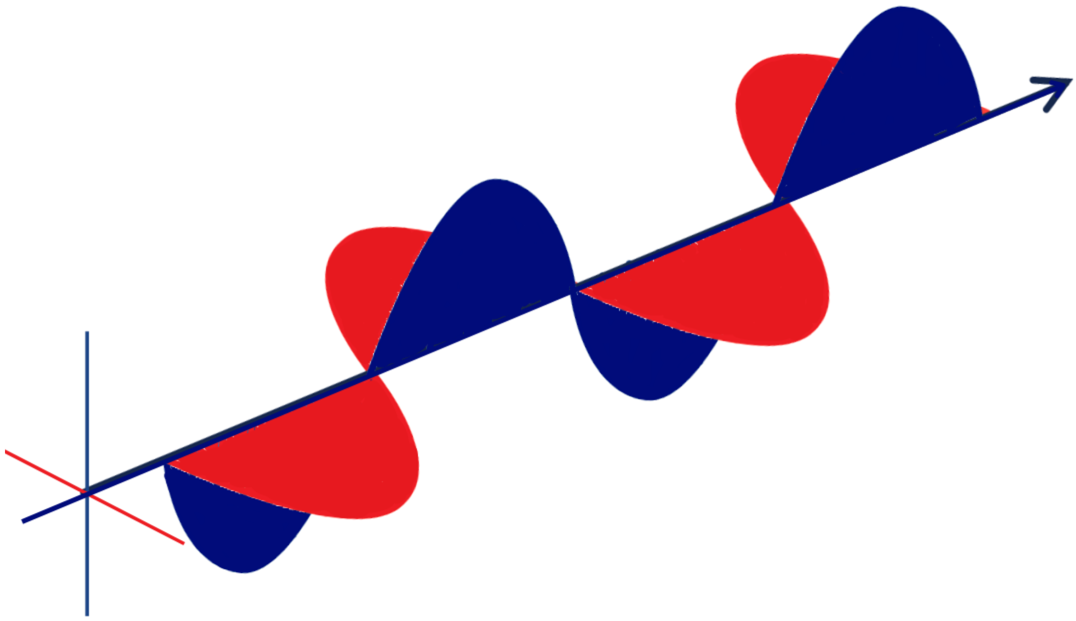
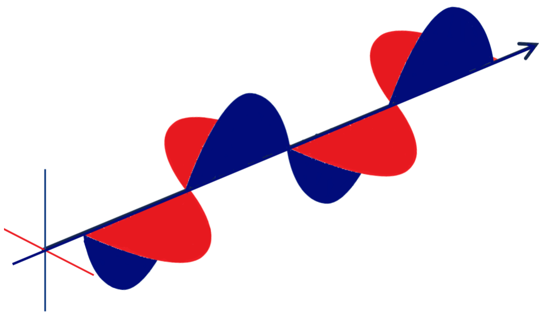
Prova da Segunda Fase CNF Nível 3



A prova tem duração recomendada de 3h.

Tabela de constantes

Constante	**Valor**
Velocidade da Luz (c)	$299.792.458\,\mathrm{m/s}$
Constante de Planck (h)	$6,63 \times 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}$
Constante Gravitacional (G)	$6,67 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$
Carga do Elétron (e)	$1,60 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$
Constante de Boltzmann (k)	$1,38 \times 10^{-23}\,\mathrm{J/K}$
Número de Avogadro (N_A)	$6,02 \times 10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}}$
Raio da Terra($R_\oplus$)	$6,378 \times 10^{6}\,\mathrm{m}$
Massa da terra($M_\oplus$)	$5,97 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$
Constante dielétrica no vácuo(ϵ_0)	8,85 $\times 10^{-12}$ $\mathrm{C^2N^{-1}m^{-1}}$
Constante de Stefan-Boltzmann (σ)	$5,67 \times 10^{-8}\,\mathrm{W/m^2\,K^4}$



Boa Prova a Todos!

