Esquema de Pontuação da Segunda Fase do CNF - Nível 1

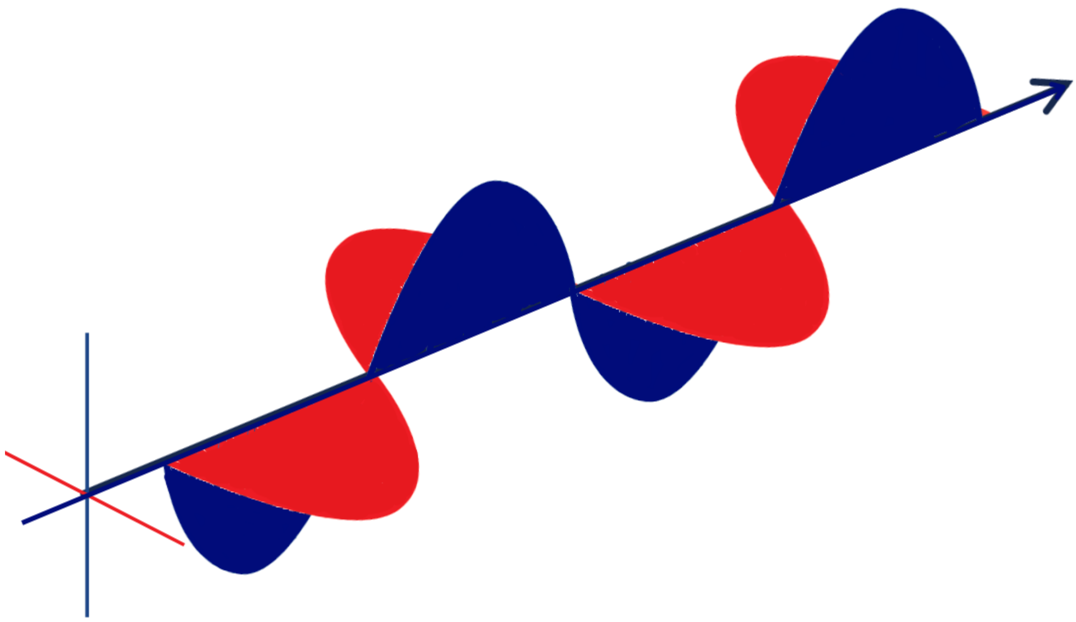


Tabela de constantes

Constante	**Valor**
Velocidade da Luz (c)	$299.792.458\,\mathrm{m/s}$
Constante de Planck (h)	$6,63 \times 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}$
Constante Gravitacional (G)	$6,67 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$
Carga do Elétron (e)	$1,60 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$
Constante de Boltzmann (k)	$1,38 \times 10^{-23}\,\mathrm{J/K}$
Número de Avogadro (N_A)	$6,02 \times 10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}}$
Raio da Terra($R_\oplus$)	$6,378 \times 10^{6}\,\mathrm{m}$
Massa da terra($M_\oplus$)	$5,97 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$
Constante dielétrica no vácuo(ϵ_0)	8,85 $\times 10^{-12}$ $\mathrm{C^2N^{-1}m^{-1}}$
Constante de Stefan-Boltzmann (σ)	$5,67 \times 10^{-8}\,\mathrm{W/m^2\,K^4}$

Importante! Cada erro algébrico acarretará em uma penalização de -0,3pt. Além disso, a correção deverá ser feita a risca de acordo com o esquema de pontuação.

Questão 1. Febril[1]

Solução A.1

Pela fórmula de conversão de temperaturas, que é resultado de uma regra de 3, temos que

$$\frac{T_x - T_{gx}}{T_{vx} - T_{gx}} = \frac{T_r - T_{gr}}{T_{vr} - T_{gr}} \tag{1}$$

onde T_{gx} é a temperatura do gelo na escala X, T_{vx} é a temperatura do vapo na escala X, $T_{gr} = 0°R$ é a temperatura do gelo na escala R e $T_{vr} = 80°R$ é a temperatura do vapor na escala R.

Sabemos que $T_r = T_x$ quando ambos atingem $-40°$ em suas respectivas escalas. De modo que:

$$\frac{-40 - T_{gx}}{T_{vx} - T_{gx}} = \frac{-40 - 0}{80 - 0} \tag{2}$$

Resolvendo:

$$-80 - 2T_{gx} = -(T_{vx} - T_{gx}) \Rightarrow T_{vx} - 80 = 3T_{gx} \tag{3}$$

Sabemos que $T_c = T_x$ quando ambos atingem $-75°$ em suas respectivas escalas e que a temperatura de gelo e vapor em Celsius é $0°C$ e $100°C$, respectivamente. De modo que:

$$\frac{-75 - T_{gx}}{T_{vx} - T_{gx}} = \frac{-75 - 0}{100 - 0} \tag{4}$$

Resolvendo:

$$-300 - 4T_{gx} = -3(T_{vx} - T_{gx}) \Rightarrow 3T_{vx} - 300 = 7T_{gx} \tag{5}$$

Sabemos, entretanto, que $T_{vx} = 3T_{gx} + 80$. Logo:

$$3(3T_{gx} + 80) - 300 = 7T_{gx} \Rightarrow \boxed{T_{gx} = 30°X} \tag{6}$$

$$T_{vx} = 3 \times 30 + 80 \implies \boxed{T_{vx} = 170°X} \tag{7}$$

Portanto, os valores de $0°R$ e $80°R$, as temperaturas de gelo e vapor na escala R, correspondem a $30°X$ e $170°X$ na escala X.

