $H_{máx}$ também com velocidade v_0. Essa equação de trajetória também representará a equação da parábola de segurança.

B.4	Encontre a equação da parábola de segurança usando este método.	0,8pt

Questão 4. Cargas Equilibradas (10 pontos)

A Lei de Coulomb, enunciada por Charles-Augustin de Coulomb em 1785, é um dos pilares da eletrostática. Essa lei descreve a força de interação entre duas cargas elétricas pontuais. De acordo com a Lei de Coulomb, a magnitude da força elétrica entre duas cargas é diretamente proporcional ao produto das magnitudes das cargas e inversamente proporcional ao quadrado da distância que as separa. Matematicamente, essa relação é expressa pela fórmula:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{d^2} \tag{1}$$

onde:

- F é a força entre as cargas,
- $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = k$ é a constante de Coulomb ($k_e \approx 9 \times 10^9\,\mathrm{N{\cdot}m^2/C^2}$),
- q_1 e q_2 são as magnitudes das cargas,
- d é a distância entre as cargas.

A Lei de Coulomb é fundamental para a compreensão das forças que atuam entre partículas carregadas. Ela forma a base de muitas outras teorias e aplicações na física e na engenharia elétrica, sendo essencial para o estudo dos fenômenos eletrostáticos. A precisão da Lei de Coulomb foi confirmada por muitos experimentos e continua a ser uma referência crucial no campo da física moderna.

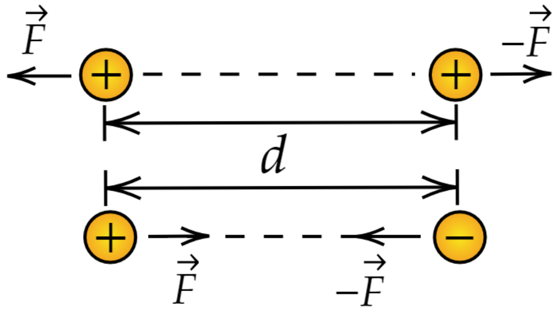
A Lei de Coulomb se assemelha muito à Lei da Gravitação Universal formulada por Isaac Newton em 1687. A Lei da Gravitação Universal descreve a força de atração entre duas massas sendo expressa pela fórmula:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{d^2} \tag{2}$$

onde:

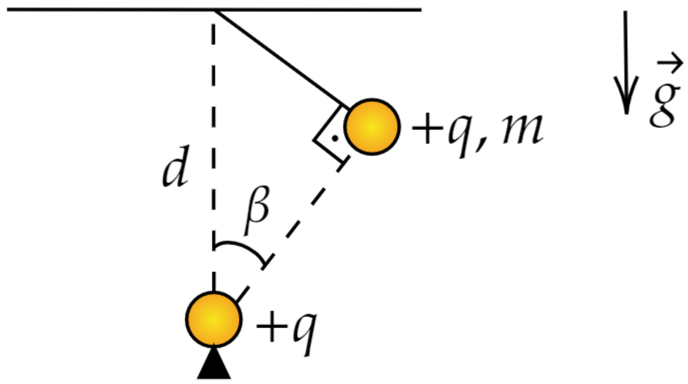
- F é a força de atração gravitacional entre duas massas,
- G é a constante gravitacional ($G \approx 6.674 \times 10^{-11}\,\mathrm{N{\cdot}m^2/kg^2}$),
- m_1 e m_2 são as magnitudes das massas,
- d é a distância entre as massas.

Ambas as leis compartilham a forma inversamente proporcional ao quadrado da distância entre os objetos e ambas as forças apontam na direção e sentido da reta que une os dois corpos em estudo, sendo que na lei de Coulomb o sentido da força depende das duas cargas em questão. Caso tenham sinais opostos, a força será de aproximação e o sentido apontará em direção a outra carga, porém, se tiverem o mesmo sinal, a força será de repulsão e o sentido apontará em direção contrária a carga, como esquematizado a seguir:



No entanto, enquanto a Lei de Coulomb descreve a força entre cargas elétricas, a Lei da Gravitação Universal descreve a força entre massas.

Uma bolinha de massa m e carga $+q$ está suspensa por um fio isolante preso em um teto que está a uma distância d de uma carga presa no chão em uma região onde o campo gravitacional tem intensidade g. Outra bolinha de carga $+q$ está fixada por um suporte isolante bem abaixo do ponto de conexão do fio com o teto. Na posição de equilíbrio, o fio e o vetor que conecta as duas bolinhas formam um ângulo de 90° e o vetor que conecta as bolinhas forma um ângulo β com a vertical, como mostra a figura abaixo.



Nessas condições, podemos determinar alguns parâmetros. Dados: permissividade elétrica do vácuo: ε_0.

Vamos começar pela geometria.

A.1	Encontre a distância de separação D entre as cargas em função de d e β.	1,5pt

A.2	Qual é o tamanho do fio em função de d e β?	1,5pt

Agora vamos para a física do problema, e para isso você precisa se lembrar da expressão que fornecemos na equação (1).

A.3	Esboce um diagrama de forças na carga que está presa na corda, isto é, todas as forças que atuam nela. Não se esqueça da tração no fio.	2,0pt

A.4	Usando o resultado de A.1 e a equação (1) encontre a força entre as cargas em função de q, d, ε_0 e β.	1,0pt

Agora só é necessário usar o fato de que temos um equilíbrio de forças na carga para que possamos encontrar o valor de β.