Questão 1. Onde está a lente? (10 pontos)

Em um belo dia, Gurjão estava vasculhando os papéis que usou para estudar para a EuPhO e se deparou com uma figura que representava duas setas, uma imagem e um objeto, sem representar, porém, a lente que formou a imagem.

Ele é muito esperto e isso não seria um problema, o que iniciou sua busca para determinar a posição e os parâmetros da lente. Nesse problema você acompanhará essa jornada e denvendará tudo isso junto com Gurjão!

Vértice e caracerísticas da imagem (2 pontos)

A imagem abaixo está representada em escala e você deve utilizá-la para realizar quaisquer tipos de medidas, caso necessário.

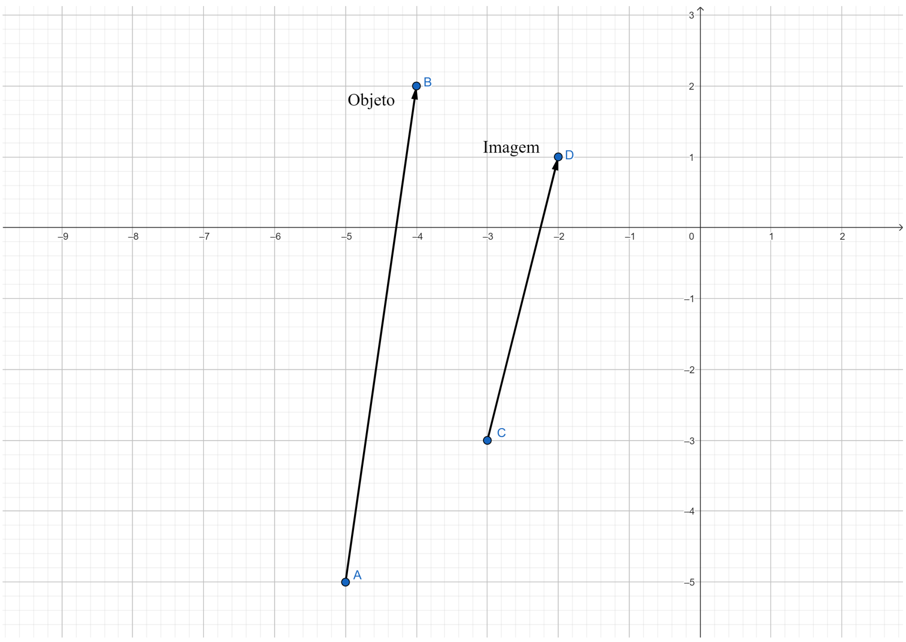


Figura 1: Disposição da imagem e do objeto

Os pontos A, B, C e D são tais que $A = (-5, -5)$, $B = (-4, 2)$, $C = (-3, -3)$ e $D = (-2, 1)$, de tal forma que D é imagem de B e C é imagem de A. Denote a unidade de comrimento no plano cartesiano por $u.c$.

A.1	Usando um raio notável mostre que o vértice da lente está localizado na origem do sistema de coordenadas, isto é, $V = (0, 0)$, onde V é ponto localizado sobre o vértice.	1,5pt

A.2	A imagem formada é real ou virtual?	0,5pt

Encontrando o eixo óptico (5,5 pontos)

Já temos algumas informações, porém não o suficiente para determinar a posição e características da lente. O próximo passo é encontrar o eixo óptico, isto é, o eixo que passa pelo vértice e é perpendicular à lente para que possamos determinar as características da lente.