Esquema de Pontuação:

- 0,3pt pela fórmula de conversão de temperaturas;
- 0,4pt pela relação entre a escala $°X$ e escala Réamur;
- 0,4pt pela relação entre a escala $°X$ e escala Celsius;
- 0,2pt pelo valor correto de T_{gx};
- 0,2pt pelo valor correto de T_{vx}.

[1]Autoria de Gabriel Moreno Ribeiro

Solução A.2

Os valores de $0°C$ e $100°C$ são as temperaturas de gelo e vapor na escala Celsius. Portanto devemos achar o valor da temperaturas de gelo e vapor na escala X. Porém isso foi exatamente o que calculamos no item A.1. Logo, correspondem a $30°X$ e $170°X$ na escala X.

Esquema de Pontuação:

- 1,1pt pelo argumento análogo à A.1;
- 0,4pt pelas respostas finais corretas (0,2pt para cada).

Solução A.3

Devemos achar o valor da temperaturas de gelo e vapor na escala X. Porém isso foi exatamente o que calculamos no item A.1. Logo, correspondem a $30°X$ e $170°X$ na escala X.

Esquema de Pontuação:

- 1,1pt pelo argumento análogo à A.1;
- 0,4pt pelas respostas finais corretas (0,2pt para cada).

Solução A.4

Pela fórmula de conversão de temperaturas, que é resultado de uma regra de 3, temos que:

$$\frac{T_x - T_{gx}}{T_{vx} - T_{gx}} = \frac{T_c - T_{gc}}{T_{vc} - T_{gc}} \tag{8}$$

Pelos resultados item A.1 sabemos que $T_{gx} = 30 \circ X$ e que $T_{vx} = 170°X$. Usando isso e conhecendo que os pontos de gelo e vapor na escala Celsius são $0°C$ e $100°C$, temos que:

$$\frac{T_x - 30}{170 - 30} = \frac{-273,15 - 0}{100 - 0} \tag{9}$$

Resolvendo a equação para T_x chegamos que o ponto de zero absoluto na escala X é $\boxed{T_x = -352,41°X}$

Esquema de Pontuação:

- 1,0pt pela relação correta entre as temperaturas;
- 0,5pt pela resposta correta.

Solução A.5

Pela fórmula de conversão de temperaturas, que é resultado de uma regra de 3, temos que:

$$\frac{T_x - T_{gx}}{T_{vx} - T_{gx}} = \frac{T_e - T_{ge}}{T_{ve} - T_{ge}} \tag{10}$$

onde o índice ”e”denota uma escala genérica e o ”x”denota a escala X. Portanto, para realizar a conversão entre as escalas, precisamos saber os valores da temperatura de gelo e de vapor em cada uma das escalas. Graças ao item A.1, descobrimos que $T_{gx} = 30°X$ e $T_{vx} = 170°X$. Sabemos que $T_{gr} = 0°R$ e $T_{vr} = 80°R$, que $T_{gc} = 0°C$ e $T_{vc} = 100°C$, que $T_{gf} = 32°F$ e $T_{vx} = 212°F$ e, por fim, que $T_{gk} = 273,15°K$ e $T_{vk} = 373,15°K$. Logo:

Para Réaumur:

$$\frac{T_x - 30}{170 - 30} = \frac{T_r - 0}{80 - 0} \tag{11}$$

$$\boxed{T_x = 30 + 1,75T_r} \tag{12}$$

Para Celsius:

$$\frac{T_x - 30}{170 - 30} = \frac{T_c - 0}{100 - 0} \tag{13}$$

$$\boxed{T_x = 30 + 1,4T_c} \tag{14}$$

Para Fahrenheit:

$$\frac{T_x - 30}{170 - 30} = \frac{T_f - 32}{212 - 32} \tag{15}$$

$$\boxed{T_x = 30 + \frac{7}{9}(T_f - 32)} \tag{16}$$

Para Kelvin:

$$\frac{T_x - 30}{170 - 30} = \frac{T_k - 273,15}{373,15 - 273,15} \tag{17}$$

$$\boxed{T_x = 30 + 1,4\,(T_k - 273,15)} \tag{18}$$

Esquema de Pontuação:

- 1,0pt pela fórmula genérica de conversão de temperaturas;
- 0,5pt para cada relação correta (até 2 pontos).