A.5	Equilibre as forças em cada direção (horizontal e vertical) para a carga suspensa, encontre um sistema de equações.	2,0pt

A.6	Resolva o sistema do item anterior para encontrar o $\cos\beta$ e a tração T na corda.	2,0pt

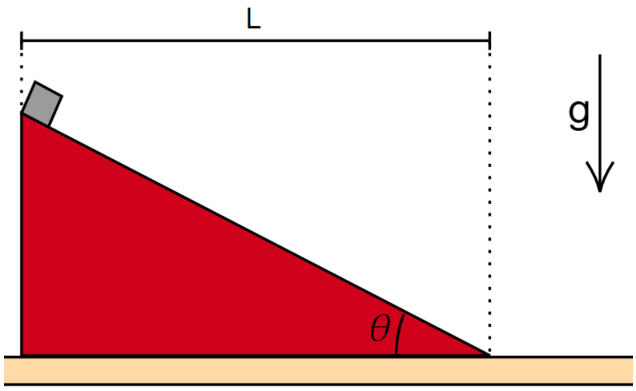
Questão 5. Forças ou Energia? (10 pontos)

As Leis de Newton são extremamente conhecidas e, através do uso delas, conseguimos resolver diversas questões. Entretanto, apesar de ser o método padrão ao resolver uma questão de movimento, um outro recurso tão importante quanto é o da energia, que muitas vezes simplifica uma questão dificil por Leis de Newton.

Visto isso, analisaremos a importância da energia em 3 situações distintas para provar que esse recurso pode ser muito útil na resolução de problemas

Quase igual (4 pontos)

Nessa primeira situação vamos analisar um bloco caindo do topo de um plano inclinado fixo com comprimento horizontal igual a $L = 5$m, conforme a figura a seguir.



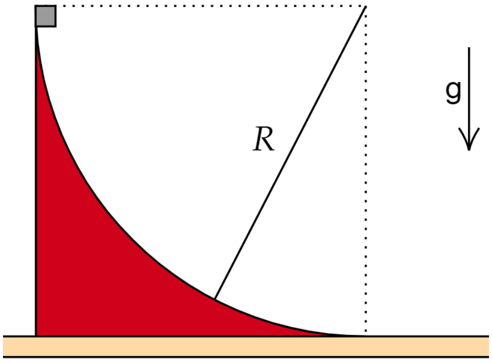
A velocidade inicial do bloco $v_0 = 0$ m/s, o ângulo do plano é $\theta = 60°$ o coeficiente de atrito entre a bola e a rampa é $\mu = 0,6$ e a gravidade é constante $g = 10$ m/s^2. Sabendo disso, responda:

A.1	Analisando a força e aceleração (2° Lei de Newton), ache a velocidade do bloco no fim da rampa.	2,0pt

A.2	Analisando a energia inicial e final do percurso, ache a velocidade do bloco no fim da rampa.	2,0pt

Ajudou bastante (4 pontos)

Nessa segunda situação vamos analisar um bloco caindo do topo de uma rampa, que é um quarto de uma circunferência de raio $R = 5$ m. A velocidade inicial da bola $v_0 = 0$ m/s e a gravidade é constante $g = 10$ m/s^2. Sabendo disso, responda:



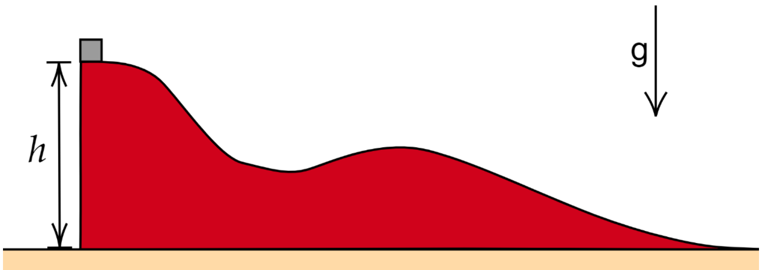
B.1	O bloco desce um certo ângulo θ medido a partir da horizontal. Qual é a velocidade do bloco nesse instante ?	1,0pt

B.2	Analisando a força centrípeta, ache a normal N do bloco em função do ângulo θ.	2,0pt

B.3	Ache a normal N sentida pelo bloco no fim da rampa.	1,0pt

Salvou o dia (2 pontos)

Nessa terceira situação vamos analisar uma bola caindo do topo de uma curva genérica, conforme a figur a seguir.



A velocidade inicial do bloco é $v_0 = 0$ m/s, a altura $h = \pi$ cm e a gravidade é constante $g = 10$ m/s^2. Fica claro de perceber que tentar achar a aceleração nessa situação e, assim, a velocidade final seria extremamente complicado pelo fato da aceleração não ser constante. Sabendo disso, responda:

C.1	Analisando a energia inicial e final do percurso, ache a velocidade do bloco no fim da curva em m/s.	2,0pt

Como podemos concluir, em algumas situações, analisar a energia é extremamente mais simples do que usar as Leis de Newton, o que a torna um recurso extremamente poderoso em questões de física.