Considere a figura abaixo:

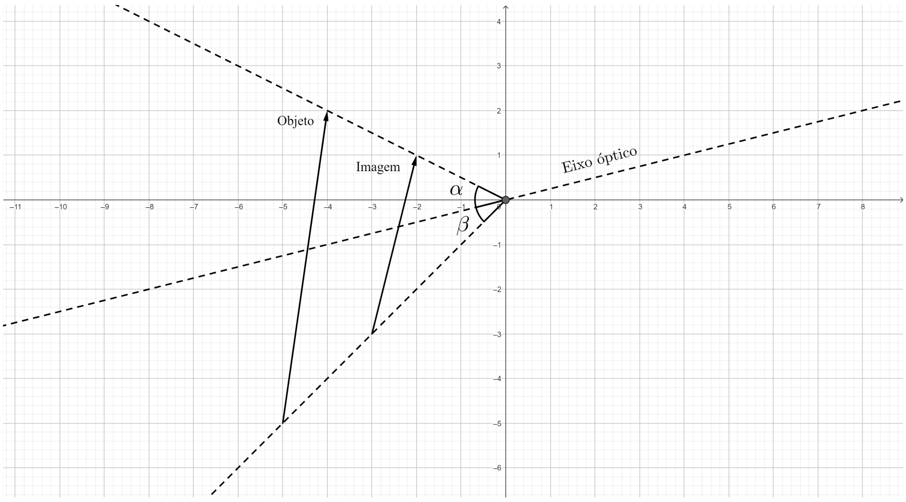


Figura 2: Representação do eixo óptico

Sejam d_A, d_B, d_C e d_D as distâncias do vértice até os pontos A, B, C, D, respectivamente. Os ângulos α e β são definidos conforme a figura, como sendo os ângulos entre o eixo óptico e a reta DB e o eixo óptico e a reta CA, respectivamente.

B.1	Encontre o valor de $\alpha + \beta$.	0,5pt

Cada um desses pontos tem uma respectiva projeção perpendicular sobre o eixo óptico. Define-se p_A e p_B como a distância das projeções de A e B sobre o eixo óptico. Assim como p'_C e p'_D são as distâncias das imagenas ao vértice tomada sobre o eixo óptico; **eles seguem o referencial de sinais de Gauss**.

B.2	Encontre p_A, p_B, p'_C e p'_D. Coloque sua resposta em termos das distâncias d_A, d_B, d_C, d_D e dos ângulos α e β. Atente-se para os sinais.	2,0pt

B.3	Encontre o valor de $\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$ em função de d_A, d_B, d_C e d_D e desenvolva esse valor numericamente.	1,5pt

Agora já temos todas as informações necessárias para ajudar o Gurjão determinando a posição do eixo óptico.