Solução A.6

Pela fórmula de conversão de temperaturas, que é resultado de uma regra de 3, temos que:

$$\frac{T_x - T_{gx}}{T_{vx} - T_{gx}} = \frac{T_c - T_{gc}}{T_{vc} - T_{gc}} \tag{19}$$

Pelos resultados item A.1 sabemos que $T_{gx} = 30°X$ e que $T_{vx} = 170°X$. Usando isso e conhecendo que os pontos de gelo e vapor na escala Celsius são $0°C$ e $100°C$, temos que:

$$\frac{86 - 30}{170 - 30} = \frac{T_c - 0}{100 - 0} \tag{20}$$

Resolvendo para T_c, descobrimos que a temperatura medida por Uchoa em Celsius é de

$T_c = 40°C$. Uchoa infelizmente está com febre, mas não está morto que nem achava ao se medir inicialmente!

Esquema de Pontuação:

- 1,0pt pela relação correta entre as temperaturas;
- 0,5pt pelo valor numérico correto para a temperatura.

Questão 2. Física ou matemática?[2]

Solução A.1

Pela definição de densidade, temos que:

$$\rho_{cubo} = \frac{m_{cubo}}{v_{cubo}} \tag{21}$$

onde ρ é densidade, m é a massa e v é o volume. Sabemos que a massa do cubo é $m_{cubo} = 1$ kg, logo basta acharmos o volume do cubo.

Pela fórmula do volume de um cubo, temos que $v_{cubo} = a^3$, onde a é a aresta do cubo. Logo:

$$v_{cubo} = 0,55^3 \text{ m}^3 \implies \boxed{v_{cubo} = 0,166 \text{ m}^3}$$

Em posse da massa e do volume, podemos enfim calcular a densidade:

$$\rho_{cubo} = \frac{1 \text{ kg}}{0,166 \text{ m}^3} \implies \boxed{\rho_{cubo} = 6 \text{ kg/m}^3} \tag{22}$$

Esquema de Pontuação:

- 0,5pt pela fórmula da densidade;
- 1,0pt pelo cálculo do volume;
- 0,5pt pelo valor numérico correto.

Solução A.2

Pela definição de densidade, temos para o paralelepípedo que

$$\rho_p = \frac{m_p}{v_p} \tag{23}$$

onde ρ é densidade, m é a massa e v é o volume. Sabemos que a massa do paralelepípedo é $m_p = 3$ kg, logo basta acharmos o volume do paralelepípedo.

Pela fórmula do volume de um paralelepípedo, temos que $v_p = h \cdot c \cdot l$, onde h, c e l são, respectivamente, a altura, comprimento e largura do paralelepípedo. Logo:

$$v_p = 1,15 \cdot 1,55 \cdot 2,05 \text{ m}^3 \implies \boxed{v_p = 3,65 \text{ m}^3} \tag{24}$$

Em posse da massa e do volume, podemos enfim calcular a densidade:

$$\rho_p = \frac{3 \text{ kg}}{3,65 \text{ m}^3} \implies \boxed{\rho_p = 0,82 \text{ kg/m}^3} \tag{25}$$

[2] Autoria de Arthur Gomes Gurjão

Esquema de Pontuação:

- 0,5pt pela fórmula da densidade;
- 1,0pt pelo cálculo do volume;
- 0,5pt pelo valor numérico correto.

Solução A.3

Pela definição de densidade, temos que

$$\rho_{esfera} = \frac{m_{esfera}}{v_{esfera}} \tag{26}$$

onde ρ é densidade, m é a massa e v é o volume. Sabemos que a massa da esfera é $m_{esfera} = \frac{4\pi}{3}$ kg, logo basta acharmos o volume da esfera.

Pela fórmula do volume de uma esfera, dado no enunciado, temos que $v_{esfera} = \frac{4\pi}{3}R^3$, onde R é o raio da esfera. Logo:

$$v_{esfera} = \frac{4\pi}{3} \cdot 1^3 \text{ m}^3 = \frac{4\pi}{3} \text{ m}^3 \tag{27}$$

Em posse da massa e do volume, podemos enfim calcular a densidade:

$$\rho_{esfera} = \frac{\frac{4\pi}{3} \text{ kg}}{\frac{4\pi}{3} \text{ m}^3} = 1 \text{ kg/m}^3 \tag{28}$$

Esquema de Pontuação:

- 0,5pt pela fórmula da densidade;
- 1,0pt pelo cálculo do volume;
- 0,5pt pelo valor numérico correto.

Solução A.4

A densidade do cubo é de 6 kg/m^3, ou seja, maior que a densidade da água. Logo, **segundo o enunciado, afundará**.

A densidade do paralelepípedo é de $0,82$ kg/m^3, ou seja, menor que a da água. Logo, **segundo o enunicado, ele flutuará;**

A densidade da esfera é de 1 kg/m^3, ou seja, igual a da água. Logo, **segundo o enunciado, ela não afundará nem flutuará.**

Esquema de Pontuação:

- 0,33pt para cada conclusão correta.

Solução B.1

Para começarmos, é de crucial importância entendermos que o cosseno e o seno têm ambos valor mínimo de -1 e valor màximo de +1. Portnato, não existe ângulo cujo seno seja 5 ou ângulo cujo cosseno seja -2. Queremos provar que $A \leq B + C$, portanto devemos procurar achar o valor máximo de A para ver se isso de fato é satisfeito.

sabemos que $A^2 = B^2 + C^2 - 2BC\cos\theta$. O termo que varia o valor de A e que define seu máximo e mínimo é o termo que apresenta o cosseno, isto é, $-2BC\cos\theta$. Queremos que ele tenha o maiorr valor possível para que A seja máximo. Logo, como ele é negativo, devemos escolher o valor de -1 para o cosseno, de modo que o termo vire $+2BC$. Qualquer outro valor escolhido para o cosseno, daria um termo menor. Ao juntar com o restante, temos que:

$$A^2 = B^2 + C^2 + 2BC \tag{29}$$

Entretanto, essa é a fórmula de um quadrado perfeito, ou seja, podemos reescrever A como:

$$A^2 = (B + C)^2 \tag{30}$$

$$A = B + C \tag{31}$$

Portanto, o maior valor que A pode assumir é de $B + C$ e, assim, confirmamos que $\boxed{A \leq B + C}$.

Esquema de Pontuação:

- 0,5pt por identificar os limites do cosseno;
- 1,0pt por identificar o valor de cosseno apropriado para o que desejamos calcular;
- 1,0pt por achar que $A_{max} = B + C$;
- 0,5pt pela conclusão correta.

Questão 3. Brincando Com Fogo[3]

Solução A.1

Pela uso da trigonometria, podemos achar a componente horizontal e vertical das velocidades:

$$\boxed{\begin{aligned} v_{0y} &= v_0 \cos\theta \\ v_{0x} &= v_0 \sin\theta \end{aligned}} \tag{32}$$

Esquema de Pontuação:

- 0,1pt pela expressão correta da componente vertical da velocidade;
- 0,1pt pela expressão correta da componente horizontal da velocidade.

Solução A.2

Como a gravidade é uma aceleração somente na vertical, a velocidade horizontal não sofre aceleração e realize um movimento uniforme com velocidade $v_x(t) = v_0 \cos\theta$ e de equação horária:

$$x(t) = v_0 \cos\theta t \tag{33}$$

Entretanto, a componente vertical sofre a ação da gravidade, de modo que ela realize um movimento uniformemente variado com aceleração g para baixo.

Sua velocidade em função do tempo será $v_y(t) = v_0 \cos\theta - gt$, cujo valores negativos implicam em velocidades para baixo. Sua equação horária em y é:

$$\boxed{y(t) = v_0 \sin\theta t - \frac{gt^2}{2}} \tag{34}$$

Esquema de Pontuação:

- 0,25pt pela expressão correta de $v_x(t)$;
- 0,25pt pela expressão correta de $v_y(t)$;
- 0,25pt pela expressão correta de $x(t)$;
- 0,25pt pela expressão correta de $y(t)$.

Solução A.3

No pontos mais alto temos $v_y(t) = 0$. Logo:

$$0 = v_0 \sin\theta - gt_s \;\Rightarrow\; t_s = \frac{v_0 \sin\theta}{g} \tag{35}$$

[3]Autoria de Gabriel Aragão de Lins Albuquerque

Sabendo que o tempo de subida é igual ao de descida, temos:

$$t_T = t_s + t_d \implies \boxed{t_T = \frac{2v_0 \sin\theta}{g}} \tag{36}$$

Esquema de Pontuação:

- 0,25pt pela expressão correta para o tempo de subida;
- 0,25pt pela expressão correta para a duração total do lançamento.

Solução A.4

Usando a função horária da posição em y para o tempo em que o projétil atinge a altura máxima:

$$h_{max} = y(t_s) = (v_0 \sin\theta)\left(\frac{v_0 \sin\theta}{g}\right) - \frac{g\left(\frac{v_0 \sin\theta}{g}\right)^2}{2} \tag{37}$$

$$\boxed{h_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g}} \tag{38}$$

Esquema de Pontuação:

- 0,3pt por chegar na expressão correta.

Solução A.5

Usando a função horária da posição em x para o tempo total do lançamento:

$$A = x(t_T) = (v_0 \cos\theta)\left(\frac{2v_0 \sin\theta}{g}\right) \implies \boxed{A = \frac{2v_0^2 \sin\theta\cos\theta}{g}} \tag{39}$$

Esquema de Pontuação:

- 0,8pt por chegar na expressão correta.