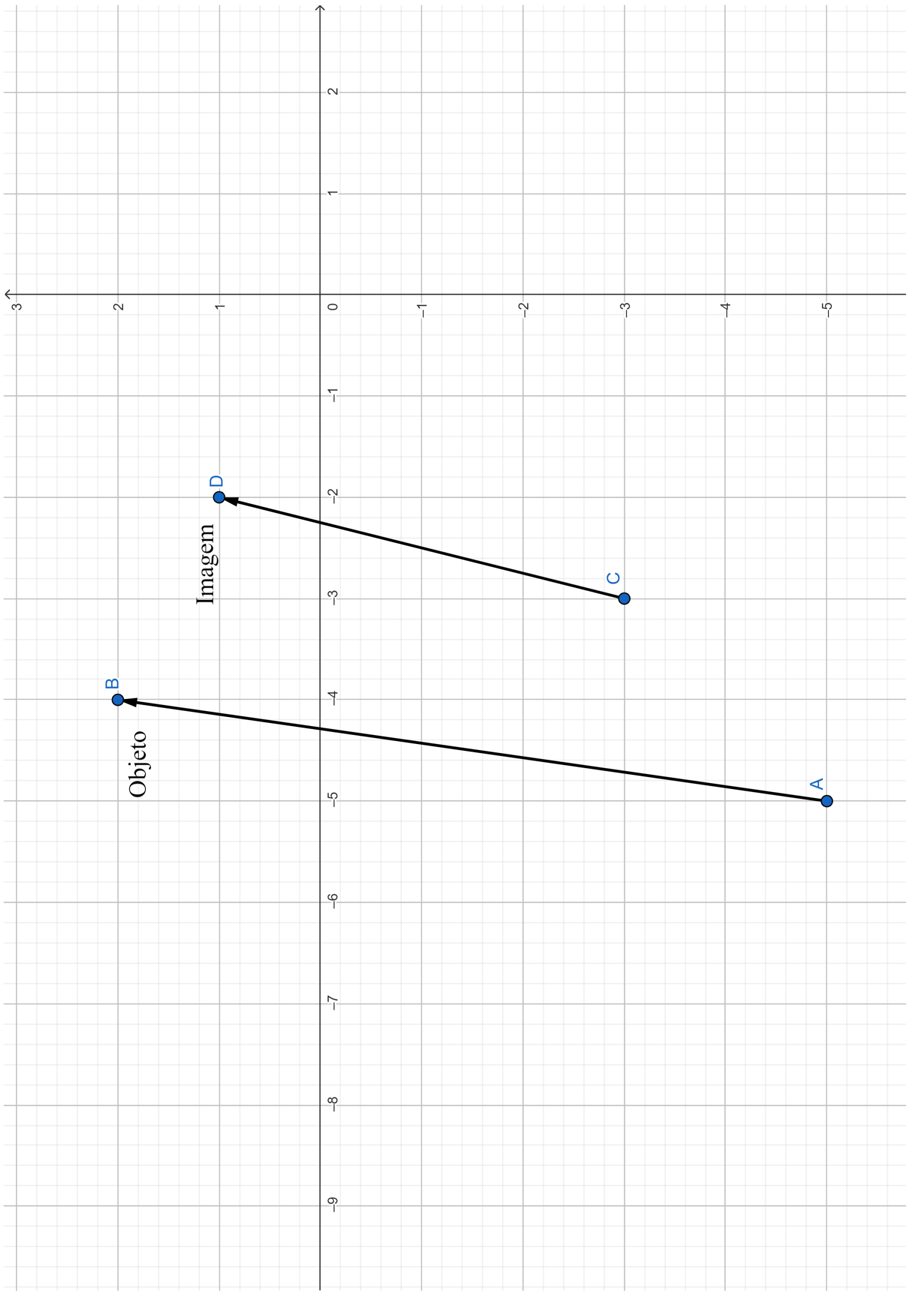
B.4	Determine numericamente os ângulos α e β. Você pode usar calculadora.	1,5pt

Posição do foco da lente (2,5 pontos)

Nessa parte você não precisa obter valores exatos, apenas fazer estimativas.

C.1	Faça um desenho esquemático em escala indicando a posição do foco da lente. Ela é convergente ou divergente?	1,5pt

C.2	Estime o valor da distância focal em $u.c$, você pode usar a régua.	1,0pt



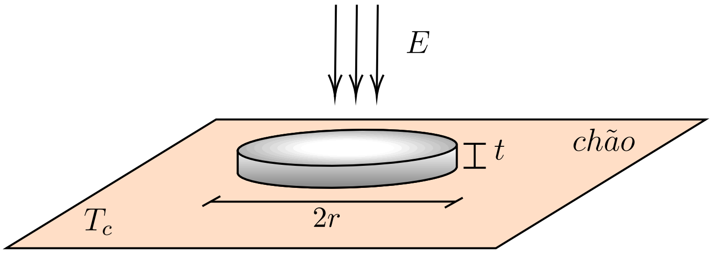
Questão 2. O sol de Fortaleza (10 pontos)

Uchoa estava indo comprar suas bananinhas no cometa quando deixa cair no chão uma moeda de 50 centavos. Ele está estourado e nem se importa em se abaixar para pegar a moeda, deixando ela pelo caminho recebendo calor do sol fraco de Fortaleza às 10 horas da manhã. Nesse problema você vai estudar como o aquecimento da moeda ocorre, estimando quantitativamente alguns parâmetros.

Quando um corpo com uma temperatura $T = T_0 + \Delta T$ ligeiramente maior que a temperatura T_0 do meio em que ele está, podemos encontrar a partir de contribuições de condução e irradiação térmica que a intensidade de calor emitida (isto é, a potência por unidade de área) é proporcional à ΔT.