Solução A.6:

Do item anterior e usando da trigonometria que $\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$, temos que:

$$A = \frac{2v_0^2 \sin\theta\cos\theta}{g} \implies \boxed{A = \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g}} \tag{40}$$

Note que A será máximo quando $\sin(2\theta)$ for máximo, isso ocorre quando $\sin(2\theta) = 1 \implies \theta = 45°$.

Esquema de Pontuação:

- 0,3pt por realizar a transformação trigonométrica;
- 0,3pt por argumentar satisfatoriamente sobre o máximo do alcance;
- 0,4pt por chegar no valor correto para θ.

Solução A.7

De A.2, podemos relacionar o tempo com a posição em x do projétil:

$$x = v_0 \cos\theta t \implies t = \frac{x}{v_0 \cos\theta} \tag{41}$$

Logo, podemos colocar esse tempo na equação horária em y para achar uma relação entre a coordenada em y e a coordenada em x do projétil.

$$y = v_0 t \sin\theta - \frac{gt^2}{2} \implies y = (v_0 \sin\theta)\left(\frac{x}{v_0 \cos\theta}\right) - \frac{g\left(\frac{x}{v_0\cos\theta}\right)^2}{2} \tag{42}$$

$$\boxed{y(x) = x\tan\theta - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\theta}} \tag{43}$$

Esquema de Pontuação:

- 0,8pt por algum método coerente que relacione a função horária da posição em x e y;
- 0,7pt por chegar na expressão correta.

Solução B.1

De A.7 e usando a transformação trigonométrica dada, temos que:

$$y = x\tan\theta - \frac{gx^2}{2v_0^2}\frac{1}{\cos^2\theta} \Rightarrow y = x\tan\theta - \frac{gx^2}{2v_0^2}\left(\tan^2\theta + 1\right) \tag{44}$$

Podemos então reescrever a expressão como uma equação do segundo grau em $\tan\theta$

$$\boxed{\frac{gx^2}{2v_0^2}\tan^2\theta - x\tan\theta + \frac{gx^2}{2v_0^2} + y = 0} \tag{45}$$

Esquema de pontuação:

- 0,4pt por identificar onde usar a transformação trigonométrica dada;
- 0,8pt por chegar na expressão correta.

Solução B.2

Não, pois a equação da trajetória é uma equação do segundo grau em $\tan\theta$ para qualquer ponto (x, y) diferente da origem, logo existem no máximo duas soluções para o valor de $\tan\theta$ para um dado ponto. Como para cada valor de $\tan\theta$ no intervalo $180° > \theta > 0°$ existe um e somente um valor de θ correspondente, concluímos que um ponto qualquer estará contido no máximo em duas trajetórias de lançamento diferente.

Esquema de Pontuação:

- 0,1pt por responder negativamente;
- 0,3pt por relacionar a equação da trajetória ser de segundo grau com um número limitado de soluções;
- 0,1pt por concluir satisfatoriamente o raciocínio.

Solução B.3

Se um ponto só pode ser atingido para um valor de θ, então para esse ponto a equação de B.1 possui apenas uma solução, logo o delta será zero. Da equação $\tan^2\theta\frac{gx^2}{2v_0^2} - \tan\theta\cdot x + \frac{gx^2}{2v_0^2} + y = 0$, temos:

$$\Delta = 0 \Rightarrow x^2 - 4\cdot\frac{gx^2}{2v_0^2}\cdot\left(\frac{gx^2}{2v_0^2} + y\right) = 0 \tag{46}$$

$$\boxed{y = -\frac{gx^2}{2v_0^2} + \frac{v_0^2}{2g}} \tag{47}$$

Esquema de Pontuação:

- 0,8pt por citar que o Δ da equação da trajetória será zero;
- 1,4pt por chegar na expressão correta.

Solução B.4

Encontraremos H_{max} a partir da equação encontrada em A.4 e usando o fato de que o maior valor que um seno poder assumir seja 1:

$$h_{máx} = \frac{v_0^2\sin^2\theta}{2g} \implies H_{máx} = \frac{v_0^2 sen^2(90)}{2g} = \frac{v_0^2}{2g} \tag{48}$$

Lançamento horizontal a partir de H_{max}:

$$x(t) = v_0 t \implies y(t) = H_{max} - \frac{gt^2}{2} = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gt^2}{2} \tag{49}$$

Isolando t na primeira e substituindo na segunda, obtemos a mesma equação da parábola de segurança:

$$\boxed{y = -\frac{gx^2}{2v_0^2} + \frac{v_0^2}{2g}} \tag{50}$$

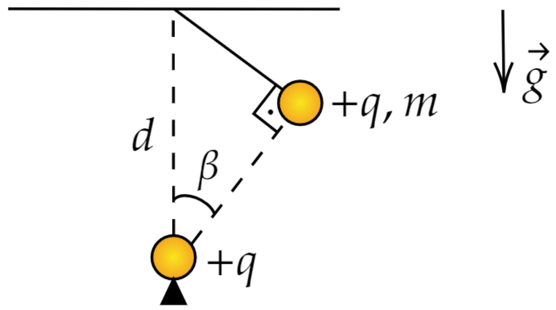
Esquema de Pontuação:

- 0,3pt por encontrar H_{max};
- 0,5pt por chegar na expressão correta para a trajetória.

Questão 4. Cargas Equilibradas (10 pontos)[4]

Solução A.1

Observe a figura fornecida na questão:



Pela definição de cosseno temos que:

$$\cos\beta = \frac{D}{d} \implies \boxed{D = d\cos\beta} \tag{51}$$

Esquema de Pontuação:

- 1,0pt pela definição de cosseno;
- 0,5pt pela resposta final correta.

Solução A.2

Devemos usar agora a definição de seno, chegando a um resultado semelhante:

$$\boxed{l = d\sin\beta} \tag{52}$$

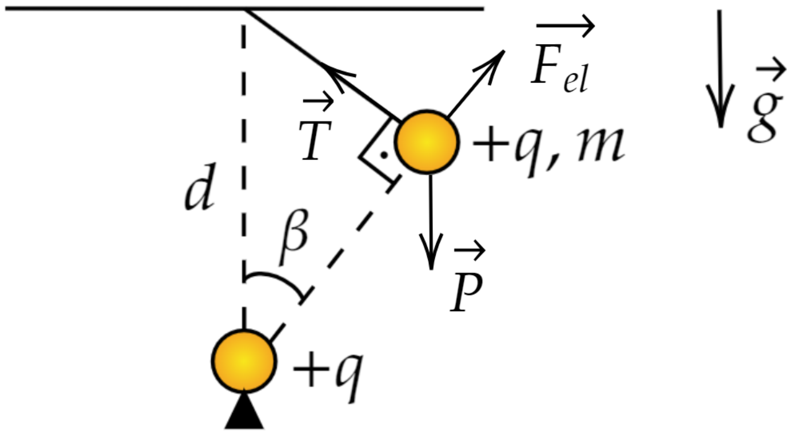
Esquema de Pontuação:

- 1,0pt pela definição de seno;
- 0,5pt pela resposta final correta.

Solução A.3

Veja abaixo o diagrama de corpo livre:

[4] Autoria de Gabriel Moreno Ribeiro



A carga sente a força elétrica, devido à interação com a outra carga, como sente também sua força peso e a força de tração no fio.

Esquema de Pontuação:

- 0,5pt por cada força;
- 0,5pt pela força elétrica de repulsão.

Solução A.4

De acordo com o enunciado, a força elétrica entre duas cargas pontuais q_1 e q_2 é:

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \tag{53}$$

As variáveis do problema são $r = D \implies r = d\cos\beta$ e $q_1 = q_2 = q$, portanto:

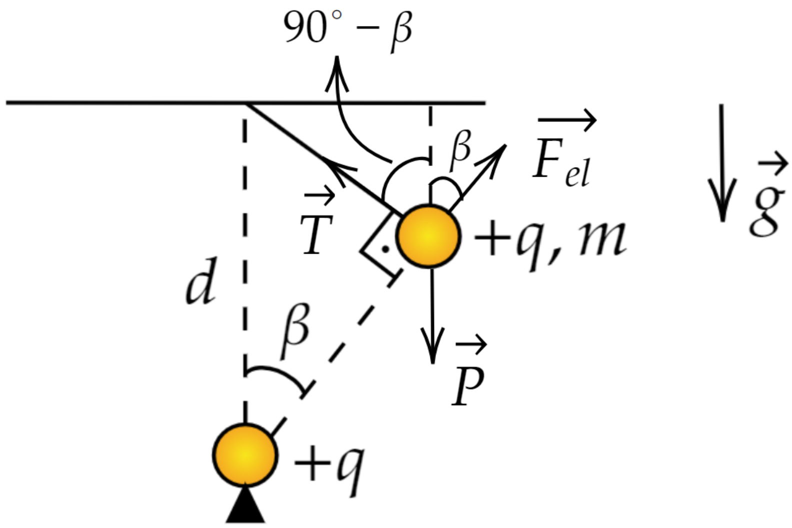
$$\boxed{F_{el} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 d^2 \cos^2\beta}} \tag{54}$$

Esquema de Pontuação:

- 0,4pt por identificar $r = D$;
- 0,2pt por cada carga identificada como q;
- 0,2pt pela resposta final.