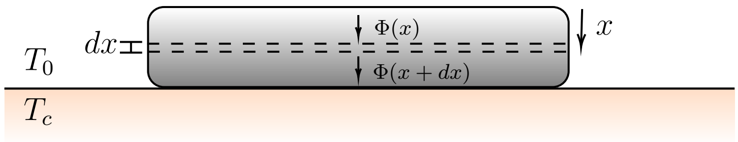
A moeda de Uchoa (10 pontos)

A moeda que ele derrubou tem raio r, espessura t e é feita de um metal com condutividade térmica K. A intensidade total da radiação solar incidente é E e ela incide praticamente de forma vertical sobre a superfície da moeda.



A temperatura do chão é constante igual a T_c e a potência perdida para a atmosfera por área é $\alpha\Delta T$, em que ΔT é a diferença entre a temperatura do ponto na moeda e do ar atmosférico e α é uma constante conhecida.

Considere discos muitos finos de espessura dx a uma distância x da face superior da moeda, como mostra a figura:



A temperatura da moeda é uma função $T(x)$ e a temperatura atmosférica é T_0. Não é necessário considerar variações na temperatura ao longo do raio, isto é, o perfil de temperatura depende apenas de x.

A.1	Encontre a potência perdida dP pela área lateral de um disco em termos de α, $T(x)$, T_0, r e dx.	1,8pt

Para o estado de equilíbrio, a potência perdida é igual ao decréscimo no fluxo de calor $\Phi(x)$ pela seção transversal na moeda.

A.2	Encontre $\frac{d\Phi}{dx}$ em função de r, α e $\Delta T \equiv T(x) - T_0$.	2,0pt

O fluxo $\phi(x)$ na moeda é dado pela Lei de Fourier na sua forma diferencial:

$$\Phi = -KA\frac{dT}{dx} \tag{1}$$

Onde A é a área de seção transversal da moeda. Note que, devido à uma propriedade de derivadas, é verdade escrever que $\frac{d(T(x)-T_0)}{dx} = \frac{dT}{dx}$.

A.3	A equação diferencial para $\Delta T(x)$ é dada por: $$\frac{d^2\Delta T}{dx^2} = \beta^2 \Delta T$$ Encontre β em termos de α, K e r.	1,5pt

A solução para esse tipo de equação é uma combinação linear de exponenciais, isto é, $\Delta T(x) = Ae^{-\beta x} + Be^{\beta x}$ (não é necessário demonstrar isso), onde A e B são constantes determinadas pelas condições de contorno.

A.4	Encontre $\frac{d\Delta T}{dx}$. Coloque sua resposta em termos de A, B e β.	1,0pt

A.5	Utilizando a aproximação de que a espessura t é muito pequena comparada com o comprimento característico $\frac{1}{\beta}$, escreva $\Delta T(x)$ e $\frac{d\Delta T}{dx}$ em primeira ordem em βx. Use que $e^x \approx 1 + x$ para $x \ll 1$. Escreva sua resposta em termos de $A' = A + b$ e $B' = A - B$	1,5pt

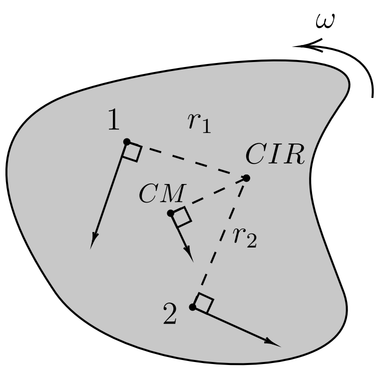
A.6	Usando as condições de contorno necessárias, encontre um sistema de equações lineares para A e B. Use α, E, β, t, K e $\Delta T_c \equiv T_c - T_0$.	2,2pt

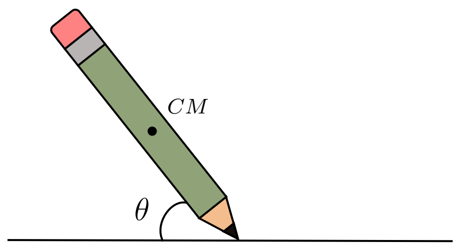
Questão 3. Tédio na aula do Gurjão (10 pontos)

Durante o curso de férias de sua primeira seletiva, JV assistiu algumas aulas do Gurjão e sentiu-se um tanto quanto entendiado, recordando seu começo. Enquanto se distraia ele começou a fazer um lápis deslizar sobre a mesa, observando seu movimento, que será estudado nesse problema.