Solução A.5

Veja o diagrama de corpo livre com os ângulos:



Podemos decompor as forças na horizontal e vertical, para então equilibrá-las, obtendo o seguinte sistema de equações:

$$\textbf{Para horizontal}: F_{el} \sin\beta = T\cos\beta \tag{55}$$

$$\textbf{Para vertical}: F_{el} \cos\beta + T\sin\beta = P \tag{56}$$

Substituindo F_{el} de A.4 resulta em:

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{q^2 \sin\beta}{4\pi\epsilon_0 d^2 \cos^2\beta} = T\cos\beta \\ \dfrac{q^2}{4\pi\epsilon_0 d^2 \cos\beta} + T\sin\beta = mg \end{cases}} \tag{57}$$

Esquema de Pontuação:

- 0,25pt por cada decomposição (totalizando 4, 2 para cada força em cada eixo);
- 0,5pt por cada equação correta (não é necessário substituir F_{el}).

Solução A.6

Isolando T na equação (49) e substituindo na equação (50) obtemos:

$$\frac{F_{el}}{\cos\beta} = P \implies mg = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 d^2 \cos^3\beta} \tag{58}$$

Obtemos então o $\cos\beta$:

$$\boxed{\cos\beta = \left(\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 d^2 mg}\right)^{\frac{1}{3}}} \tag{59}$$

Já a partir da primeira equação no sistema (51) encontramos:

$$\boxed{T = mg\sin\beta} \tag{60}$$

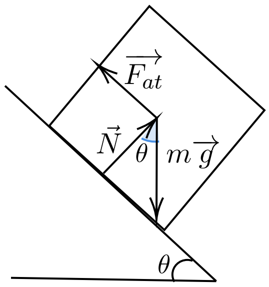
Esquema de Pontuação:

- 0,8pt por obter $P = \frac{F_{el}}{\cos\beta}$;
- 0,4pt pela resposta final de $\cos\beta$;
- 0,8pt por qualquer método que encontre a resposta correta para T.

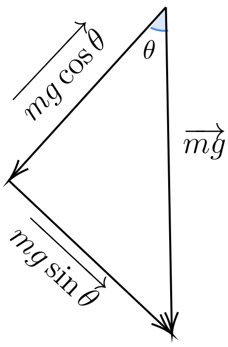
Questão 5. Forças ou Energia?[5]

Solução A.1

Para acharmos a velocidade com que o bloco chegará, precisamos encontrar a sua aceleração. E a encontraremos achando a força resultante, a partir da segunda lei de Newton. O diagrama de forças atuando no bloco é o seguinte:



Podemos notar que a força de atrito está na direção do movimento, tentando freá-lo, e a normal está perpendicular ao movimento. Como o bloco não pode simplesmente saltar da rampa, a aceleração e, portanto, a força resultante na direção perpendicular ao movimento. Portanto, é interessante dividirmos a força peso em componentes na direção do movimento e perpendicular ao movimento. Conforme a geometria apresentada, podemos dividir a força de tal forma:



Como a força resultante na direção perpendicular ao movimento é nula, temos que

$$mg\cos\theta = N \tag{61}$$

Assim, descobrimos quanto vale a Força Normal. Sabemos também que o valor da força de atrito cinético entre duas superfície é o coeficiente de atrito entre elas vezes a Força Normal entre elas. Portanto:

$$F_{at} = \mu N = \mu mg\cos\theta \tag{62}$$

Em posse da força de atrito, conseguimos calcular a aceleração na direção do movimento.

$$F_{resultante} = mg\sin\theta - F_{at} \implies ma = mg\sin\theta - \mu mg\cos\theta \tag{63}$$

[5] Autoria de Arthur Gomes Gurjão

Logo, a aceleração é:

$$a = g\sin\theta - \mu g\cos\theta = \left(\frac{10\sqrt{3}}{2} - 0,6 \cdot 10 \cdot 0,5\right) \text{ m/s}^2 \implies a = 5,66 \text{ m/s}^2 \tag{64}$$

Pela equação de Torricelli, temos que $V_f^2 = V_0^2 + 2ad$, onde a é a aceleração e d é a distância percorrida. Como $V_0 = 0$ m/s, $a = 5,66$ m/s^2 e $d = \frac{L}{\cos(60°)} = 10$ m, temos que:

$$\boxed{V_f \approx 10,6 \text{ m/s}} \tag{65}$$

Esquema de Pontuação:

- 0,5pt pela relação entre a Normal e a força Peso;
- 0,5pt pela fórmula correta da aceleração;
- 0,5pt pela equação de Torricelli ou outros métodos equivalentes;
- 0,5pt pelo valor numérico correto para a velocidade.

Solução A.2

No ínicio do sistemq, a velocidade do bloco é nula, logo a única contribuicção para a energia é a potencial. Portanto:

$$E_i = mgh$$

onde h é a altura que o bloco estava no início. Porém, pela conservação de energia, a variação de energia no bloco tem que ser igual a energia dissipada pelo atrito, já que energia não pode simplesmente deixar de existir. Como a altura no final do sistema é nula, a única contribuição para a energia é a cinética. Logo:

$$E_f = \frac{mV_f^2}{2}$$

. Para achar a velocidade, portanto, devemos relacionar a variação de nergia no bloco com a enegria dissipada. A energia dissipada é igual a

$$E_{fat} = -F_{at} \times d$$

, onde d é a distância percorrida pelo bloco e o menos vem por ser uma força dissipativa. Usando o mesmo raciocínio do item anterior, achamos que $F_at = \mu mg\cos\theta$. Logo

$$\Delta E = \frac{mV_f^2}{2} - mgd\sin\theta = -F_{at} \times d = -\mu mgd\cos\theta \tag{66}$$

$$\frac{V_f^2}{2} = gd\sin\theta - \mu\cos\theta \tag{67}$$

Logo, $\boxed{V_f = 10,6 \text{ m/s}}$.

Esquema de Pontuação:

- 0,5pt pela relção entre a variação de energia e a energia dissipada;
- 0,5pt pela fórmula correta para a energia dissipada;
- 0,5pt pela variação correta de energia;
- 0,5pt pelo valor númerico correto da velocidade.

Solução B.1

Pela conservação de energia, como não há força dissipativa, temos que a energia final é igual a inicial.

Como a velocidade inicial é nula, a única contribuição para a energia inicial é a cinética. Descido um ângulo θ, ele passa a ter contribuição cinética e potencial para a energia. Para achar a energia, basta calcular a altura, e assim a potencial, do bloco após descer um ângulo θ. Como ele desce uma altura $h = R\sin\theta$, sua altura final é $h = R - R\sin\theta$. Portanto:

$$E_i = mgR = E_f = \frac{mv_\theta^2}{2} + mg\left(R - R\sin\theta\right) \tag{68}$$

Logo

$$mgR\sin\theta = \frac{mv_\theta^2}{2} \tag{69}$$

$$\boxed{v = \sqrt{2gR\sin\theta}} \tag{70}$$

Esquema de Pontuação:

- 0,5pt pela fórmula da energia;
- 0,5pt pelo valor correto da velocidade.

Obs1.: nos dois próximos itens é necessário utilizar a massa do bloco, informação que não foi fornecida. Nossa correção será baseada na coerência dos argumentos e clareza das ideias, de modo que esse erro não prejudique os competidores.

Obs2.: Respostas que contenham a massa serão consideradas, assim como respostas que a omitam ou assumar algum determinado valor.

Solução B.2

Para o bloco se manter em um movimento circular, ele deve estar sujeito todos os momentos a uma força centrípeta, apontando para o centro do círculo que ele percorre. Pela fórmula da Força Centrípeta, o valor dela para uma dada velocidade é $F_{cp} = \frac{v^2}{R}$. Logo, a Força resultante apontando pro centro da circunferência que o bloco percorre tem que ser igual a F_{cp} à todos os momento do percurso. As únicas forças que apontam na direção do centro da circunferência são a Normal e uma componente da força Peso. Conforme a geometria da figura, a componente do Peso na direção do centro é $F = mg\sin\theta$. Como a componente do Peso aponta no sentido contrário ao da Normal, temos que a Força resultante na direção do centro da circunferência é

$$F_r = N - mg\sin\theta = F_{cp} = \frac{mv_\theta^2}{R}$$

. Pelo item anterior, descobrimos que $v = \sqrt{2gR\sin\theta}$. Logo, podemos achar a Normal em função do ângulo que ele desce.

$$N = mg\sin\theta + \frac{2mgR\sin\theta}{R} \tag{71}$$

$$\boxed{N = 3mg\sin\theta} \tag{72}$$

Esquema de Pontuação:

- 0,5pt pela fórmula genérica da Força centrípeta;
- 1,0pt por achar a relação correta entre a Normal e a Força Centrípeta;
- 0,5pt pela relação correta entre a Normal e θ.

Solução B.3

Ao descer a rampa por completo, o bloco vai ter descido um ângulo $\theta = 90°$. Logo:

$$N = 3mg\sin(90°) \implies \boxed{N = 3mg} \tag{73}$$

Esquema de Pontuação:

- 0,5pt por identificar que $\theta = 90°$;
- 0,5pt pelo valor correto da Normal.

Solução C.1

Só para checar se você realmente entendeu energia!

Como a energia do sistema se conserva e não há nenhuma dissipação, a energia final é igual a energia inicial. Como a velocidade do bloco no início do percurso é nula, a única contribuição para a energia é a potencial, de uma altura h. Do mesmo modo, no fim do percurso, a altura do bloco é nula e, assim, sua potencial, restando apenas contribuições da cinéyica. Dito isso:

$$E_i = mgh = E_f = \frac{mv^2}{2} \tag{74}$$

$$\boxed{v = \sqrt{2gh}} \tag{75}$$

Esquema de Pontuação:

- 1,0pt pela fórmula da energia;
- 1,0pt pela velocidade correta.