Centro instantâneo de rotação (3,4 pontos)

Imagine que um corpo gira com velocidade angular ω em todo do seu centro de massa, que se move com v_{CM}. O centro instântaneo de rotação (CIR) é um ponto no espaço ao redor do qual há uma rotação pura de todo o corpo, isto é, a velocidade de todos os pontos é perpendicular à distância ao CIR e é dada por $v = \omega r$, onde r é a distância do ponto ao CIR (ω é o mesmo do CM).





No lado esquerdo da figura temos que $v_1 = \omega r_1$ e $v_2 = \omega r_2$. O CIR está no ponto de encontro dos segmentos que são perpendiculares à velocidade de dois pontos dados e você não precisa provar isso.

Considere um lápis muito fino de comprimento l que está caindo em uma mesa **completamente livre de atritos**, de forma que o movimento do CM é vertical. O ângulo do eixo do lápis com a horizontal é θ.

A.1	Encontre a posição do CIR nesse caso. Considere a ponta do lápis (muito fina) como a origem.	1,2pt

A.2	Encontre a velocidade do centro de massa em função de $\omega = \dot{\theta}$, l e θ.	1,2pt

A.3	Use o item anterior para encontrar a aceleração do centro de massa a_{CM} em função de $\omega = \dot{\theta}$, l e θ.	1,0pt

Dinâmica do movimento (5,4 pontos)

O lápis sente duas forças: seu próprio peso e a normal de contato com o chão. Nessa parte nós vamos determinar como a normal se comporta. Considere sempre para cálculos de torque o referencial do centro de massa, que, apesar de não inercial, não sente o torque das forças de inércia. O lápis tem massa m e a gravidade é g.

B.1	Usando os resultados da parte anterior encontre a energia cinética total do lápis. Não esqueça da energia rotacional.	1,2pt

Dica: o momento de inércia do lápis (barra delgada) em torno do seu centro de massa é $\frac{1}{12}ml^2$.

O lápis é solto de $\theta = 90°$.

B.2	Conservando a energia encontre $\dot{\theta}(\theta)$. Você pode usar qualquer parâmetro introduzido anteriormente.	1,2pt

B.3	Usando a regra da cadeira, mostre que: $$\ddot{\theta} = \frac{1}{2}\frac{d(\dot{\theta}^2)}{d\theta}$$	1,0pt

Agora já podemos juntar tudo para encontrar a normal N com o chão em função de θ, mas antes precisamos montar a segunda lei de Newton.

B.4	Monte a segunda lei de Newton para o movimento de rotação do lápis, use em sua expressão m, l, $\ddot{\theta}$, θ e a normal $N(\theta)$. Atente-se para os sinais de menos!	2,0pt

Usando o que foi encontrado nos itens anteriores é possível mostrar que:

$$\frac{d\left(\dot{\theta}^2\right)}{d\theta} = -\frac{72g}{l}\left[(1-\sin\theta)^2 + \frac{1}{3}\right]\frac{\cos\theta}{(1+3\cos^2\theta)^2} \tag{2}$$

Observações qualitativas (1,2 pontos)

Em muitos tipos de movimentos vinculados a uma rotação por uma superfície, ou seja, o mesmo caso do lápis que é forçado a girar devido a existência do chão, há perda de contato entre o objeto e a superfície.

C.1	O lápis em algum momento perde contato com o chão? Se sim, qual é o ângulo em que isso acontece?	1,2pt